

Ellipsen, Exzenter und Epizykel - Die Genesis der geometrischen Astronomie als Vorgeschichte der Mathematik

von Lutz Führer, Frankfurt/Main

Wer nur ein wenig über Ellipsen gehört hat, kennt die „Leiternaufgabe“ zur Papierstreifenkonstruktion: Rutscht eine Leiter an einer vertikalen Wand ab, so bewegt sich jede Sprosse auf einer elliptischen Bahnkurve (und die Leiter hüllt eine Astroide ein; vgl. etwa Schupp/Dabrock, Kap.1). Weniger bekannt sind die Bahnen von Objekten (Exzentern), die fest oder beweglich mit der Leiter verbunden sind. Studiert man die derart leicht verallgemeinerte Aufgabe etwas genauer, so zeigt sich, daß durch einfache Kopplung zweier Drehbewegungen beliebige Ellipsenbahnen erzeugt werden können, die nicht mehr symmetrisch ans Koordinatensystem gebunden sind.

Nun spielten solche verschachtelten Drehungen bekanntlich die Hauptrolle in den antiken Bahnbeschreibungen für die „sieben“ mit freiem Auge sichtbaren Planeten. Warum hat Ptolemaios damit nicht einfach elliptische Bewegungen um die Sonne erzeugt, wie Kepler es eineinhalb Jahrtausende später tat? Den heliozentrischen Ansatz hatte doch schon Aristarch im 3. Jh. v. Chr. vertreten, und vor ihm die Pythagoreer, vielleicht auch die „Chaldäer“, die Priester-Astronomen im Zweistromland. Wie kann man sich die Entstehung der Ptolemäischen Planetenmodelle und ihre Bewährung bis in die Neuzeit erklären?

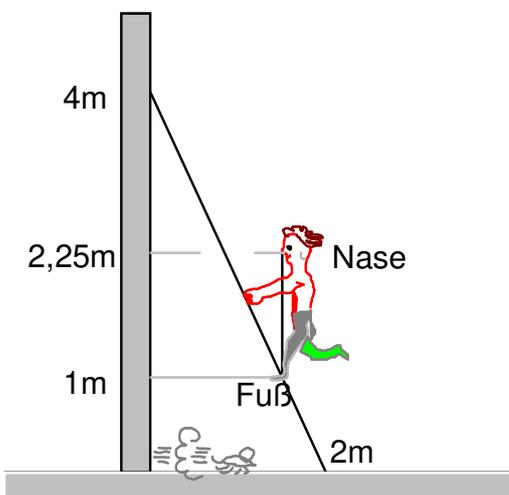
Tatsächlich steckt die Genesis dieser Modelle - schon soweit sie heute erforscht ist - voller Überraschungen, und sie ist zugleich ein zentrales Kapitel der Mathematikgeschichte. Es ist nämlich - um nur ein paar gängige Vorurteile aufzugreifen - schlicht falsch, daß „die Griechen“ keine Bruchrechnung konnten, daß ihre Geometrie als Reine Mathematik entstand, daß es vor Euklid keine Trigonometrie gab und daß die Mathematiker-Philosophen der Antike approximative Methoden grundsätzlich ablehnten. Schon unsere Kreisteilung in 360° , unsere Einteilungen des Himmels und des Jahres sprechen eine andere Sprache. Die berühmten Paradigmenwechsel von der arithmetischen Erbsenzählung der Babylonier zur beweisenden Geometrie bei den Griechen und von den geozentrischen Himmelskreisläufen der Griechen zum „modernen“ Kopernikanischen Weltbild entpuppen sich bei genauerem

Hinsehen als fromme Legenden. Spätestens im ersten vorchristlichen Jahrtausend wurde anspruchsvolle Angewandte Mathematik getrieben. In der Astronomie waren die realen Daten widerspenstig genug, um abstrakte Modellannahmen zu erzwingen, wenn die Phänomene einigermaßen „verstanden“ werden sollten, um sie voraussagen, und dafür wiederum gab es aus astrologischen und geographischen Gründen großes gesellschaftliches Interesse.

Dieses Verstehen konnte - wie unten gezeigt werden soll - nicht ohne theoretische Begründungen auskommen. Dadurch zwang es einerseits zu systematischen Beweisgeflechten, blieb aber andererseits doch dem Wesen nach approximativ, „modellhaft“. Ptolemaios war sich dessen zweifellos bewußt, und seine schrittweise Entwicklung immer besser angepaßter Bahnmodelle in den dreizehn Büchern des „Almagest“ ist ein Muster problemorientierter Mathematisierung. Kopernikus war der Dogmatiker der „Rettung der Phänomene“, nicht Ptolemaios, bei dem schon viele Grundgedanken der angewandten Analysis vorbereitet sind.

So ergibt sich als überraschender Einblick in die Kopernikanische Wende von Ptolemaios zu Kepler die Erkenntnis, daß die heute wieder aktuelle Verflechtung von Reiner und Angewandter Mathematik schon an der Wiege der Geometrie stand. Wer Mathematik lehrt, sollte davon wissen.

1. Das Kind auf der Leiter - eine Klausuraufgabe



Eine Leiter ragt an einer Wand 4m hoch und steht unten 2m ab. 1m über dem Boden steht ein Kind auf der Leiter, die Nasenspitze 1,25m über dem linken Fuß. Da beginnt die Leiter zu rutschen. Das Kind erstarrt vor Schreck...

Auf welchen Kurven bewegen sich der linke

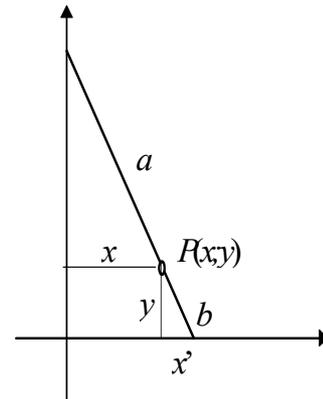
Fuß F bzw. die Nasenspitze N?

Diese Aufgabe war - mit etwas anderen Werten - Teil einer Geometrie-Klausur für Lehramtsstudent(inn)en. Die Papierstreifenkonstruktion war zuvor in der Vorlesung und Übung vorgekommen, daher konnte die F -Bahn leicht gefunden werden:

Wird ein $a:b$ geteilter Papierstreifen ins Koordinatensystem eingepaßt, so gilt für den Teilpunkt P wegen der ähnlichen Dreiecke:

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b}, \text{ also } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

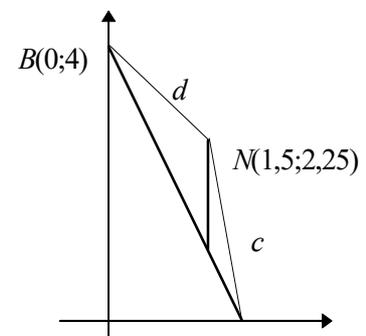
P liegt folglich auf der Standard- a - b -Ellipse. Für den Fußpunkt F in der Leiternaufgabe sind die Achsenlängen nach Pythagoras natürlich $(1 \pm 0,5) \cdot \sqrt{5}$. (Man schiebe die Leiter auf den Boden bzw. an die Wand!)



Mit der Bahnkurve für N ist das nicht so einfach! In der Klausur wurden lediglich vernünftige Ansätze für die parametrisierte ebene Kurve erwartet, um zu sehen, wie weit elementare Analytische Geometrie und/oder Vektorrechnung beherrscht wurde. Ich skizziere zunächst einige zum Teil weniger gelungene Ansätze, um zu zeigen, wie das Problem zunehmend besser verstanden wird und schließlich auf die technische Grundidee der Ptolemäischen Theorie führt:

1.1 Verbindung mit den Auflagepunkten

Um N starr an die Leiter zu binden, soll das Dreieck ANB gedreht werden. Die Seiten sind $\sqrt{20}$ für die Leiter, $c = \frac{1}{4}\sqrt{85}$ und $d = \frac{1}{4}\sqrt{85}$. ANB ist also gleichschenkelig, und die gesuchte Kurve für N muß folglich symmetrisch zur 1. Quadrantenhalbierenden sein. Läßt man nun A mit der Zeit t nach $A(t;0)$ gleiten, so gewinnt man $\vec{N}(t)$ als oberen Schnittpunkt des d -Kreises



um $B(0; \sqrt{20-t^2})$ mit dem c -Kreis um A . Die recht „verwurzelte“ Rechnung soll hier nicht ausgeführt werden. (Sie übt allenfalls Wurzelgleichungen oder den Umgang mit DERIVE.)

1.2 Verbindung mit dem Lotfußpunkt auf der Leiter

Da $g(x) = -2x + 4$ ist, ergibt sich für die Lotgerade h von N aus mit der Punkt-Steigungs-Form

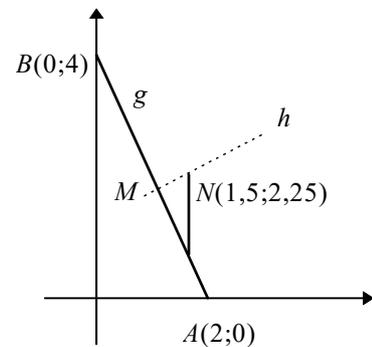
$$h(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - 1,5) + 2,25$$

und als Schnittpunkt von g und h der Lotfußpunkt $M(1;2)$.

Berechnet man noch dessen Abstand von N , so erkennt man, daß sich die Nasenspitze $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{5}$ m senkrecht über der

Leitermitte M befindet. (Die Maßangaben wurden gerade

so gewählt; vgl. auch 1.1.) Setzt man nun wieder $A(t;0)$ in Bewegung, so geht die Leitergerade g_t in die Form



$$g_t(x) = -\frac{\sqrt{20-t^2}}{t} \cdot x + \sqrt{20-t^2}$$

über, und die Mittelsenkrechte zur Leiter nach

$$h_t(x) = \frac{t}{\sqrt{20-t^2}} \cdot \left(x - \frac{t}{2}\right) + \frac{\sqrt{20-t^2}}{2}.$$

Nun findet man $\bar{N}(t)$ auf h_t über der Leitermitte $\bar{M}(t)$, indem man

$$|\bar{N}(t) - \bar{M}(t)|^2 = \left| \begin{pmatrix} x \\ h_t(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20-t^2} \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \left(x - \frac{t}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{t}{\sqrt{20-t^2}} \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{5}{16}$$

nach x auflöst und das Ergebnis in $h_t(x)$ einsetzt. Es ergeben sich:

$$x - \frac{t}{2} = \frac{\sqrt{20-t^2}}{8} \quad \text{und damit} \quad \bar{N}(t) = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4t + \sqrt{20-t^2} \\ t + 4\sqrt{20-t^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{Vgl. 1.3})$$

1.3 Vektorieller Ansatz vom Lotfußpunkt aus

Fällt man von N das Lot auf die Leiter, so findet man (im gegebenen Zahlenbeispiel) deren Mitte M als Fußpunkt. Bewegt man $A(t;0)$ und - daran gekoppelt - $B(0; \sqrt{20-t^2})$, so geht

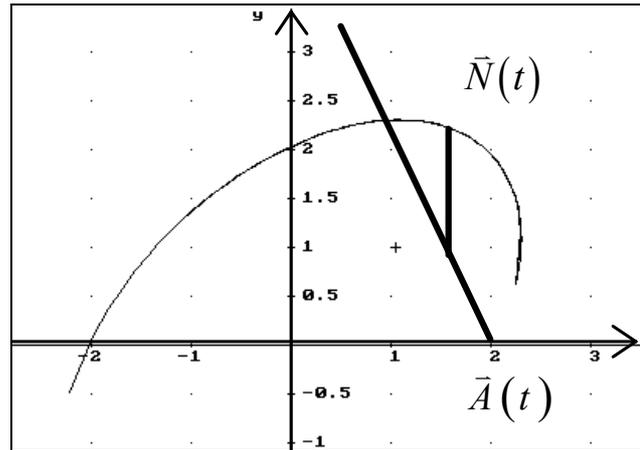
$$\vec{AB}$$

die Leitermitte nach $\vec{M}(t) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{20-t^2} \end{pmatrix}$. Da $\vec{A} = \begin{pmatrix} -t \\ \sqrt{20-t^2} \end{pmatrix}$ die Leiterlänge $\sqrt{20}$ hat,

ergibt sich mit dem Abstand $\frac{1}{4}\sqrt{5}$ zwischen N und M (vgl. 1.2)

$$\vec{N}(t) = \vec{M}(t) + \frac{1}{\sqrt{20}} \cdot (\vec{B} - \vec{A})^\perp \cdot \frac{1}{4}\sqrt{5} = \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \\ \sqrt{20-t^2} \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{20-t^2} \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4t + \sqrt{20-t^2} \\ t + 4\sqrt{20-t^2} \end{pmatrix}.$$

Im nebenstehenden Bild sieht man die DERIVE-Grafik zur Gleichung von $\vec{N}(t)$. Es scheint sich um einen Ellipsenbogen um den Ursprung zu handeln. Wenn es so ist, dann müssen die Achsen der Ellipse auf den Quadrantenhalbierenden liegen, denn die Extrema von $|\vec{N}(t)|^2$ werden bei $t = \pm\sqrt{10}$



angenommen, und die entsprechenden Vektoren liegen auf den Quadrantenhalbierenden (vgl. auch 1.1). Bezüglich des um 45° gedrehten Koordinatensystems $(\vec{e}_1'; \vec{e}_2')$ hat das Standardkoordinatensystem die Darstellung $(\vec{e}_1; \vec{e}_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1' - \vec{e}_2'); \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1' + \vec{e}_2') \right)$, so daß im gedrehten System

$$\vec{N}(t) = \frac{5}{8\sqrt{2}} \cdot \left[\left(t + \sqrt{20-t^2} \right) \cdot \vec{e}_1' + \frac{3}{5} \cdot \left(-t + \sqrt{20-t^2} \right) \cdot \vec{e}_2' \right]$$

wird. Da die Quadratsumme der runden Klammern 40 ist, handelt es sich um einen in \vec{e}_2' -Richtung auf 60% zusammengedrückten Kreisbogen, also tatsächlich um ein Ellipsenstück - von dem freilich nur der „rechte Teil“ mit $0 \leq t \leq \sqrt{20}$ oder gar $2 \leq t \leq \sqrt{20}$ für das Leiterproblem Sinn macht (sonst müßte man die Leiter links durch die Wand drücken).

1.4 Berücksichtigung des Drehprozesses

Eine bessere Einsicht in die Struktur des Problems ist zu erwarten, wenn man den Drehprozeß der Leiter im Ansatz für $\vec{N}(\alpha)$ berücksichtigt. Dazu geht man sinnvollerweise von

einer gleichförmigen Drehung der Leiter aus, nicht - wie bisher - von einer gleichförmigen Linearbewegung des $\vec{A}(t)$.

Bezeichnet man die Leiterlänge mit l und den Abstand zwischen Nasenspitze und Leitermitte (in unserem Spezialfall ist das zugleich der Lotfußpunkt) mit d , dann lassen sich die folgenden Gleichungen direkt hinschreiben:

$$\vec{A}(\alpha) = l \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{B}(\alpha) = l \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{M}(\alpha) = \frac{l}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix},$$

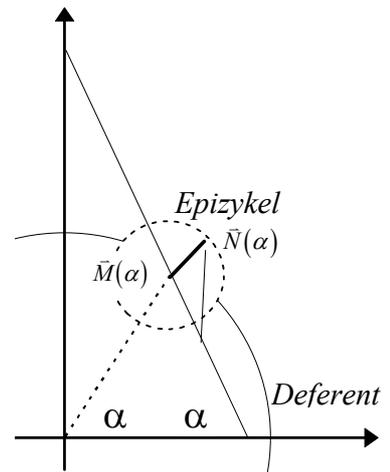
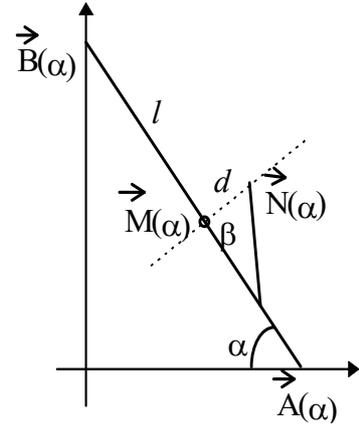
und $\vec{N}(\alpha) - \vec{M}(\alpha) = d \cdot \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$. Mit $d = \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{l}{8}$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \vec{N}(\alpha) &= \vec{M}(\alpha) + (\vec{N}(\alpha) - \vec{M}(\alpha)) = \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \left[4 \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \left[4 \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Der letzte Funktionsterm ist leicht geometrisch zu deuten:

Dreht sich die Leitermitte $\vec{M}(\alpha)$ auf ihrem Kreis vom Radius $\frac{l}{2}$ um den Ursprung („Deferent“), so bewegt sich $\vec{N}(\alpha)$ mit gleicher Drehgeschwindigkeit *gegenläufig* im Abstand $\frac{l}{8}$ um die Leitermitte („Epizykel“). Die extremalen Entfernungen zum Ursprung werden offenbar genau dann erreicht, wenn die zwei Zeiger $\vec{M}(\alpha)$ $\vec{MN}(\alpha)$ bzw. kollinear sind, d.h. für $\alpha = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} = 90^\circ \pm 45^\circ$. Läßt man die Bewegung dort beginnen, ersetzt also z.B. α durch $\alpha =: \bar{\alpha} + \frac{\pi}{4}$, dann erhält $\vec{N}(\bar{\alpha})$ die symmetrischere Darstellung

$$\vec{N}(\bar{\alpha}) = \frac{l}{8} \cdot \left[4 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4} + \bar{\alpha}) \\ \sin(\frac{\pi}{4} + \bar{\alpha}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4} - \bar{\alpha}) \\ \sin(\frac{\pi}{4} - \bar{\alpha}) \end{pmatrix} \right].$$



Zerlegt man das mit Hilfe der Additionstheoreme, so ergibt sich

$$\vec{N}(\bar{\alpha}) = \frac{l\sqrt{2}}{16} \cdot \begin{pmatrix} 5 \cos \bar{\alpha} - 3 \sin \bar{\alpha} \\ 3 \sin \bar{\alpha} + 5 \cos \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \frac{l\sqrt{2}}{16} \cdot \left[5 \cos \bar{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \sin \bar{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Die Vektoren in der eckigen Klammer bilden ein Orthogonalsystem, und man erkennt sofort die in der zweiten Koordinate auf 60% gestauchte Kreisbewegung, d.h. die Ellipse für $\vec{N}(\bar{\alpha})$. (Läßt man für $\bar{\alpha}$ beliebige Werte zu, um die volle Ellipse zu durchlaufen, dann muß man sich die Leiter als so durch Wand und Boden drehbar vorstellen, daß die Enden der Leiter auf den Achsen bleiben, und das Kind auf der Leiter starr; vgl. Abschnitt 2)

1.5 Allgemeine vektorielle Lösung

Die eben behandelte Lösung hängt nur schwach von den speziellen Eigenheiten der Einsteigsaufgabe ab, denn der Drehungsansatz erlaubt es, die Orthogonalität zwischen Leiter und Epizykelradius \vec{MN} durch beliebige Winkel zu ersetzen. Damit wird deutlich, daß es sich im Kern um ein Drehungsproblem handelt. (Eine komplexe Darstellung bietet sich an, soll aber nur im 2. Abschnitt kurz einmal benutzt werden: Einerseits gehören komplexe Zahlen nicht überall zum Schulstoff, andererseits benötigen Planetenbahnen naturgemäß dreidimensionale Techniken, bei denen erst Quaternionen eine nennenswerte Hilfe bieten würden.)

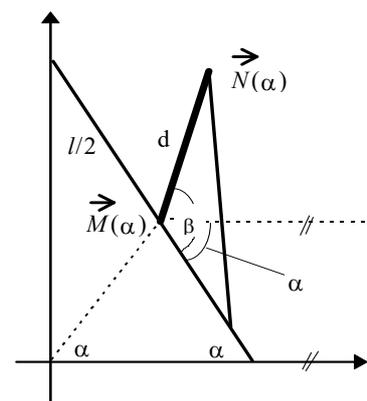
Rutscht die Leiter der Länge l mit Stellungswinkel α , so bewegt sich der Leitemittelpunkt $\vec{M}(\alpha)$ auf dem $\frac{l}{2}$ -Kreis um den Ursprung. Zugleich dreht sich der Epizykelradius $\vec{MN}(\alpha)$ um den Winkel $(\beta - \alpha)$ bzgl. der Horizontalen. Damit wird

$$\vec{N}(\alpha) = \frac{l}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta - \alpha) \\ \sin(\beta - \alpha) \end{pmatrix}.$$

Symmetrisiert man wie in 1.4 mittels $\alpha := \frac{\beta}{2} + \bar{\alpha}$, löst mit-

tels der Additionstheoreme auf und zieht die konstanten Vektoren heraus, so erhält man

$$\vec{N}(\bar{\alpha}) = \frac{l}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2} + \bar{\alpha}\right) \\ \sin\left(\frac{\beta}{2} + \bar{\alpha}\right) \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2} - \bar{\alpha}\right) \\ \sin\left(\frac{\beta}{2} - \bar{\alpha}\right) \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{l}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \bar{\alpha} - \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \bar{\alpha} \\ \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \bar{\alpha} + \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \bar{\alpha} \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \bar{\alpha} + \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \bar{\alpha} \\ \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \bar{\alpha} - \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \bar{\alpha} \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{l}{2} + d\right) \cdot \cos \bar{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} + \left(\frac{l}{2} - d\right) \cdot \sin \bar{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \frac{\beta}{2} \\ \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \\
&= D_{\frac{\beta}{2}} \left[\begin{pmatrix} \left(\frac{l}{2} + d\right) \cdot \cos \bar{\alpha} \\ \left(\frac{l}{2} - d\right) \cdot \sin \bar{\alpha} \end{pmatrix} \right] = D_{\frac{\beta}{2}} \circ \begin{pmatrix} \frac{l}{2} + d & 0 \\ 0 & \frac{l}{2} - d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \cos \bar{\alpha} \\ \sin \bar{\alpha} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

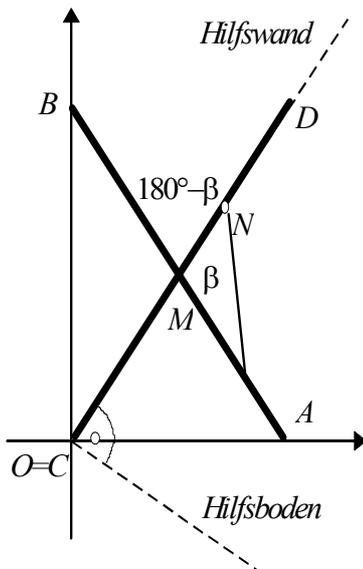
Die orthonormalen Vektoren in der vorletzten Zeile zeigen die Achsenrichtungen einer offensichtlich elliptischen Bewegung, deren Achsenlängen $\left(\frac{l}{2} \pm d\right)$ betragen. Die achsensymmetrische elliptische Bewegung, die man in der eckigen Klammer erkennt, wurde lediglich einer konstanten Drehung um $\frac{1}{2} \beta$ unterworfen. Indem die allgemeine Leiternaufgabe in eine Epizykelbewegung zum „Deferentenkreis“ der Leitermitte umgedeutet wurde, beweisen die letzten Funktionsterme für $\vec{N}(\alpha)$:

Haben Deferent und Epizykel gleiche, aber gegenläufige Frequenz, dann bewegt sich der Bahnpunkt auf einer (gegenüber dem Achsenkreuz gedrehten) Ellipse.

Durch entsprechende Vorgaben der Leiterlänge l , des Stellungswinkels β und des Abstandes d zwischen „Leitermitte“ M und „Nasenspitze“ N kann jede zum Ursprung symmetrische Ellipse durch eine rutschende Leiter mit Exzenter erzeugt werden. Mit Hilfe der Deferent-Epizykel-Konstruktion sind unter anderen Bahnbewegungen mit beliebiger elliptischer Form beschreibbar.

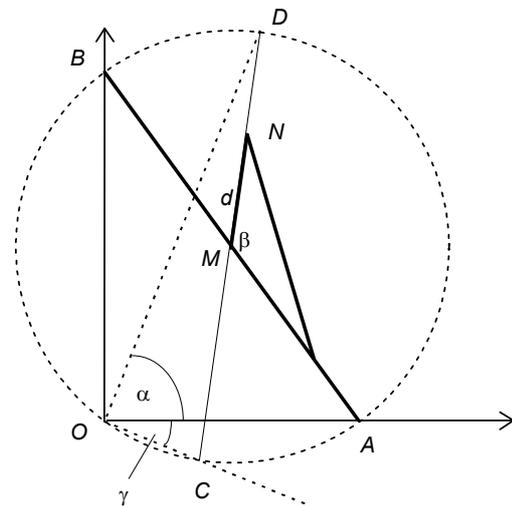
1.6 Allgemeine synthetische Lösung

Will man das eben erzielte Resultat geometrisch verstehen, so empfiehlt sich ein synthetischer Nachweis. Die folgende Überlegung verdanke ich den Kollegen Wolfgang Kroll (Marburg) und Gunter Stein (Darmstadt):



Da der Exzenter MN starr mit der rutschenden Leiter verbunden ist, kann man das Problem auch symmetrisieren, indem man den Exzenter auf Leiterlänge bringt, wodurch ein zu $\bar{M}(\alpha)$ symmetrisches Kreuz entsteht. Statt einer Leiter mit Exzenter wird nun das starre Streckenkreuz $AB \cup CD$ gedreht. Man vermutet, daß auch der zweite Balken CD an einer eigenen „Hilfshauswand“ rutscht, nämlich an OD , und auf einem dazu in O senkrechten „Hilfsboden“.

Tatsächlich läßt sich das leicht verifizieren: Mit der Leiter verrutscht zwar der Kreis zum Durchmesser AB , er geht aber wegen des Thalesatzes stets durch O . Der Winkel $\angle COD = \alpha + \gamma$ über dem Durchmesser CD bleibt aus demselben Grund ein Rechter. Da α als Umfangswinkel über AD stets die Hälfte des konstanten Stellungswinkels β ausmacht, bleibt der Rechte $\angle COD$ ortsfest und um $\gamma = -(90^\circ - \frac{\beta}{2})$ gegen die x -Achse gedreht..



Der verlängerte Exzenter $CMND$ rutscht auf diesem festen rechten Winkel, wenn sich A verlagert. N durchläuft folglich eine Ursprungsellipse, deren Achsen auf dem rechten Win-

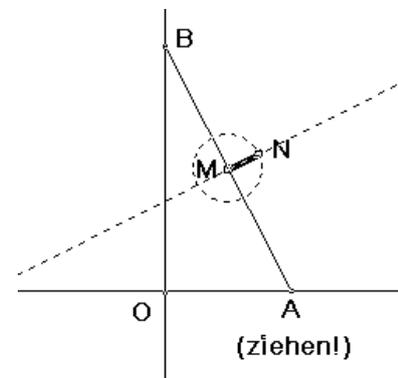
kel COD liegen und die Längen $(\frac{l}{2} \pm d)$ haben (Papierstreifenkonstruktion!). Der Winkel COD liegt gegenüber dem Ausgangskordinatensystem um $\gamma = -(90^\circ - \frac{1}{2}\beta)$ gedreht und kann durch den Winkel β zwischen Leiter und Exzenter beliebig vorgegeben werden. Ebenso können die Längen der Ellipsenachsen durch Wahl der Leiterlänge l bzw. der Exzenterlänge $d = MN$ beliebig gewählt werden. Damit ist das Resultat von 1.5 bestätigt:

Durch geeignete Wahl der Maße in der Leiteraufgabe kann jede Ursprungsellipse als Bahn der „Nasenspitze“ N gewonnen werden.

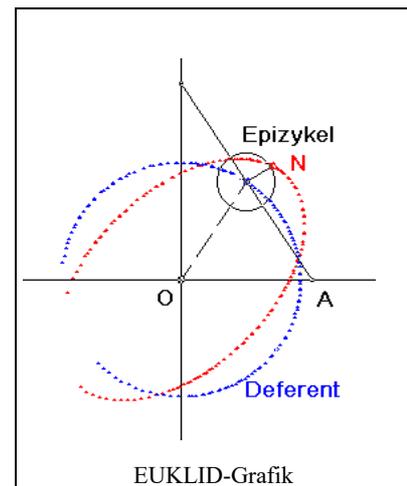
2. Variationen auf dem Computer

Nachdem verschiedene analytische Darstellungen der Bahnkurve von N hergeleitet wurden, kann man die Bewegung der Leiter mit verschiedenen Exzentern leicht programmieren und grafisch verfolgen. Hat man noch keine analytische Darstellung zur Verfügung, dann hilft ein Geometrieprogramm, das ähnlich CABRI GÉOMÈTRE oder THALES über einen Zugmodus, Ortskurvenaufzeichnung und die Eingabe fester Längen und Winkel verfügt (vgl. die Beschreibungen in Henn). Für das WINDOWS-Programm EUKLID¹, das auch mitgeführte Beschriftungen erlaubt, reichen etwa die folgenden Konstruktionsschritte:

- Zeichne ein Achsenkreuz AOB !
- Binde die Enden einer Strecke AB der Länge l an je eine der Achsen! (A und B können später „gezogen“ werden.)
- Markiere den Mittelpunkt M auf AB !
- Trage den Winkel BMN an, und bestimme N auf dem freien Schenkel als Schnitt mit dem d -Kreis um M !



- Beschrifte die Zeichnungselemente nach Wunsch (doppelt anklicken!), und „verstecke“ die Hilfslinien!
- Durch „Ziehen“ an A oder B kann die Leiterbewegung (auch durch Wand und Boden hindurch) verfolgt werden.
- Löscht man die voreingestellte Option „Ortslinien löschen“ unter „Verschiedenes-Einstellungen-Objektdarstellung“, dann können die Ortskurven von M und N bei Ziehen an A oder B gleichzeitig (und vollständig) aufgezeichnet werden. Besonders eindrucksvoll wirkt das, wenn man die Punkte M und N sowie den Exzenter MN zuvor (durch Doppelklicken) eingefärbt hat.



¹ Das sehr empfehlenswerte ShareWare-Programm ist bei R. Mechling, Fuchshaldeweg 24a, 77654 Offenburg (FAX 0781-43268) erhältlich.

In 1.5 konnte man an der allgemeinen vektoriellen Darstellung für $\vec{N}(\alpha)$ sehen, daß geeignete Deferenten und Epizykel bei *gegenläufiger, aber gleichgroßer* Umlaufgeschwindigkeit beliebige Ursprungsellipsen erzeugen. Moduliert man das Epizykelargument von $\beta_0 - \alpha$ zu $h(\alpha)$, so erhält man eine

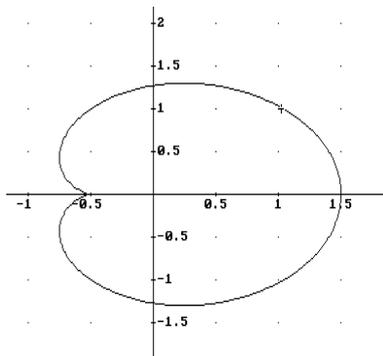
allgemeine (einfache und ebene) Epizykel- oder Trochoidenbewegung:

$$\vec{N}(\alpha) = r_D \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} + r_E \cdot \begin{pmatrix} \cos h(\alpha) \\ \sin h(\alpha) \end{pmatrix} = r_D \cdot e^{i\alpha} + r_E \cdot e^{ih(\alpha)}. \quad 2$$

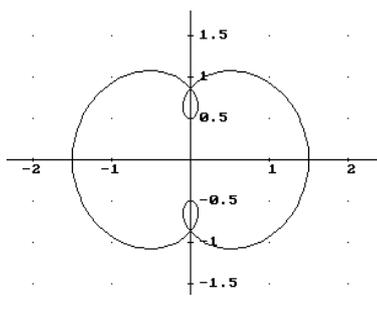
Für $h(\alpha) := \beta_0 \pm \alpha$ ergibt sich die Drehstreckung einer Kreis- bzw. elliptischen Bewegung. Im Spezialfall $r_D = r_E$ wird eine Strecke harmonisch oszillierend durchlaufen. Die Phasenverschiebung um β_0 bewirkt auch im allgemeinen Fall lediglich eine Drehung, weil

$$\vec{N}(\alpha) = r_D \cdot e^{i\alpha} + r_E \cdot e^{i(h(\alpha) + \beta_0)} = r_D \cdot e^{i\beta_0} \cdot \left(e^{i(\alpha - \beta_0)} + \frac{r_E}{r_D} \cdot e^{ih(\alpha)} \right). \quad 3$$

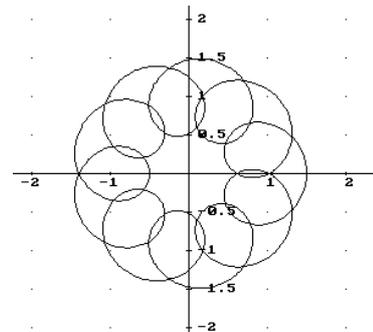
Für einen Überblick über den Gestaltreichtum der so erzeugbaren Bahnkurven kann man demnach die globale Bahndrehung ausklammern und den Term in der letzten Klammer für $\beta_0 = 0$ und $r := \frac{r_E}{r_D}$ studieren. Die folgenden Grafiken sind demgemäß mit DERIVE gezeichnet:



$$r := 0,5 \quad h(t) := 2t$$



$$r := 0,5 \quad h(t) := 3t$$



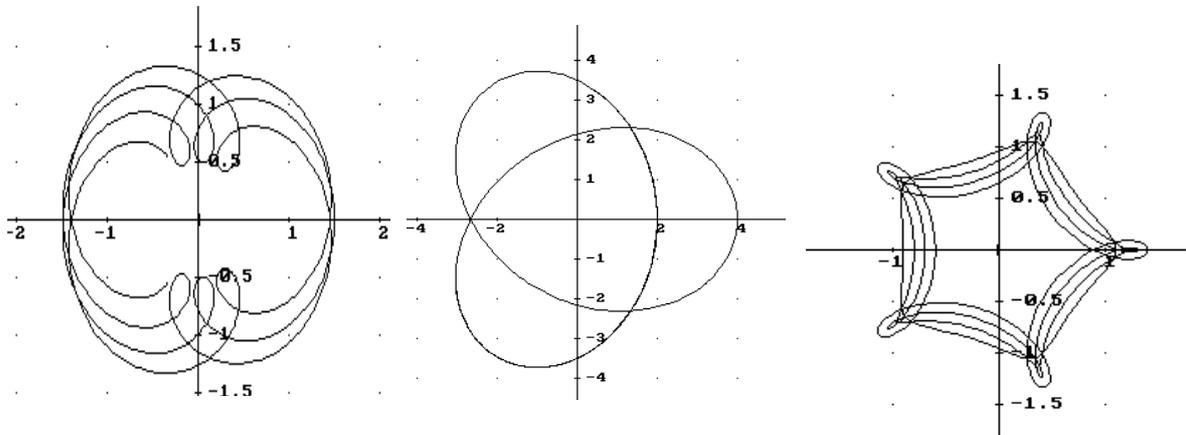
$$r := 0,5 \quad h(t) := 10t$$

² Es ist offensichtlich, wie man zusätzliche „höhere“ Epizykel anhängen kann. Man gelangt dann zu sogenannten „Planetenbewegungen n-ter Stufe“ auf „Radlinien n-ter Stufe“, die - im Fall konstanter Winkelgeschwindigkeiten - in komplexer Form

$$\vec{N}(\alpha) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot e^{ib_k \alpha}$$

mit komplexen Koeffizienten a_k und reellen b_k lauten. Sie kommen natürlich bei Zahnradgetrieben, bei Drehgelenken für Robotersteuerungen und als ebene Projektionen von Planetenbahnen vor. Neuerdings werden sie auch im geometrischen Modellieren eingesetzt. (Vgl. O. Giering/J. Hoschek, S. 153ff., und S. Abramowski/H. Müller)

³ Die komplexe Darstellung lohnt sich, wenn man es nur mit komplanaren Drehungen zu tun hat und die Additionstheoreme vergessen möchte.

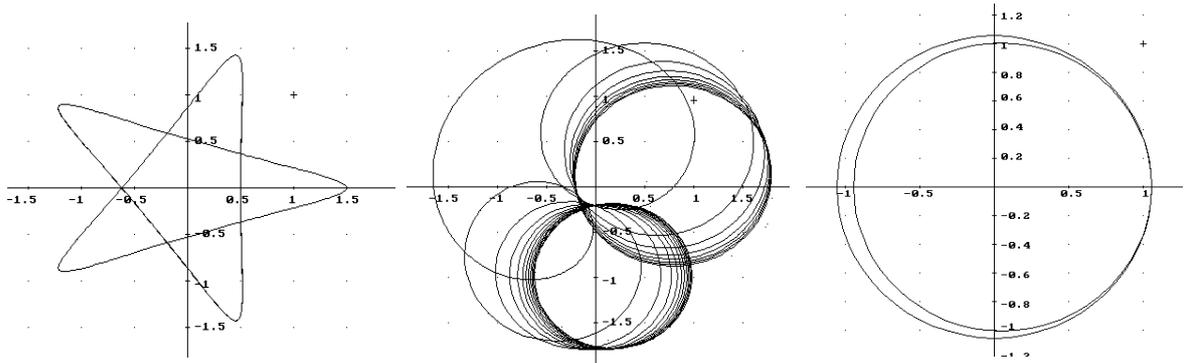


$$r := 0,5 \quad h(t) := \pi t \quad (t = -10 \dots +10)$$

$$r := 3 \quad h(t) := -2t$$

$$r := 0,05 \dots 0,2 \quad h(t) := -4t$$

Es lohnt sich, hier selbst einige Versuche auf dem Rechner zu machen, um ein „Gefühl“ für die Wirkungsweise der Parameter zu bekommen. (Eine systematischere Übersicht zu den „Radlinien“ findet man bei Schupp/Dabrock, S. 67f.; variiert man nicht nur die Frequenzen, sondern auch die Epizykelradien, so erhält man natürlich zusätzliche Spiraleffekte - das sei als Anregung dem Leser überlassen.)



Ein Pentagramm:

$$r := 0,5 \quad h(t) := -1,5t$$

$$r := 0,8 \quad h(t) := \frac{8}{5-t}$$

$$\text{mit } -50 < t < 50$$

$$r := 0,055 \quad h(t) := t \text{ und}$$

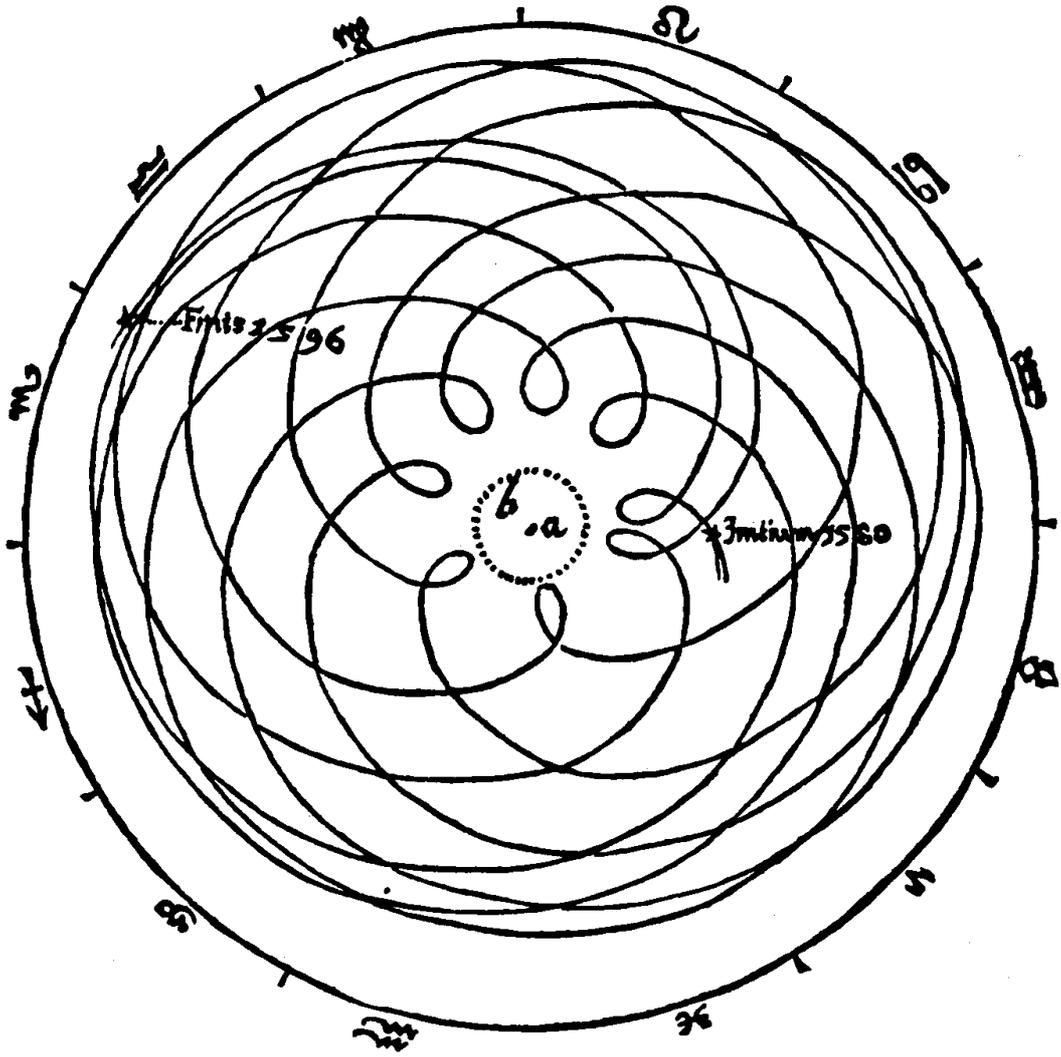
$$r := 0,055 \quad h(t) := 2t$$

Die vorletzte Abbildung zeigt, wie die Bahnbewegung von einer (Fast-) Kreisbewegung in eine andere überführt wird ($-50 \leq t \leq +50$).

Die letzte Abbildung ist historisch interessant, da sie eine Möglichkeit andeutet, die ungleichmäßige Sonnenbewegung geozentrisch zu beschreiben: Der umgebende 1,055-Kreis ist zu einem Gebilde deformiert, das zur x-Achse symmetrisch zwischen $x = -0,945$ (für $t = \pi$) und $x = +1,055$ (für $t = 0$) liegt und wie eine Ellipse aussieht. Leider stimmt das nicht genau, denn die größte Ordinate wird nicht für $x = 0,055$ (d.h. $t = 1,462$) angenommen, sondern für $x = 0,054$ (d.h. $t = 1,463$). Gegenüber der x-Achsen-symmetrischen Ellipse durch $\bar{N}(0)$, $\bar{N}(1,462)$ und $\bar{N}(\pi)$ beträgt die Differenz der maximalen Ordinaten allerdings weniger als 10^{-6} - das ist in der Zeichnung kein bemerkbarer Unterschied. Es handelt sich also mit großer Genauigkeit um eine aus dem Ursprung nach rechts verschobene (fast) elliptische Bahnbewegung, wobei die y-Achse zu den Zeiten $\pi \mp 1,625 = 180^\circ \mp 93,1^\circ$ gekreuzt wird. Der Bahnpunkt hält sich also erstaunlicherweise links der y-Achse länger auf als rechts. Stellt man sich den irdischen Beobachter im Ursprung vor und deutet man $(-0,945;0)$ als Frühlingsäquinoktium, $(0;-...)$ als Sommersolstitium bzw. $(1,055;0)$ als Herbstäquinoktium, dann erhält man für den 3. Quadranten („Frühling“) 94,5 Tage und für den 4. („Sommer“) 88,1 Tage. Das entspricht zwar nicht ganz den tatsächlichen Werten für den Jahreslauf der Sonne, liegt aber in der Tendenz richtig, denn schon im 2. vorchristlichen Jahrhundert hatte Hipparchos von Nikaia die Werte 94,5 bzw. 92,5 gefunden. Nach Hipparch ist das Verhältnis zwischen Sommer- und Winterhalbjahr 187:178, bei unser Bahnbewegung 189:176. Stellt sich der Beobachter nach $(0,055;0)$, so wird das Verhältnis der beiden Jahreszeiten 97,6:85,0. Stellt er sich dagegen in den „Ausgleichspunkt“ $(-0,055;0)$, so erscheinen alle Jahreszeiten gleichlang!

Das folgende Titelblatt der „Astronomia Nova“ (1609) von Johannes Kepler zeigt die Marsbahn für die Zeit von 1580 bis 1596:

DE MOTIB. STELLÆ MARTIS



3. Anfänge der geometrischen Astronomie

Vorbemerkung

Klaudios Ptolemaios' Epizykelmodelle der „sieben“ Planetenbahnen aus dem 2. Jh. n. Chr. haben bekanntlich bis zu Kopernikus und Kepler die Astronomie für eineinhalb Jahrtausende beherrscht und einen Großteil des heutigen Vokabulars der mathematischen Geographie, Astronomie und Nautik gestiftet. Nach obigen Experimenten lag es für mich nahe, Ptolemaios' Anleitungen zur Bestimmung beliebiger Planetenpositionen einmal in moderner Funktionsschreibweise als Exzenter- und Epizykelbahnen wiederzugeben. Mit Hilfe von Olaf Pedersens ausgezeichnetem „Survey of the Almagest“ war das auch keine allzu schwierige Aufgabe. Es zeigte sich aber bald, daß die abschließenden Formeln - für sich allein genommen - ein nicht nur ahistorisches, sondern auch sachlich völlig schiefes Bild ergeben hätten. Tatsächlich ist die Genesis der von Ptolemaios überlieferten Planetenmodelle nach neueren Forschungen viel mehr als eine historische Reminiszenz: Sie legt die vielleicht wichtigste Quelle mathematischer Theoriebildung frei.

Die Entstehungsgeschichte dieser Modelle reicht weit in die voreuklidische Zeit zurück - bei den Griechen bis an die Wiege der wissenschaftlichen Geometrie bei Thales und Anaximandros im 6. vorchristlichen Jahrhundert⁴ - und macht deutlich, daß Euklids „Elemente“ und Apollonios' Kegelschnittlehre sehr wahrscheinlich nicht (nur) aus dem Geiste Reiner Mathematik geboren waren. Ohne die fundamentale Abstraktion einer Sonne vor dem tagsüber lediglich überstrahlten Sternenhimmel wären alle kontinuierlichen Positionsbestimmungen hoffnungslos gewesen; und diese Abstraktion zwang von vornherein zu geometrischer Argumentation über das rein Anschauliche hinaus. Die natürlichen Erkenntnisinteressen der frühen Astronomie drängen Grundgedanken der euklidischen Geometrie,

⁴ In den letzten Jahrzehnten ist das traditionelle Bild von der Originalität der griechischen Astronomie erheblich ins Wanken geraten. Die griechischen Astronomen von Thales und Anaximandros bis Hipparchos und Ptolemaios haben zweifellos nicht nur viele Bezeichnungen und genaue Beobachtungsdaten von den babylonischen Priester-Astronomen des ersten Jahrtausends entlehnt, sondern auch erhebliche Bausteine ihrer Theorien, die nach neuerer Erkenntnis bis ins dritte Jahrtausend zurückreichen. In welchem Umfang die sumerischen, akkadischen und babylonischen „Chaldäer“ auch *geometrische* Himmelsmodelle verwendeten, ist noch unbekannt. Daß es solche Modelle, wie etwa das „Gnomon-Weltbild“ und das heliozentrische Modell, gegeben haben muß, ist dagegen kaum noch zweifelhaft (van der Waerden 1980, S. 134; Papke, S. 237ff.). Auf jeden Fall kann aber gesagt werden, daß die Herausbildung der geometrischen

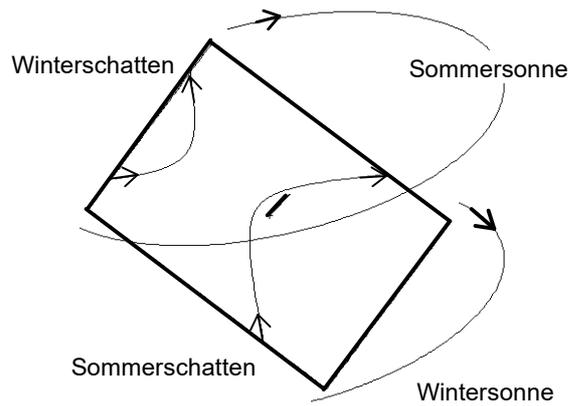
Trigonometrie und Raumgeometrie geradezu auf. Die Frühgeschichte der Astronomie kann darum zugleich auch als Vorgeschichte der Elementargeometrie und sogar der Analysis gelesen werden.

Um das zu belegen, soll zunächst die Entstehung des geozentrischen Exzenter-Modells der Sonnenbewegung ausführlicher geschildert werden. Weil die Zeitrechnung sich am Sonnenlauf orientiert und die Sonne nach altem astrologischen Glauben den größten Einfluß auf die Menschen ausübt, wurde sie auch bei Ptolemaios zuerst behandelt und als kinematischer Parameter der weiteren Planetenbewegungen benutzt. (Aus heliozentrischer Sicht sprechen natürlich auch dynamische Gründe dafür.)

3.1 Die Sonnenbahn aus geozentrischer Sicht

Verfolgt man den Sonnenschatten eines Baumes, Berges oder Gebäudes in der („Horizont“-) Ebene, so fällt jedem auf, daß er täglich gegen Mittag am kürzesten wird, nach Norden zeigt und ansonsten eine ziemlich symmetrische Kurve hinterläßt. Da die Sonne zur Winterszeit im Südosten aufgeht und im Südwesten unter, streichen die Randstrahlen sehr flach über den Schattenzeiger, und die Schatten werden dementsprechend lang. Im Sommer macht die Sonne dagegen einen großen Bogen von Nordosten über den Südhimmel zum Nordwesthorizont. Dann sind die Schatten am Vor- und Nachmittag vergleichsweise kurz. Nach (etwa) einem Jahr tritt der kürzeste Schatten wieder mittags auf. Schaut man aus dem Weltraum schräg auf den Äquator, dann zeigt sich für eine Horizontebene auf 50° nördlicher Breite das folgende Bild:

Modelle bei den Griechen viel besser überliefert ist und daß diese Überlieferung die weitere morgen- und abendländische Entwicklung der Astronomie bestimmt hat.



Dabei ist sich der irdische Schattenbetrachter natürlich keiner Schräglage seines Horizonts bewußt, und die Sonnenbahnen sind sehr viel größer zu denken. Im Bild sind Sonnen- und Schattenbahnen an den Tagen der Sommer- und Wintersonnenwende gezeichnet; an allen anderen Tagen verlaufen die entsprechenden Bahnen zwischen diesen Kurven.

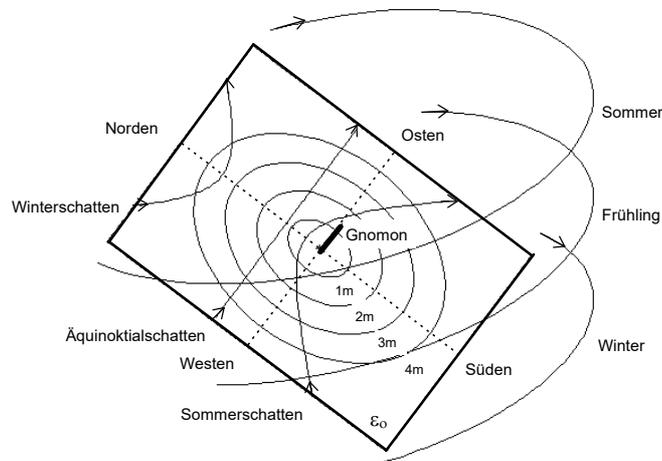
Die Nordrichtung hat man nun gerade so festgelegt, daß dorthin alle kürzesten Tagesschatten weisen.⁵ Man bekommt diese Richtung recht genau heraus, wenn man um einen möglichst hohen „Gnomon“, d.h. lotrechten Pfahl, Stab oder Obelisken, konzentrische Kreise zeichnet.⁶ Die Ost-West-Richtung ist dann die Verbindung entsprechender Kreisschnittpunkte einer jeden Tagesschattenkurve.⁷ Auf diese Weise liegt nun auch die Mittagslinie,

⁵ Im folgenden behandeln wir die Verhältnisse immer für einen Betrachter nördlich des 25. Breitengrades. Dort lag für antike Vorstellungen im wesentlichen die Oikumene, d.h. die bewohnte Welt. Aus geozentrischer Sicht ist die Nordrichtung durch den „oberen“ Himmelspol definiert, um den sich die Fixsternsphäre dreht. Da die Sonne - wie im folgenden näher erläutert - täglich knapp 1° hinter der Firmamentdrehung zurückbleibt, ist die tägliche Schattenkurve (als Projektion der Firmamentdrehung über die Gnomonspitze) nicht ganz symmetrisch, und die Mittagsschatten weisen nur im Rahmen der Beobachtungsgenauigkeit „genau“ in Nordrichtung. (Wesentlich stärker ist die Abweichung wenn man die - jährlich und regional gemittelte - Uhrzeit „12 Uhr MEZ“ abliest, um dann die Nordrichtung am Schatten zu erkennen.)

⁶ Nach Papke (S. 266) wird dieses Verfahren im altindischen Katyayana-Sulbasutra ausdrücklich erwähnt.

⁷ Die ältesten überlieferten Beobachtungen von Solstitien und Äquinoktien stammen wohl aus sumerischer Zeit und sind vermutlich auf Gnomon-Beobachtungen zurückzuführen. Auf der zweiten Tafel der babylonischen MUL.APIN-Serie, von der eine datierte Kopie aus dem Jahr 687 v. Chr. existiert und deren Beobachtungsdaten sich nach Papke auf das Jahr 2340 v. Chr. beziehen, findet sich eine Gnomon-Tabelle (van der Waerden 1988, S. 4, und 1980, S. 64ff.; Papke, S. 246f.). Um 1100 v. Chr. soll Tscheou-Kong in China als erster den Schattengang eines Gnomons beobachtet haben, um den Mittag, die Sonnenwenden und die Schiefe der Ekliptik zu finden (Lübke, S. 20). Pherekydes, der Lehrer des Pythagoras (6. Jh. v. Chr.), soll einen großen Sonnenwend-Zeiger, ein „Heliotropion“, auf der Insel Syros aufgestellt haben; und in Theben, vor Syrakus und später in Rom gab es solche Obelisken (Szabó/Maula, S. 39; Szabó 1992, S. 75, 279). Um die Schattenzeichnung zu verbessern, waren die hohen Säulen oben angespitzt, poliert und veredelt (Lübke, S. 12f.). Später brachte man dort auch eine Kugel oder einen engen Ring als Blende an (Szabó 1992, S. 283; Szabó/Maula, S. 41; Lübke, S. 14, gibt an, die Ringblende sei in China um 500 v. Chr. eingeführt worden). Herrmann (S. 11f.) behauptet, eine Sonnenöffnung, die man 1468 in der Süd-

der „Meridian“, die Nord-Süd-Richtung, fest, nämlich als Senkrechte zur Ost-West-Linie im Gnomonfußpunkt.⁸



Zweimal im Jahr, irgendwann, „in der Mitte“ zwischen den Sonnenwendtagen müssen Tag und Nacht gleich lang sein. Die Beobachtung zeigt, daß in dieser Zeit die Schattenbahnen genau west-östlich und gerade verlaufen, aber wohl nicht „in der Mitte“. Die Sonne geht dann genau im Osten auf und genau im Westen unter. Prinzipiell kann man so die „Äquinoktien“ bestimmen, man braucht ja nur auf den Tag im Frühling oder Herbst zu warten, an dem die Sonne genau im Osten auf- oder genau im Westen untergeht. Die präzisere Datierung der Äquinoktien, d.h. des „Frühlings-“ und des „Herbstanfangs“, scheint zunächst nur von akademischem Interesse zu sein, wir werden aber bald sehen, daß sie den Schlüssel zum Verständnis der Himmelsbewegungen liefert. Leider hat der naheliegendste Beobachtungsansatz einen unerfreulichen Haken: Die Strahlenbrechung täuscht bei horizontnahen Beobachtungen eine Sonne über dem Horizont vor, die in Wirklichkeit darunter steht, und der Verschiebungseffekt ist stark von Luftdruck, Luftfeuchtigkeit und Temperatur (in der

wand der Kathedrale von Florenz 90m hoch angebracht hat, erlaube es, den Mittagdurchgang der Sonne auf dem Fußboden bis auf eine halbe Zeitsekunde genau zu beobachten.

⁸ Daß die Erde kugelrund und im Vergleich zur Sonnenentfernung sehr klein ist, war in der Antike völlig klar (z.B. Platon's „Phaidon“; vgl. van der Waerden 1988, S.52f.). Aristoteles verwies z.B. auf die merkbare Himmelsverschiebung bei Ortsveränderungen auf der Erde, und Ptolemaios auf die örtlich invarianten Größen und relativen Abstände der Sterne sowie auf die überall gültige Halbierung der Sternkugel durch den Horizont (Szabó 1992, S. 67f.). Aristarchos von Samos hat im frühen 3. vorchristlichen Jahrhundert sogar eine konkrete Abstandsschätzung durchgeführt (z.B. van der Waerden 1988; Archimedes, S. 349f.). Für eine Zylinder- (Anaximander) oder Kugelform der Erde sprach in Nord-Süd-Richtung auch die Änderung der Mittagsschattenlänge. Die Ost-West-Veränderung der Himmelserscheinungen über dem Horizont macht sich zeitlich und örtlich für das bloße Auge erst bei Entfernungen über 400 Stadien (ca. 70 km) bemerkbar - daher auch die bis ins 17. Jh. anhaltenden Schwierigkeiten bei der Bestimmung der geo-

Horizontgegend!?) abhängig.⁹

Vermutlich ist das der Grund, warum die Hipparchos und Ptolemaios zugänglichen Beobachtungen der älteren vorgriechischen Kulturen des Orients, auf die sich die frühe griechische Astronomie sonst so erfolgreich stützen konnte, für die Äquinoktien besonders ungenau waren. Ptolemaios klagt im „Almagest“, die verfügbaren langfristigen Beobachtungsdaten (der Babylonier) bezögen sich fast nur auf Stillstände der Planeten und erste oder letzte Sichtbarkeiten; bei den Stillständen sei der örtliche Fortschritt über Tage unmerklich¹⁰, und bei den heliakischen Auf- oder Untergängen sei wegen des Zustands der Atmosphäre und wegen der Abhängigkeit von der Sehkraft des Beobachters alles ganz unsicher. Damit ist das naheliegendste „Präzisionsinstrument“ der Sternbeobachtung mit bloßem Auge, nämlich Gestirnspositionen über eine sehr entfernte Visiermarke, etwa einen natürlichen Einschnitt in einer Hügelkette, zu beobachten und die seitlichen Verschiebungen festzuhalten, auf Wiederkehrbeobachtungen unter gleichen Witterungsbedingungen beschränkt.¹¹ Immerhin haben derartige Beobachtungen wohl bei den Babyloniern in der ersten vorchristlichen Jahrtausendhälfte und spätestens beim Griechen Euktemon im 5. Jh. v. Chr. zu der später zentralen Entdeckung geführt, daß die vier Jahreszeiten unterschiedlich

graphischen Länge (Szabó 1992, S. 250).

⁹ Der Refraktionskoeffizient kann um mehrere zehn Prozent schwanken (Großmann, S. 25) und wirkt sich leider in Horizontnähe besonders verfälschend aus. Dies kann zur Folge haben, daß die Sonne geometrisch schon unter dem Horizont steht, wenn sie ihn scheinbar nur berührt. Bei 0°C und Normaldruck ist die wahre Zenitdistanz bei beobachteten 10° um 0°;11 größer, bei 45° um 0°;1, bei 85° um 0°;10 und bei 90° um 0°;35 (Voigt, S. 13; die Schreibweise „0°;11“ für Sexagesimalbrüche hat sich in der historischen Fachliteratur nach einem Vorschlag von O. Neugebauer eingebürgert). Der Sonnendurchmesser wirkt außerdem in Horizontnähe - abgesehen von der bekannten Horizonttäuschung - aufgrund der Refraktion um ca. 14% vergrößert. Die Refraktionseffekte beeinträchtigen auch die Beobachtung und Festlegung der Tag- und Nachtgleichen sowie die Symmetrie des Tag-Nacht-Verhältnisses im Sommer bzw. Winter. Tatsächlich ist der kürzeste Tag etwas länger als die kürzeste Nacht (Szabó 1992, S. 239f.). Der Erdschatten wird durch die doppelte Brechung der Randstrahlen beim Durchgang durch die Erdatmosphäre (insges. ca. 1°) erheblich verkürzt. Das verfälschte natürlich die Mondabstandsbestimmung aus einer Mondfinsternis, wie sie von Aristarchos überliefert ist (z.B. van der Waerden 1988, S. 133 ff.).

¹⁰ Man vergleiche mit dem Verhalten von Funktionen in der Nähe der Extrema.

¹¹ Die Chaldäer (Priester-Astronomen im Zweistromland) und Ägypter haben im dritten und zweiten vorchristlichen Jahrhundert vorzugsweise Morgenerstauflänge beobachtet (van der Waerden 1980, S. 12ff.; Papke, S. 25). A. Thom/A.S. Thom konnten mehrere km lange Visierlinien für horizontnahe Sonnen- und Sternbeobachtungen bei Megalithanlagen nachweisen (frühes 2. Jtsd. vor Chr.; Krupp, S. 45; Lübke, S. 14 u. 30), und es spricht viel dafür, daß einige der Großbauten Mittelamerikas ebenfalls dazu dienten (Krupp, S. 169ff.; Schele/Freidel). Schließlich sei auch daran erinnert, daß drei der etwa 230m langen Grundseiten der Cheops-Pyramide auf weniger als 2,5 Bogenminuten genau nach den Himmelsrichtungen ausgerichtet sind und daß lediglich die Ostseite um 5,5 Bogenminuten von Nord nach West abdriftet (Krupp, S. 230f.), was großräumige und langfristige Präzisionsbeobachtungen voraussetzt.

lang sind (van der Waerden 1988, S. 85)¹².

Der wandernde Gnomonschatten wird jedenfalls weniger durch Refraktionseffekte verzerrt.¹³ Wie kann man mit ihm den äquinoktialen Mittagsschatten genauer bestimmen? Die Lösungsidee kam vielleicht so zustande: Die Sonne zieht am Himmel täglich einen Kreisbogen. Über das Jahr entsteht dort unmerklich (der Tagesausschnitt) eine(r) Spirale, die zwischen den Sonnenwendkreisen hin und her führt. Nennt man die Spitze des längsten Mittagsschattens bei der Wintersonnenwende W, die des kürzesten Schattens überhaupt S, so liegt die Spitze des Mittagsschattens F im Frühlings- und Herbstäquinoktium offenbar näher bei S als bei W. Peilt man nun von W, dem geschätzten F und von S über einen hohen Gnomon die Himmelskugel an, so scheint dort F' wesentlich besser „mitten“ zwischen W' und S' zu liegen. Es wäre schön, wenn man W', S' und die Mitte des Verbindungsbogens am Firmament markieren könnte. Aber das geht am hellen Tage nicht. Diese Hürde wurde möglicherweise genommen, als (oder weil) die Himmelsbögen noch aus einem anderen, viel offensichtlicheren Grunde interessant wurden: Neben der Längenänderung im Verlaufe des Tages zeigt der Gnomonschatten ja auch noch eine zur Mittagslinie symmetrische Richtungsänderung. Diese Richtungsänderung erfolgt allerdings so ungleichmäßig, daß daraus nur sehr schwer eine gute Sonnenuhr zu machen ist.¹⁴ Geht das nicht einfacher?

¹² Szabó vermutet, daß Thales das schon im 6. Jh. v. Chr. wußte (Szabó 1994, S. 27 und 31 unten, Szabó 1992, S. 295).

¹³ Die Beobachtungsgenauigkeit wird hier einerseits durch die bescheidenere Gnomonlänge, andererseits durch die Übergangsschatten, die die Sonnenscheibe erzeugt, beschränkt (vgl. Fußnote 7 oben). Meton und Euktemon sollen nach Ptolemaios (Almagest III.1) das Sommersolstitium 432 v. Chr. mit dem Gnomon auf einen Tag genau bestimmt haben. Größere Genauigkeit der Schattenablesung erzielte man mit sorgfältig gearbeiteten Metallreifen: Ist ihre Ebene auf die Sonne eingestellt, so beschattet die vordere Hälfte genau die hintere (vgl. unten, Fußnote 23). Mit Visiervorrichtungen und vielleicht auch Fadenkreuzen konnte man nach dem Prinzip von Kimme und Korn auch Sternpositionen ausmessen - das ist das bis ins 17. Jh. gebräuchliche Prinzip der Quadranten und Armillarsphären (Lübke; Teichmann; Dreier). Die Genauigkeit von Ptolemaios' Zeiten bis Kopernikus lag bei etwa 0°;10 (bei de Brahe 0°;1, heute ca. 10⁻³ Bogensekunden; Teichmann, S. 100).

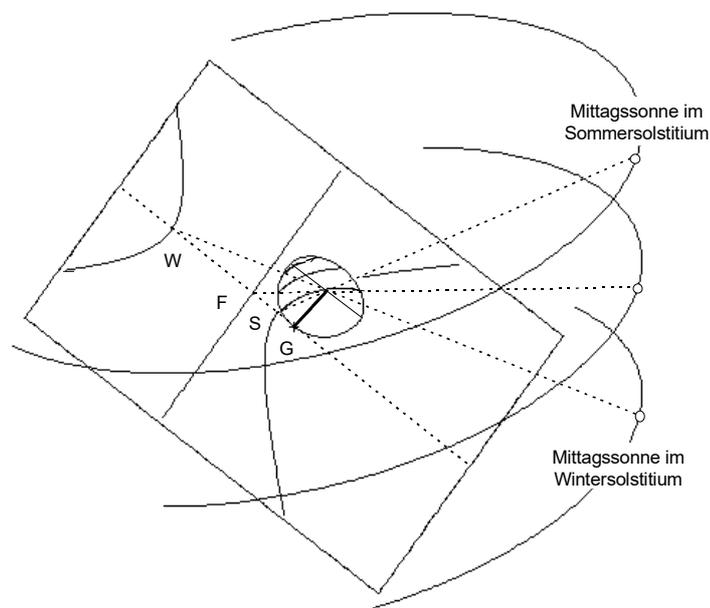
Der Sonnendurchmesser beträgt etwa $\frac{1}{2}^\circ$. (Archimedes kritisierte diesen Wert im „Sandrechner“ und ermittelte dafür unter Berücksichtigung der Pupillenöffnung ein Intervall von - in heutiger Schreibweise - 0°;27 bis 0°;32,55. Moderne Werte: 0°;31,28 bis 0°;32,37; Archimedes, S. 351ff.; Rozanskij, S. 156; Schneider, S. 92ff. Für den Mond werden heute übrigens 0°;29,24 bis 0°;33,24 angegeben; Krupp, S. 70. Ähnliche Werte für Sonne und Mond bei Pedersen, S. 208.)

¹⁴ Szabó 1992, S. 311. Im Alltag wurde bei den Griechen sowohl der Tag als auch die Nacht in zwölf gleichlange Stunden geteilt - deren tatsächliche Länge sich natürlich jeden Tag änderte. Man gebrauchte aber auch Vielfache der Schattenlänge eines Menschen als grobe Zeitmarkierung (Szabó 1992, S. 309f.; Lübke, S. 17). Gleichmäßigere Zeitmesser waren neben Sternzeiten Sand- und Wasseruhren (vgl. etwa Lübke).

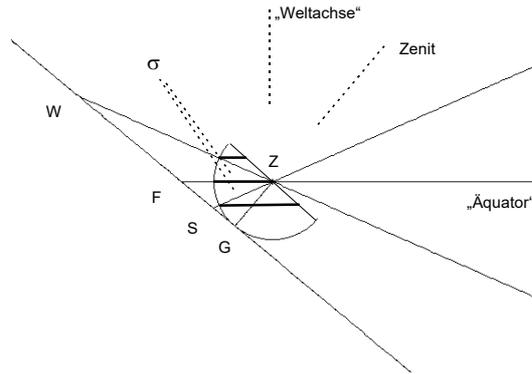
Es geht, und offenbar wußten auch das die Babylonier um 700 v. Chr. (van der Waerden 1988, S. 50):

„Der Historiker Herodot im 5. Jh. v. Chr. ist der erste, der den Gnomon der Griechen erwähnt. Er sagt nämlich - am Ende jener berühmten Stelle seines Werkes, die den Ursprung der Geometrie auf Ägypten zurückführt -, daß andererseits ‘den Polos und den Gnomon, sowie die zwölf Teile des Tages die Griechen von den Babyloniern gelernt hätten’.“ (Szabó 1992, S. 70, 305, 309ff. und die eindrucksvolle Abbildung S. 312)

Mit „Polos“ war hier sehr wahrscheinlich derselbe Schattenfänger gemeint, den Aristophanes im selben Jahrhundert als „Pnigeus“ (Glühkohlenabdecker, „Kohlensticker“) der Wissenschaftler karriert und der später bei Eratosthenes „Skaphe“, bei Vitruvius „Hemicyclum“ und bei anderen „Helitropion“ heißt (Szabó 1994, S. 50ff.; Lübke, S. 18), nämlich eine Halb- oder besser Viertelkugel um die Gnomonspitze, in der sich die täglichen Sonnenkreise (und nächtlichen Sternkreise) wirklich als Schatten-Kreisbögen abzeichnen und gleichmäßig teilen lassen.



Im Bild ist die untere Viertelsphäre um die Gnomonspitze gezeigt, die hinter der Meridianebene (Nord-Süd-Ebene durch den Gnomon) liegt. Die vorderen Enden der Schattenkurven



Es ist als stehe die Erde als winzige Öffnung einer kugeligen Lochkamera an Stelle der Gnomonspitze, und durch die Öffnung werde der Taghimmel automatisch auf die untere Kugelhälfte abgebildet.¹⁷ Wo finden sich die Bilder der übrigen 362 Sonnenkreise in der Skaphe? Natürlich parallel zwischen den Sonnenwend-Tageskreisbögen. Um welche Achse dreht die Sonne sich täglich? Natürlich um die Achse dieser Kreise. Um welche „Weltachse“ dreht sich das ganze Firmament, der Sternenhimmel? Natürlich um eben diese Achse der Sonnenkreise, senkrecht zum Himmelsäquator durch die Skaphenspitze oder Erdmitte (das macht bei den astronomischen Größenverhältnissen nichts aus). Wo finden sich die Bilder der 365 Nachtbögen der Sonne? Natürlich in der Resthälfte zur Skaphe, als an Z gespiegelte Bilder von Tagbögen. (Das zeigt, warum unsere Vermutung tatsächlich den Äquinoktialschatten liefert.) Wie lang sind Tag und Nacht zur Sommersonnenwende auf der Breite unseres Bildes? Man messe erst den Winkel $2\sigma = WZS$, dann den Winkel $FZG = SZG + \sigma$, und schließlich bestimme man die Anteile im äquatorparallelen Sonnenkreis.¹⁸ Wie findet man die geographische Breite, die „Nördlichkeit“ von G? Man nehme

¹⁷ Beim Hemicyclum des Vitruv handelt es sich um eine in der Horizontalen liegende Halbkugel mit einem vertikalen Gnomon zum Mittelpunkt. Die innere Fläche sollte das Himmelsgewölbe vorstellen und war gemäß dem scheinbaren Sonnenlauf mit drei Bögen, der Äquatorlinie und den zwei Wendekreisen, sowie mit einer Teilung in zwölf ungleiche Stunden versehen (Lübke, S. 18; zur Sonnenuhr vgl. z.B. Rixecker). In der Manitius-Übersetzung des Ptolemaios heißt es: „Als ganz besonders bezeichnend ist noch der Umstand hervorzuheben, daß die (Endpunkte der) an beliebiger Stelle der Erde aufgestellten Gnomone sowie die Mittelpunkte der Armillarsphären dieselbe Geltung haben wie der wirkliche Mittelpunkt der Erde, d.h. daß die genannten Punkte für die Richtung der Visierlinie (nach den Himmelskörpern) und für die Herumleitung der Schattenlinien in so großer Übereinstimmung mit den zur Erklärung der Himmelserscheinungen aufgestellten Hypothesen maßgebend sind, wie wenn diese Linien direkt durch den Mittelpunkt der Erde gingen.“ (Zitiert nach Szabó 1992, S. 69)

¹⁸ Hypsikles (um 180 v. Chr.): „Es werde die Breite in Alexandria in Ägypten angenommen, wo der längste Tag zum kürzesten das Verhältnis hat wie 7:5. Daß sich dies so verhält, haben wir gezeigt durch Benutzung der von der Gnomonen am Mittag der Wenden geworfenen Schatten.“ (Zitiert nach Szabó 1994, S. 65) Hipparchos (um 150 v. Chr.): „In den Gegenden von Griechenland steht der Schattenzeiger zum Mittagsschatten der Tag- und Nachtgleichen in dem Verhältnis von 4:3 ... und die Polhöhe beträgt etwa 37°.“

den letztgenannten Winkel FZG oder seinen Scheitelwinkel in der Vollkugel, der die „Zenitdistanz“ zwischen Gnomon und Weltachse zu 90° ergänzt, oder den Winkel zwischen Horizont und Weltachse...¹⁹

Kurz: Die Äquinoktien zu finden ist deswegen so wichtig, weil die Sonnenbahn an diesen Tagen parallel zum Erdäquator läuft („Knoten der Ekliptik“, s.u.) und damit die Erde vermessen werden kann. *Um diese Bahnachse dreht sich täglich der ganze Himmel einmal, und die Sonne nimmt an dieser Drehung teil!* Kennt man σ aus dem Schattenwinkel 2σ zwischen den Sonnenwenden, dann reicht es, die geographische Breite zu messen, und da der Polarstern immer noch nahe bei der „Weltachse“ steht, findet man den Breitenwinkel einfach als Winkel zwischen Polarstern und Horizont (oder sicherer: als Ergänzung der Zenitdistanz zu 90°).

Im Prinzip war das alles spätestens dem berühmten Weltreisenden Pytheas von Massalia (Marseille) in der zweiten Hälfte des 4. Jhs. v. Chr. klar, denn von ihm ist überliefert, daß er den Himmelspol vom Polarstern unterscheiden konnte und daß er die Beziehung des erstaunlich genauen Verhältnisses $120:(42-\frac{1}{5})$ zwischen Gnomonlänge und kürzestem Schatten einerseits und der geographischen Breite von Marseille andererseits kannte. Zur gleichen Zeit wußte Eudoxos, daß in Griechenland der Sommerwendekreis vom Horizont im Verhältnis 5:3 geteilt wird. Wenn Pytheas und Eudoxos den Zusammenhang auch rechnen konnten, dann liegen die Anfänge der Trigonometrie so weit zurück! (Szabó 1994, S.

(ebenda, S. 75) „Wo aber der längste Tag zum kürzesten im Verhältnis von 5:3 steht, dort hat der längste Tag die Dauer von 15 Stunden, während die Polhöhe ungefähr 41° beträgt.“ (Szabó 1992, S. 151) Pytheas (2. Hälfte des 4. Jh. v. Chr.) gab das Verhältnis für die Sommersonnenwende in Marseille mit $120:(42-\frac{1}{5})$ an und schloß daraus auf die (richtige) geographische Breite (Szabó 1994, S. 78ff.). Für Rom gab Vitruvius das äquinoktiale Verhältnis des Gnomons mit 9:8 an, für Athen mit 4:3, für Rhodos mit 7:5 und für Alexandria mit 5:3 (ebenda, S. 74). Eudoxos (408-350 v. Chr.) hat für Griechenland vermutlich aus dem Teilverhältnis der Sehne am Tag der Sommerwende auf das Verhältnis von Tag- zu Nachtbogen an diesem Tag geschlossen (ebenda, S. 85). Versucht man - und dies sei dem Leser herzlich empfohlen -, ein oder zwei dieser Beziehungen nachzurechnen, so wird deutlich, daß trigonometrische Schlußweisen in voreuklidischer Zeit schon beherrscht werden mußten.

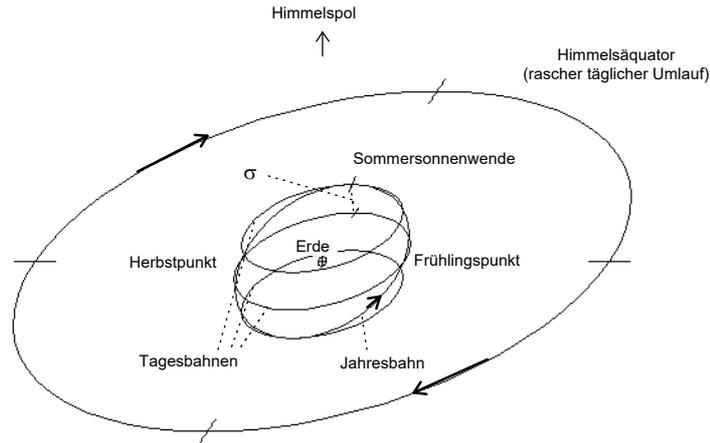
¹⁹ Die Mittagsschattenlängen sind natürlich außer von der Gnomonhöhe auch noch von der geographischen Breite abhängig. Aber das „Gnomon-Weltbild“ (Szabó) zeigt, daß und warum 2σ ortsunabhängig ist. Die äquinoktiale Mittagsschattenspitze F liegt als Projektion der Bogenmitte auf dem Horizont tatsächlich in einem gewissen Sinne „in der Mitte“ zwischen den extremalen Mittagsschattenspitzen W und S. Da man ursprünglich in Verhältnissen „Gnomonlänge : Mittagsschattenlänge“ maß, hatte man gute Gründe, die Verhältnisse von Sehnen- und Tangentenabschnitten am Kreis zu studieren... Euklid III 36 läßt grüßen! (Überhaupt steht zu vermuten, daß viele Sätze Euklids aus dem Gnomonstudium der frühen Astronomie stammen; vgl. Szabó 1994, z.B. S. 83; Szabó 1992, S. 317ff.)

73ff.).²⁰ Schon Thales im 6. Jh., sagt die griechische Überlieferung, habe die Ungleichheit der Zeiten zwischen den Sonnenwenden gewußt, und Anaximandros, noch im gleichen Jahrhundert, habe mit dem Gnomon die Tag- und Nachtgleichen zeigen können und überhaupt „die geometrische Darstellung“ angeregt (Szabó 1994, S. 31, 32 und 37). Und Oinopides habe einhundert Jahre später die Schiefe σ der Sonnenbahn gegen den Himmelsäquator zu $\frac{1}{15}$ des Vollkreises, also zu 24° , bestimmt.²¹ Es war also klar, daß die Sonnenbahnen an der Himmelssphäre und ihr Gegenbild in der Gnomonkugel nicht irgendwie hin und her wackeln, sondern daß die Sonne im Laufe eines Jahres eine Kreisbahn in der Sphäre zieht, die um σ schief zum Himmelsäquator verläuft, und daß die täglichen Parallelkreise nur daher kommen, daß die Sonne mit der viel rascheren Firmamentdrehung herumgerissen wird.

Die Sonne führt also aus geozentrischer Sicht eine zweifache Kreisbewegung um die Erde aus, nämlich eine einfache jährliche Umdrehung in ihrer schiefen Bahn und eine rasche tägliche mit der Fixsternsphäre um die Himmelsachse. Da nachts im Laufe des Jahres immer neue Sternbilder am Osthimmel sichtbar werden, muß die Nacht nach Osten wandern, die langsame jährliche Sonnenwanderung folglich entgegen der täglichen verlaufen, d.h. von Westen nach Osten.

²⁰ Die Chinesen wußten wohl um 1000 v. Chr. und die Chaldäer vielleicht schon im dritten vorchristlichen Jahrhundert, spätestens aber um 700 v. Chr. bescheid (Lübke, S. 20; van der Waerden 1988, S. 50; Papke, S. 261f.). Das oben erwähnte Herodot-Zitat deutet ja auch in diese Richtung.

²¹ Nach dem Zeugnis von Proklos war genau das der Grund, warum Euklid IV.16 die Konstruktion des regulären Fünfecks behandelt (Szabó 1994, S. 38). Aetios bestreitet Oinopides die Entdeckung und schreibt sie Pythagoras zu. Tatsächlich betrug der Wert im 5. Jh. v. Chr. etwa $23,7^\circ$, war damals also schon um einen halben Sonnendurchmesser falsch. Richtig waren die 24° im dritten vorchristlichen Jahrtausend, als sie die Chaldäer fanden. Vermutlich kam dieser Wert über die Babylonier und Pythagoras auf die späteren Griechen (Papke, S. 262). Übrigens hat Oinopides vermutlich keine Skaphe benutzt, sondern mit den Schatten auf der Horizontebene gearbeitet. Das zwang aber dazu, Sehnen- und Tangentenabschnitte rechnerisch zu vergleichen, also im Prinzip Trigonometrie zu treiben (Szabó 1994, S. 61ff.).



Beobachtet man die Sonne nur ein Jahr lang, so bekommt man von einem Sommersolstitium zum nächsten je nach Beobachtungsqualität 360 oder 365 ganze Tage heraus. Langfristig bemerkt man aber, daß diese Zahl zu klein ist.²² Beobachtet man nun den tatsächlichen Sonnenstand an Solstitionen oder Äquinoktien, so läßt sich deren Wiederkehr langfristig auf Bruchteile von Tagen genau bestimmen.²³ Diese genaue Wiederkehrzeit von einem Frühlingsäquinoktium zum nächsten („aufsteigende Knoten“: Durchstoß der Sonnenmitte durch den Himmelsäquator) nennt man das (tropische) Jahr. Ptolemaios sah es als das richtige Jahr an, weil es immer in Harmonie mit den Jahreszeiten bleibe. Hipparchos von Nikaia im 2. vorchristlichen Jahrhundert, der als bedeutendster Praktiker der antiken Astronomie gilt und auf dessen ausgezeichnete Beobachtungsergebnisse Klaudios Ptolemaios dreihundert Jahre später seine „Große Zusammenfassung“ der geozentrischen Astronomie, den berühmten „Almagest“, stützte, errechnete für die Jahreslänge $365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{300}$ Tage und für den

²² Die Ägypter rechneten bis in Ptolemaios' Zeit mit einem Jahr von 365 Tagen, das ursprünglich so eingerichtet war, daß der Aufgang des Sirius (=Sothis) am Morgenhorizont als „Bringer des Neuen Jahres und der Überschwemmung“ gelten konnte. Man mußte aber nach einigen Jahren feststellen, daß die beiden Phänomene deutlich auseinander liefen. (van der Waerden 1988, S. 1ff.) Zu den Bemühungen der Griechen um die genaue Jahreslänge und deren Zusammenhang mit Hipparchs Entdeckung der Präzession vgl. Szabó 1992, S. 266 oben und 300ff.

²³ Die Äquinoktien lassen sich beobachten, wenn man die Schiefe der Ekliptik und die geographische Breite des Beobachtungsortes kennt: Ptolemaios beobachtete einen Bronzering von 2 Ellen Durchmesser, der parallel zum Himmelsäquator aufgestellt war. Wurde die Rückseite erst- oder letztmals im Jahr genau beschattet, so hatte er die Stunde des Äquinoktiums (Pedersen, S. 131; van der Waerden 1988, S. 260). Ebenso verfuhr Hipparch 300 Jahre zuvor (van der Waerden 1988, S. 176). Natürlich setzte das Interpolation, d.h. die Überzeugung stetiger Veränderung zwischen den Beobachtungszeiten, voraus. Pedersen weist mit Recht darauf hin, daß im „Almagest“ nicht allein ebene und sphärische Trigonometrie mit großer Meisterschaft betrieben wird, sondern daß an vielen Stellen echtes funktionales Denken für zeitliche Abhängigkeiten ein- und mehrdimensionaler Variabler notwendig war. (Vgl. dort insbes. S. 78-93)

Frühling $94\frac{1}{2}$, für den Sommer $92\frac{1}{2}$ Tage.²⁴ Aus diesen Daten und aus der Schiefe der Ekliptik σ , die Eratosthenes als Winkel 2σ zwischen den Sonnenwenden zu $\frac{11}{83}$ eines Großkreises, d.h. zu $2\sigma = 47^\circ;42,39 = 2 \cdot 23^\circ;51,20$, festgestellt hatte, konnte Hipparchos (nach dem Bericht von Ptolemaios) die jährliche Sonnenbahn vollständig berechnen.²⁵

Im folgenden soll diese Berechnung (mit den alten Daten) in moderner Terminologie nachvollzogen werden, wobei wir über Pedersens ausgezeichnete Vorlage hinaus alle Umständlichkeiten mit den Ptolemäischen Sehnentafeln ahistorisch durch moderne Trigonometrie überspielen und überdies eine vektorielle Darstellung anstreben. Die Eleganz des Gedankenganges kommt so für den heutigen Leser sicher besser heraus.

Wir gehen von folgenden Annahmen aus:

²⁴ Ptolemaios erläutert die genaue Jahreslänge im wesentlichen so: Er habe selbst ein Herbstäquinoktium beobachtet (julianisch: am 26.9.139, 1 Stunde nach Sonnenaufgang; korrekt wäre der 25.9.139, 3h vor Sonnenaufgang, also 3.00 Uhr früh, gewesen - Ptolemaios hat wohl nur Hipparch's Daten „didaktisch“ hochgerechnet: van der Waerden 1988, S. 260f.), Hipparch dagegen 285 Jahre früher (julianisch: am 26.9.-146, um Mitternacht). Wäre die Jahreslänge des Kallippos von $365+1/4$ Tagen richtig, dann hätte das Äquinoktium nach $285 \cdot (365+1/4)$ Tagen zu Sonnenaufgang stattfinden müssen. Aus der tatsächlich verstrichenen Anzahl von Tagen ergab sich nicht 1h Verspätung, sondern 23h Verfrühung, also $23/24d$ in 285 Jahren und $1d$ in 300 Jahren (Pedersen, S. 132). Hipparch hat mehr als 20 Jahre lang viele Äquinoktien gemessen und wird wohl ähnlich vorgegangen sein. Schließlich hat er sein Resultat am Vergleich der Sommersolstitionen -135 und -280 (Aristarchos) verifiziert (Pedersen, S. 130, 410ff.) Geminus gibt außerdem für den Herbst $88+1/8$ Tage und für den Winter $90+1/8$ Tage an (Szabó 1992, S. 297).

²⁵ Das tropische Sonnenjahr dauert tatsächlich $365,2422d$ statt Hipparch's $365,2467d$, war also bei ihm nur 6 Min. zu lang (Pedersen, S. 131). Aus dem „Long Count“-Zyklus der Mayas von 374 440 Jahren hat man geschlossen, daß sie in der klassischen Periode im 1. Jh. n. Chr. eine Jahreslänge von $365,2420d$ kannten (Girard, S. 363; Krupp, S. 20; Westphal, S. 98).

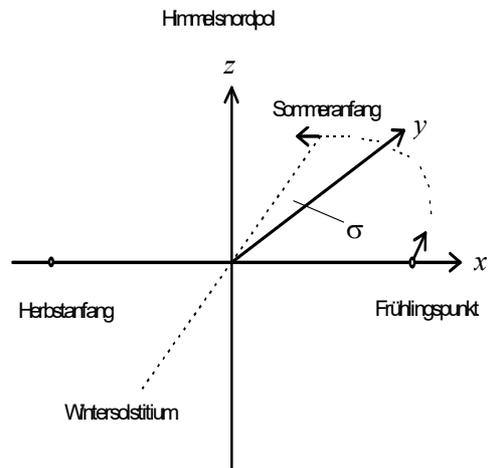
Was die Länge der Jahreszeiten angeht, waren die Werte damals genauer $94 d$ bzw. $92\frac{1}{3} d$ (Pedersen, S. 149). Die modernen Werte sind 92^d19^h bzw. 93^d15^h (Szabó 1992, S. 297).

Zu Ptolemaios' Zeit betrug 2σ tatsächlich $47^\circ;21,27=2 \cdot 23^\circ;40,44$ und nicht mehr $47^\circ;42,39$ wie dreihundert Jahre zuvor bei Eratosthenes und Hipparch (dort genauer: $47^\circ;27,20=2 \cdot 23^\circ;43,40$). Trotzdem benutzte Ptolemaios weiter die Hipparch'schen Daten für seine Herleitung der Sonnenbahn (van der Waerden 1988, S. 258; heutiger Wert: $2 \cdot 23^\circ;27=46^\circ;54$). Lübke (S. 20 u. 25) behauptet, Tscheou-Kong habe in China aus dem Gnomon-Schatten die Schiefe der Ekliptik zu $23^\circ;54,02$ statt korrekter $23^\circ;50,32$ gemessen. (Da keine Quellen genannt werden und der Eratosthenes-Wert an gleicher Stelle falsch ist, sollte man diese Angabe mit Vorsicht genießen.)

Hipparch's Vergleich der damals aktuellen Daten mit mehrhundertjährigen babylonischen Tabellen hatte ihn überdies zu der berühmten Feststellung der „Präzession der Äquinoktien“ gebracht, daß nämlich die Jahrespunkte sehr langsam dem Fixsternhimmel gegenüber wandern, und zwar um mindestens $0^\circ;0,36 = 36''$ je Jahr. Die Chaldäer sollen von der Präzession schon im 24. Jh. v. Chr., spätestens aber zur Zeit des Darios gewußt haben, und ihrer Mondrechnung lag der Betrag von $(46+7/8)''$ zugrunde (van der Waerden 1988, S. 186.; Papke, S. 268ff.; moderner Wert: $50''/a$). Ptolemaios hat die Präzession bei seiner Bahnbestimmung für die Sonne nach Hipparch bewußt außer acht gelassen (man könne es mit der Dre-

- a) Die Länge des Jahres beträgt $(365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{300})d$.
- b) Die Länge des Frühlings beträgt $94\frac{1}{2}d$, und die Länge des Sommers $92\frac{1}{2}d$.
- c) Die Jahrespunkte auf der Ekliptik (genaue Äquinoktien und Solstitien) werden von jedem irdischen Beobachter unter rechten Winkeln gesehen.
- d) Die Schiefe σ der Sonnenbahn (Ekliptik) gegenüber dem Äquator beträgt nach Eratosthenes $23^{\circ}51'20''$.
- e) Die Sonne wandert vor dem Fixsternhimmel um $360^{\circ}/a$ nach Osten, und sie dreht sich täglich viel rascher mit dem Fixsternhimmel nach Westen.
- f) Das Frühlingsäquinoktium (aufsteigender Knoten; Sonnenmitte auf dem Himmelsäquator) sei in Zeitpunkt und Richtung bzgl. des Beobachterhorizonts bekannt.²⁶

Unser Koordinatensystem soll vom Erdmittelpunkt ausgehen. Den Himmels- und Erdäquator denken wir uns als x - y -Ebene, die y -Achse in Richtung der Länge des Sommersolstitiums, die z -Achse in Richtung des nördlichen Himmelspols und die x -Achse in Richtung des Frühlingspunktes. Dort, in $F(r;0;0)$, soll sich die Sonne zur Zeit $t_0 = 0$ befinden, wobei der Sonnenbahnradius r offen bleibt. Die Zeit t werde in Tagen seit dem genauen Frühlingsäquinoktium gemessen.



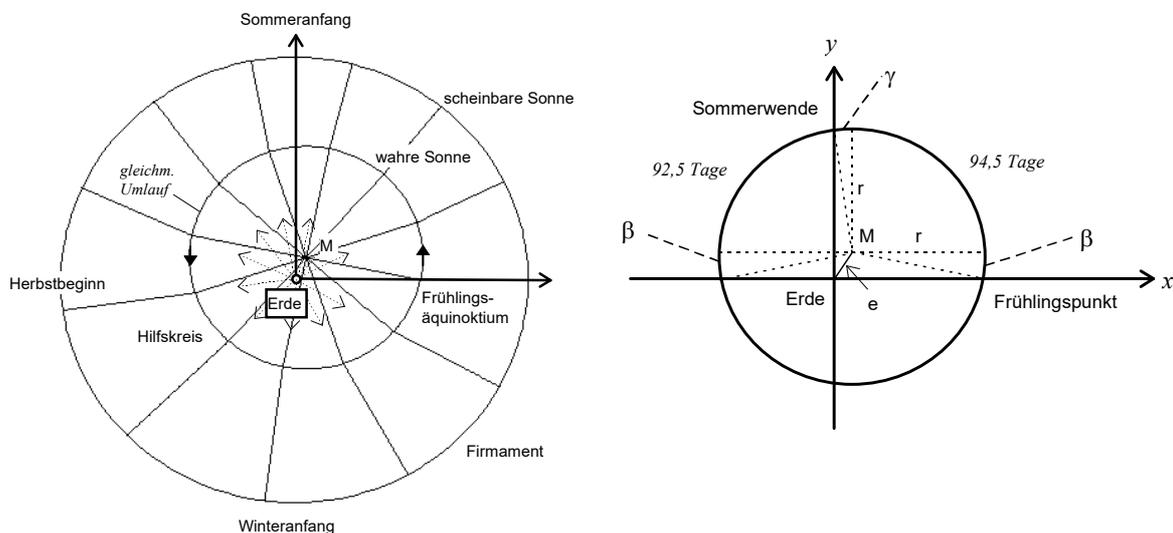
hung der Fixsternsphäre verrechnen; Szabó 1992, S. 304 sowie Pedersen), und wir wollen das im folgenden auch tun.

²⁶ „Die heutigen und die meisten griechischen Astronomen legen den Anfangspunkt des Zeichens Widder auf den (antiken) Frühlingspunkt.“ (van der Waerden 1980, S. 2) Aufgrund der Präzession der Äquinoktien (auf der Ekliptik nach rechts, der jährlichen Sonnenbahn entgegen, also auch der Reihenfolge der 12 Zeichen Widder, Stier, ... , Fische) steht letzterer inzwischen im Sternbild der Fische und bald im Wassermann. (Sehr schöne Abbildungen findet man dazu bei Szabó 1992, S. 100, 268 und 269.)

Bzgl. des mit dem Fixsternhimmel fest verbundenen Äquatorialsystems hat der Frühlingspunkt die Funktion des Nullpunktes (Nullmeridians) der „Rektaszension“ (Länge), die (vom Nordpol betrachtet) in (daher:) „mathematisch positiver“ Drehrichtung gemessen wird. Die „Deklination“ spielt entsprechend die Rolle der geographischen Breite. (Giese, S. 17). Die Verwendung der 360° -Teilung und der Koordinatensysteme (bis ins 17. Jh. n. Chr. nur für Himmel und Erde; vgl. jedoch Wussing, S. 139) hat sich durch Ptolemaios „Almagest“ durchgesetzt, war aber schon Eratosthenes und Hipparch geläufig. Woher diese Tradition ursprünglich stammt, ist unsicher. Vermutlich wurde sie aus Babylonien übernommen. (Vgl. Szabó 1992, S. 317ff.)

Die Berechnung erfolgt nun in zwei Schritten: Zunächst wird die jährliche Rückwärtsbewegung vor dem festen Fixsternhimmel, also in unserem festen Koordinatensystem, beschrieben, dann wird dieser Bahnbewegung die rasche tägliche Drehung des ganzen Firmaments überlagert. Beginnen wir mit dem ersten Schritt:

Nach dem Bericht von Ptolemaios schloß Hipparchos aus der ungleichen Länge der Jahreszeiten, daß sich die Sonne zwar gleichförmig auf einem Kreis bewege, daß jedoch dessen Mittelpunkt nicht der der Erde sein könne. Versetzt man ihn ein wenig von der Erde, so könne man mit einer einfachen gleichförmigen Kreisbewegung auskommen.²⁷



Wo M liegen muß, ist aus den Voraussetzungen a bis c leicht zu sehen: Aus

$$90^\circ + \beta + \gamma = \frac{94,5}{\text{Jahreslänge}/d} \cdot 360^\circ$$

$$90^\circ - \gamma + \beta = \frac{92,5}{\text{Jahreslänge}/d} \cdot 360^\circ$$

erhält man sofort β und γ . Hipparchos/Ptolemaios hatten aus der Sehnentafel $\beta = 2^\circ 10'$ und $\gamma = 0^\circ, 59'$, und damit - in moderner Schreibweise -

$$\vec{M} = r \cdot \begin{pmatrix} \sin \gamma \\ \sin \beta \end{pmatrix} = e \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix},$$

²⁷ Man vergleiche die Zeichnung bei Szabó 1992, S. 299. Van der Waerden 1988 nennt gute Gründe, warum diese Idee nach pythagoräischen Vorarbeiten von Apollonios stammen könnte. Es ist also ein Irrglaube anzunehmen, daß Apollonios die Kegelschnitte - fast zweitausend Jahre bevor Kepler sie brauchte - nur als Reine Mathematik studierte.

wobei sie $e := \frac{1}{24} \cdot r$ und $\alpha := 65^\circ 30'$ setzten. Der Steigungswinkel α von \bar{M} , d. h. die Richtung des „Apogäums“ (größte Erdferne der wahren Sonne), ergibt sich zwar aus $\tan \alpha = \sin \beta / \sin \gamma$ zu $65^\circ; 35,6,39$, aber Ptolemaios vertraute Hipparchs Messungen, und der hatte $65^\circ; 30$ angegeben.²⁸

Läge \bar{M} in der Äquatorebene, dann wäre der Sonnenort auf dem Kreis um \bar{M} gegeben durch

$$\bar{k}(t) := r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t - \beta) \\ \sin(\omega \cdot t - \beta) \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei natürlich $\omega = \frac{360^\circ}{\text{Jahreslänge}} = \frac{360^\circ}{(365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{300})d}$ bedeutet und t die Zeit in Tagen seit dem letzten Frühlingsanfang. β wurde eingeschoben, damit die Bewegung im Frühlingspunkt auf der x-Achse beginnt.²⁹

²⁸ Zu Hipparchs Zeit war die Länge des Apogäums tatsächlich $\alpha = 66^\circ; 14$ (Pedersen, S. 147), und zu Ptolemaios' Zeit, 300 Jahre später, hatte sich die Lage aufgrund der (ihm bekannten) Präzession erheblich verändert, aber Ptolemaios hielt - wie an vielen anderen Stellen - an Hipparchs Werten fest. Arabische Astronomen stellten um 1000 n. Chr. fest, daß sich die Apsidenlinie, auf die Ptolemaios seine Anomalieberechnungen bezieht, noch zusätzlich zur Präzession um $12''/a$ in der Ekliptik nach Osten dreht (Pedersen, S. 147). Das Zusammenspiel von Präzession und Nutation macht die tatsächliche Lagebewegung des Frühlingspunktes reichlich kompliziert (s.z.B. Voigt, S. 17-21), wir wollen daher im weiteren Ptolemaios folgen und so tun, als wären Frühlingspunkt und Ekliptik für immer fest ans Firmament geheftet.

²⁹ Der Bewegungsbeginn kann natürlich auch anders gewählt werden, wenn die Länge der betreffenden Sonnenposition (bzgl. des im Fixsternhimmel für ewig ortsfest gedachten Frühlingspunktes) bekannt ist. Ptolemaios wählt die Startposition der Bewegung für Vergleiche mit Beobachtungsdaten beim Frühlingspunkt, für theoretische Erörterungen beim Apogäum (in der Ekliptik $65^\circ; 30$ vom Frühlingspunkt) und für die Tabellen (julianisch:) beim Mittag des 26.2.747 v. Chr., wofür er die ekliptikale Länge $330^\circ; 45$ durch Rückrechnung bestimmt hatte:

Ptolemaios behauptet, er habe (in julianischer Zählung:) am 25.9.132, 2h nach Mittag, das Herbst-Äquinoktium (d.h. den 180° -Punkt) beobachtet (korrekter Wert: 24.9.132, 10 Uhr, d.h. 4h nach Sonnenaufgang; van der Waerden 1988, S. 260). Er legt dann - gemäß einer gebräuchlichen alten babylonischen Datierungsära - den Nullpunkt seiner Zeitrechnung auf den ägyptischen Jahresanfang der Regierungszeit des Nabonassar von Babylon, d.h. (julianisch:) auf den Mittag des 26.2.-747, weil ihm die babylonischen Beobachtungsdaten seit etwa dieser Zeit lückenlos vorlagen. Als Startwert der Länge des Sonnenortes für $t_0 = 0$ nennt er dann $330^\circ; 45$ bzgl. des Frühlingspunktes (Pedersen, S. 151ff., 423).

Da bei Ptolemaios Ekliptik und Frühlingspunkt auf ewig feststehen, könnten wir z.B. $t_0 = 0$ für den Frühlingspunkt ein Winterhalbjahr, also $187d$, nach Ptolemaios' Beobachtung ansetzen - und müßten dann immer die Tage seit damals ausrechnen. Bequemer und genauer ist es, den letzten Frühlingsanfang aus einem Kalender zu entnehmen und lediglich die Tage und Stunden seitdem zu zählen.

Nun liegt die jährliche Sonnenbahn aber in der Ekliptik und nicht in der Äquatorebene, wir müssen die eben angegebene Kurve also noch um die x -Achse drehen. Ist daher wieder t die Zeit in Tagen seit dem Frühlingsäquinoktium, dann gibt

$$\bar{s}(t) := X_\sigma \circ (\bar{M} + \bar{k}(t)) = e \cdot X_\sigma \circ \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot X_\sigma \circ \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t - \beta) \\ \sin(\omega \cdot t - \beta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

den Sonnenort im Laufe des Jahres am festen Fixsternhimmel in t Tagen seit dem Frühlingsäquinoktium t_0 .³⁰

Im Sinne von Abschnitt 2 haben wir es hier mit der einfachsten Form einer Epizykelbewegung zu tun: Versteht man unter $X_\sigma \circ \bar{k}(t)$ eine „mittlere ekliptikale Sonne“, die sich in einem Jahr in der Ekliptikebene gleichförmig um die Erde bewegt³¹, dann gibt der Verschiebungsvektor $X_\sigma \circ \bar{M}$ die nötige Korrektur an, um von der mittleren Ekliptiksonne zum „wahren“ Sonnenort zu kommen. Der Korrekturwinkel zwischen den beiden Ortsvektoren $X_\sigma \circ \bar{k}(t)$ und $\bar{s}(t)$ wird bei Ptolemaios als „Anomaliedifferenz“ oder „Prosthaphairesis“ zum Addieren bzw. Subtrahieren tabelliert³². Nun kann man den Verschiebungsvektor natürlich auch als Zeiger eines Epizykels deuten, der sich mit der mittleren ekliptikalen Sonne als Deferent so dreht, daß er immer parallel zur Apsidenlinie Perigäum-Erde- \bar{M} -Apogäum bleibt. Exzenter- und Epizykelmodell sind in diesem Fall äquivalent, wie Ptolemaios betonte (und wohl schon Apollonios wußte). Mit den Bezeichnungen von Abschnitt 2 ist das Epizykelargument $h(\alpha)$ im Fall der Sonnenbewegung einfach konstant, und der

³⁰ Mit X_σ , Y_σ bzw. Z_σ sind bei uns natürlich die Drehungen um die jeweiligen Koordinatenachsen gemeint, also $X_\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \sigma & -\sin \sigma \\ 0 & \sin \sigma & \cos \sigma \end{pmatrix}$, $Y_\sigma := \begin{pmatrix} \cos \sigma & 0 & -\sin \sigma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \sigma & 0 & \cos \sigma \end{pmatrix}$ und $Z_\sigma := \begin{pmatrix} \cos \sigma & -\sin \sigma & 0 \\ \sin \sigma & \cos \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

³¹ Unter der „mittleren Sonne“ versteht man heute eine entsprechende gleichförmige Kreisbewegung um die Erde in der Äquatorebene, also eine „mittlere äquatoriale Sonne“. Die Abweichung des wahren Sonnenortes davon heißt „Zeitgleichung“.

³² Das Kunstwort „Prosthaphairesis“ hat Ptolemaios wohl aus den Verben „prostithemi“ (addieren) und „aphaireo“ (subtrahieren) zusammengesetzt (Pedersen, S. 140). Das ist deswegen interessant, weil seit Anfang des 16. Jahrhunderts bis Brahe, Bürgi, Clavius und Vieta als Vorläufer der Logarithmenrechnung eine Rechenmethode gleichen Namens in Gebrauch war, die die Additionstheoreme von Sinus und Cosinus ausnutzt, um Punkt- auf Strichrechenarten herunterzuspielen (Hofmann, S. 160f.).

Epizykel wirkt hier lediglich als Parallelverschiebung der Deferentmitte nach \bar{M} . Die Grundidee, von einer mittleren Kreisbewegung auszugehen, deren genaue Frequenz man aus Jahrhunderte langen Beobachtungen gewinnen kann, und anschließend die kleineren Abweichungen, die „Anomalien“, mit Hilfe einer Exzenter- oder Epizykelkonstruktion zu überlagern, hat sich dann bei allen anderen Planetenbewegungen bewährt.³³

Im zweiten Schritt soll die rasche tägliche Drehung des gesamten Firmaments, an der ja auch die Sonne teilnimmt, berücksichtigt werden. Wie dreht sich die Himmelskugel mit der Tageszeit aus ihrer Anfangslage zur Zeit t_0 des Frühlingsanfangs?

Nun, 24h nach einem Höchststand steht die Sonne mittags wieder im Süden. Die Sonne hat genau einmal von Osten nach Westen die Erde umrundet. Hätte sich die Fixsternsphäre inzwischen auch nur einmal herumgedreht, dann stünde die Sonne vor dem Firmament am alten Ort. Da sie sich aber inzwischen nach vorigem um etwa 1° nach Osten bewegt hat, muß die Fixsternsphäre sich um etwa dieses eine Grad weiter gedreht haben. Das Firmament dreht sich also etwas rascher. Genauer gesagt: Die Geschwindigkeit der Himmelskugel muß so groß sein, daß sie die äquatoriale Längenbewegung der Sonne, d.h. die Projektion des Winkels $S(t)$ -Erde- $S(t+1)$ auf die Äquatorebene, jeden Tag wieder aufhebt. Leider ist diese Projektion nicht konstant, ihr Jahresmittel ist aber leicht zu errechnen: In einem Jahr beträgt die Projektion 360° . Geht man gemäß der antiken Überzeugung von einer gleichförmigen Drehung aus, dann muß die Fixsternsphäre täglich zusätzlich zum 360° -Umschwung noch die gegenläufigen $\frac{360^\circ}{\text{Jahreslänge in Tagen}}$ wettmachen. Da wir die jährliche Sonnenbewegung vor der Sphäre in positiver Drehrichtung angesetzt haben, bekommen wir für den täglichen Drehwinkel der Sphäre um die Himmelsachse den Wert

$$\Omega := -\left(\frac{360^\circ}{\text{Tag}} + \frac{360^\circ}{\text{Jahreslänge in Tagen}}\right),$$

mit dem sie sich täglich gegenüber dem festgehaltenen Anfangsäquator dreht.

³³ Berechnet man Mittelwerte, so empfiehlt es sich ja auch, lediglich die kleinen Abweichungen von einem geschätzten Durchschnittswert zu mitteln, um große Fehler zu vermeiden...

Für den „wahren“ Ort der Sonnenmitte in t Tagen seit irgendeinem Frühlingsanfang und gegenüber der damaligen Richtung als x -Achse²⁷ ergibt sich

$$\bar{u}(t) := Z_{\Omega t} \circ \bar{s}(t) = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t & 0 \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \bar{s}(t).$$

Der „scheinbare“ Ort $\bar{v}(t)$ der Sonnenmitte wurde als der Punkt hinter $\bar{u}(t)$ an der Fixsternsphäre aufgefaßt. Hat sie den - natürlich unbekannt - Radius R , dann wird

$$\bar{v}(t) := R \cdot \frac{\bar{u}(t)}{|\bar{u}(t)|} = R \cdot Z_{\Omega t} \circ \frac{\bar{s}(t)}{|\bar{s}(t)|} = R \cdot Z_{\Omega t} \circ X_{\sigma} \circ \frac{\bar{M} + \bar{k}(t)}{|\bar{M} + \bar{k}(t)|}$$

dieser geozentrische Richtungsvektor zur „scheinbaren“ Sonnenmitte, die man am Firmament sieht, t Tage nach dem letzten Frühlingsäquinoktium und gegenüber der damaligen Sonnenrichtung als x -Achse.³⁴ Sie bildet natürlich geozentrisch, d.h. von der festen Erde aus, mit der anfänglichen Frühlingsrichtung dieselben Winkel wie die „wahre Sonne(nmitte)“.³⁵

Damit keine Mißverständnisse aufkommen: So - in Form von Vektorfunktionen und Abbildungen - steht das Ganze natürlich nicht bei Ptolemaios. Dort wird eine Anleitung gegeben und begründet, wie der Sonnenort zu gegebenem Zeitpunkt aus den (Funktions-) Tabellen bestimmt werden kann, ohne die mühseligen Sehnenberechnungen (doppelter Sinus)

³⁴ Um die Formel für Beobachtungen nutzen zu können, muß man natürlich wissen, wo der Frühlingspunkt bzgl. des eigenen Horizonts beim Äquinoktium stand und wann das Äquinoktium stattfand. Die Anfangslage des Frühlingspunktes auf dem Himmelsäquator (und der Ekliptik) läßt sich für den eigenen Horizont grob aus der verstrichenen Zeit zwischen Äquinoktium und dem zuletzt beobachteten Mittag (örtliche Sonnenzeit!) abschätzen. Genauer bekommt man sie aus astronomischen Jahrbüchern - dort wird angegeben, für welchen Erdmeridian die Sonne beim Frühlingsäquinoktium genau im Süden stand („Stundenwinkel“ bzgl. Greenwich).

³⁵ Die voranstehenden Zeichnungen sind mit dieser Funktion in DERIVE für einen Horizont auf 50° nördl. Breite und mit den Hipparchos-Ptolemaios-Werten für die Längen der Vierteljahre und für σ gezeichnet (und in WinWord überarbeitet). Der Beobachter und Gnomon steht dabei auf der geographischen Länge, für die zur Zeit $t_0 = 0$ der Frühlingspunkt genau im Süden steht. Die Richtung der Parallelprojektion wurde willkürlich so gewählt, daß der Vektor (2;-5;3) auf den Ursprung (Erdmitte) fiel. Selbstverständlich kann man auch die modernen Werte aus den Fußnoten eingeben; für t muß man dann immer die Zeit in Tagen seit dem letzten Frühlingsbeginn einsetzen.

und Multiplikationen selbst ausführen zu müssen. Ptolemaios gibt (verschachtelte) Wertetabellen - wenn man so will: punktweise definierte Funktionen im Dirichletschen Sinne (Pedersen, S. 80-82). Der gleiche Vorbehalt gilt auch für die folgenden Darlegungen. Man bedenke jedoch, was der Computer tut, wenn er unsere Funktionsterme zeichnet: Er „versteht“ sie als Anleitungen, wie der Sonnenort an einigen festen Zeitpunkten berechnet werden kann, und interpoliert den Rest linear. Genau so ist Ptolemaios' Vorlage zu verstehen. Der Fortschritt besteht hier, solange man keine Analysis einsetzt, lediglich in der kompakteren Schreibweise!³⁶

³⁶ H. Mehrtens begründet in seinem Buch „Moderne - Sprache - Mathematik“ über die sogenannte „Grundlagenkrise“ der Mathematik des 20. Jahrhunderts sehr überzeugend die These, mathematische Forschung sei im erkenntnistheoretischen Kern nichts anderes als Arbeit an einer (besonderen Beschreibungs-) Sprache.

3.2 Ptolemaios' Modelle der Mondbewegung

Nach der Sonnenbewegung werden im „Almagest“ die anderen „sechs“ Planeten behandelt. Die Grundideen wiederholen sich und sollen im folgenden nur skizziert werden.³⁷ Wir beginnen - wie Ptolemaios - mit der Mondbewegung.

Die auffälligsten Phänomene sind die Mondphasen und die „Eklipsen“ (Finsternisse)³⁸. Aus fast lückenlosen Beobachtungen der „Babylonier“ seit dem 8. Jh. v. Chr. wußten Hipparchos und Ptolemaios, daß sich die Mondphasen in einer „Saros-Periode“ von $6585\frac{1}{3}$ Tagen, d.h. wenig mehr als 18 Jahren, insgesamt 223mal wiederholen, so daß ein Phasenzyklus im Mittel 29,53064 Tage dauert („synodischer Monat“; moderner Wert: 29,53059d).

Natürlich bewegt sich auch der Mond mit der täglichen Umdrehung der Fixsternsphäre von Osten nach Westen.³⁹ Um diese Drehung auszuschalten, kann man sich auf die Beobachtung von Meridiandurchgängen konzentrieren. Man stellt dann leicht fest, daß der Mond jede Nacht nahe der Ekliptikebene etwas später durchgeht: Er wandert - sozusagen heimlich - in der oder nahe der Ekliptikebene langsam nach Osten.⁴⁰ Aus den Finsternissen war überdies sehr früh klar, daß der Mond nicht selbst leuchtet, sondern sein Licht von der Sonne bekommt. Die Mondphasen stammen also daher, daß der Mond etwa einmal im Monat von Westen nach Osten um die Erde fliegt.

Tatsächlich muß er etwas mehr leisten: Von einem Vollmond zum nächsten stehen ja Mond und Sonne wieder diametral vor bzw. hinter der Erde. Die Sonne hat sich - wie wir

³⁷ Für nähere Einzelheiten sei auf Pedersen und die beiden Bücher von van der Waerden verwiesen. Unsere Darstellung zielt wieder auf geschlossene vektorielle Formen ab, die es so bei Ptolemaios nicht gibt (vgl. den Hinweis im vorigen Abschnitt).

³⁸ Die Bezeichnung „Ekliptik“ spielt darauf an, daß die Finsternisse nur dort stattfinden können. Das wird im folgenden erläutert.

³⁹ Wir sind es ja gewohnt, von einer täglichen Drehung der Erde auszugehen. Steht die Erde - wie bei den meisten Autoren im Altertum - fest, dann dreht sich eben der ganze Himmel einmal täglich um die Erde.

⁴⁰ Die älteste erhaltene Heldengeschichte der Weltliteratur, das akkadisch geschriebene Gilgamesch-Epos von den Herrschern über Uruk, Dumuzi und Gilgamesch, stammt vermutlich aus dem späten dritten Jahrtausend und wurde vielleicht im 24. Jh. v. Chr. von Sargons Tochter Encheduanna verfaßt (Papke, S. 25, S. 37f. u. S. 71). Nach Papkes überzeugender Deutung im Rahmen der chaldäischen Sternreligion ist es als verewigte und sehr genau beobachtete Wanderung von Gilgamesch=Erbauer der Mauern von Uruk=Hermes=Merkur aus dem „Haus“ Orion, Enkidu=Tammuz=Dumuzi=Bacchus=Adonis=Mond aus dem „Haus“ Widder und Ishtar=Astarte=Aphrodite=Venus aus dem „Haus“ Jungfrau durch den Sternenhimmel zu verstehen. Die beiden astronomischen MUL.APIN-Tafeln lieferten Papke den Schlüssel.

wissen - inzwischen um knapp $29,5 \cdot 1^\circ$ nach Osten bewegt. Diesen Winkel muß der Mond also noch zusätzlich um die Erde gewandert sein. Genauer gerechnet: Zusätzlich zur vollen Erdumrundung von 360° legt der Mond am Firmament noch $29,5306 \cdot \frac{360^\circ}{\text{Jahreslänge} / \text{Tage}}$ im Monat zurück, um der Sonne wieder gegenüber zu treten. Berechnet man daraus die mittlere tägliche West-Ost-Bewegung ω_T , so erhält man in der - ortsfest gedachten - Ekliptik ebene der Himmelssphäre und ohne Rücksicht auf deren raschen täglichen Umschwung ein grobes

0. Modell der Mondbewegung (Deferent):

Unabhängig vom täglichen Umschwung des Firmaments bewegt sich der Mond näherungsweise auf einem Kreis in der Ekliptik von Westen nach Osten um die Erde. Diese Bahnbewegung lautet

$$\vec{m}_0(t) := X_\sigma \circ r_{EM} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega_T \cdot t) \\ \sin(\omega_T \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei

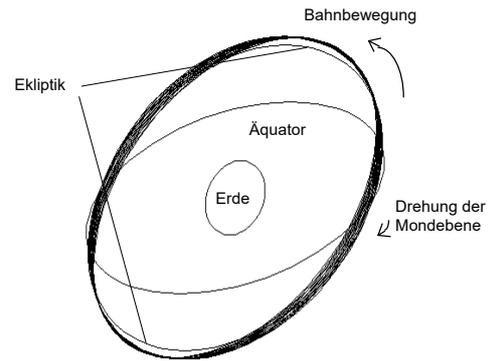
$$\omega_T := \frac{360^\circ + 29,530 \dots d \cdot \omega_{\text{Sonne}}}{29,530 \dots d} \approx 13^\circ; 10,34,58,33,30,30 \frac{^\circ}{d}$$

der tägliche Umlaufwinkel um die feststehende Erde relativ zu Ekliptik und Fixsternsphäre ist, r_{EM} die mittlere Entfernung zwischen Erd- und Mondmittelpunkt und t die Zahl der Tage seit einer Mondposition in Richtung des Frühlingspunktes.⁴¹

⁴¹ Die Ekliptik wird in Ptolemaios' Planetentheorien ungeachtet der Präzession als an die Himmelssphäre angeheftet gedacht. Kennt man keinen Zeitpunkt, zu dem der Mond im Frühlingspunkt stand, so kann man mit $(t - t_0)$ statt mit t arbeiten. Der Parameter t_0 bezieht sich dann auf irgendeinen Zeitpunkt, zu dem die Mondposition als Anfangswert bekannt ist. Der Mond (=Enkidu) des Gilgamesch-Epos befand sich nach Papke bei seiner „Geburt“ am akkadischen Neujahrstag 2340 Jahre v. Chr. (Beginn der akkadischen Dynastie durch die Machtergreifung Sargons), 14 Tage vor Frühlingsanfang, als er erstmals wieder abends als Neulichtsichel am Westhorizont sichtbar wurde, in den Plejaden (MUL.MUL), die damals am Frühlingspunkt standen (Papke, S. 62ff.).

Die sogenannte „tropische“ Winkelgeschwindigkeit ω_T , für die wir oben den Wert von Ptolemaios angegeben haben, wird natürlich etwas durch den Fehler in der (tropischen) Jahreslänge beeinträchtigt. Pedersen (S. 164) gibt dafür etwa $0^\circ; 25/\text{Jahrhundert}$ an. Dezimal ist Ptolemaios' Wert $13,176\ 38 \text{ }^\circ/d$ gegenüber dem modernen Wert von $13,176\ 40 \text{ }^\circ/d$ (Pedersen, S. 164; Voigt, S. 55).

Daß dieses Näherungsmodell noch recht dürftig ist, sieht man schon daran, daß hier jeden Monat eine Mondfinsternis stattfinden müßte - was bekanntlich bei weitem nicht der Fall ist. Bei den Meridiandurchgängen bemerkt man ja auch eine Breitenbewegung des Mondes über bzw. unter der Ekliptik. Die Mondbahn verläuft also gar nicht in der Ekliptik, sondern



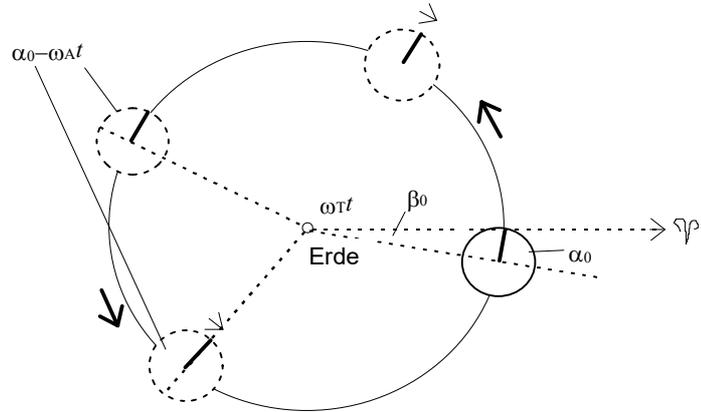
eher in einer dazu angestellten Ebene. Mondfinsternisse können nur entstehen, wenn der Mond bezüglich der Ekliptik etwa die Breite 0° hat und wenn zugleich Vollmond ist, wenn also Sonne, Erde und Mond fast auf einer Geraden hintereinander stehen.⁴² Leider wandern die Finsternispositionen auch noch langsam um die Ekliptik, d.h., die Mondebene dreht sich allmählich. Ptolemaios studierte deshalb zunächst die reine Längenbewegung in der Ekliptik genauer:

Die tägliche Längenbewegung des Mondes schwankt zwischen etwa 10 und $15 \frac{\circ}{d}$. Das ist die „1. Anomalie“ der Mondbewegung. In Erdnähe, wenn der Mond größer wirkt, ist die Bewegung rascher, in Erdferne langsamer.⁴³ Es ist also sinnvoll, das nullte Modell durch Aufsetzen eines Epizykels zu verbessern, der zugleich die Größen-, Abstands- und Geschwindigkeitsänderungen erfaßt:

⁴² Für eine totale Mondfinsternis muß der Breitenbetrag der Mondmitte unter $25,7'$ liegen, für eine partielle Mondfinsternis reicht ein Betrag unter $56,7'$ (Voigt, S. 60). Will man Perioden aus Mondfinsternissen genau bestimmen, so empfiehlt es sich daher, von partiellen Bedeckungen mit etwa gleichem Bedeckungsanteil auszugehen. Die Perioden von Sonnenfinsternissen sind schwer zu finden: Sie sind immer nur auf einem Teil der Erde sichtbar (maximaler Durchmesser des wandernden Kernschattens: 264 km , maximale Beobachtungsdauer für einen Ort: $7,6 \text{ min}$), hängen sehr empfindlich von der Erde-Mond-Entfernung bei Neumond auf der Ekliptik ab, und nicht einmal bei mittlerer Entfernung reicht der Mondschatten bis zur Erde. (Einzelheiten bei Voigt, S. 62ff.)

⁴³ Die Beobachtungsgenauigkeit reichte in der Antike nicht aus, um die Änderungen der Mondentfernung oder des Durchmessers aus der Parallaxe zu messen (vgl. Fußnote 13 im vorigen Abschnitt).

Der Epizykelradius r_{Epiz} muß natürlich gegen die Mondrichtung drehen, damit in Erdferne und in Erdnähe die richtigen Geschwindigkeiten herauskommen. Den genauen täglichen Drehwinkel erhält man langfristig aus der



„anomalistischen Monatslänge“ zwischen zwei gleichen Geschwindigkeiten. Für die Saros-Periode hatten die Babylonier 239 Wiederholungen gleicher täglicher Geschwindigkeiten gefunden. Ptolemaios korrigierte die entsprechende mittlere tägliche Geschwindigkeit noch etwas auf $\omega_A := 13^\circ;3,53,56,17,51,59 \frac{\circ}{d}$ und bestimmte den Epizykelradius aus drei Finsternisbeobachtungen zu $\frac{r_{Epiz.}}{r_{Erde-Mond}} = \frac{5^p;15}{60^p}$.⁴⁴ Mit dem Startwinkel α_0 , auf dessen Bestimmung wir hier nicht eingehen wollen, erhält man β_0 und das hinsichtlich der 1. Anomalie (der Geschwindigkeiten) verbesserte

1. Modell der Längenbewegung des Mondes:

Zur Zeit t seit irgendeiner Mondposition in Richtung des Frühlingspunktes hat der Mond in der Ekliptik die Länge

$$\vec{m}_1(t) := \vec{m}_0 \left(t - \frac{\beta_0}{\omega_T} \right) + \frac{21}{240} \cdot r_{EM} \circ X_\sigma \circ \begin{pmatrix} \cos(\omega_T \cdot t - \omega_A \cdot t + \alpha_0) \\ \sin(\omega_T \cdot t - \omega_A \cdot t + \alpha_0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

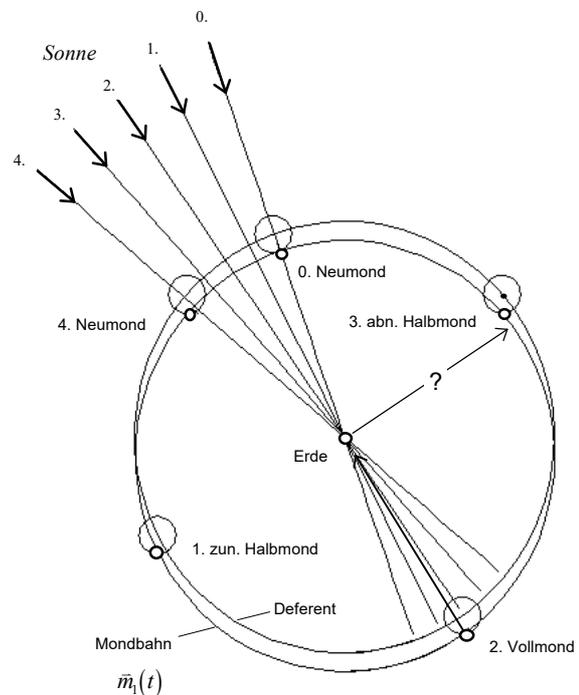
⁴⁴ Das hochgestellte „p“ (von „Partes“) soll nur andeuten, daß Anteile eines in 60 Teile geteilten Kreisradius berechnet wurden. Dezimal betrug Ptolemaios’ „anomalistische Geschwindigkeit“ $13,06498^\circ$ je Tag. Der moderne Wert ist $13,06499^\circ$ je Tag. Die raffinierte Bestimmung des Epizykelradius aus drei Beobachtungen schreibt van der Waerden Apollonios zu. (Pedersen, S. 164 u. 172-179; Voigt, S. 55; van der Waerden 1988, S. 169-172) Bei Pedersen findet man auch die Bestimmung des Startwinkels α_0 aus einer Mondfinsternis.

bzgl. des Frühlingspunktes. Mißt man t seit einer Startzeit t_0 , zu der der „mittlere Mond“ $\bar{m}_0(t_0)$ und der Epizykelradius in Richtung des Frühlingspunktes zeigten, dann vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\bar{m}_1(t) := r_{EM} \cdot X_\sigma \circ \left[\begin{pmatrix} \cos(\omega_T \cdot t) \\ \sin(\omega_T \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{21}{240} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega_T \cdot t - \omega_A \cdot t) \\ \sin(\omega_T \cdot t - \omega_A \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Da uns mehr die Kurvenform als ihre tatsächliche Lage im Raum interessiert, wollen wir uns im weiteren nicht mit der Problematik der Anfangswerte herumschlagen und t künftig von so einer geometrisch bequemen Anfangszeit ausgehend zählen.⁴⁵

Dieses Modell beschrieb die Mondlängen gut, soweit es um Voll- und Neumondpositionen ging. Das war zu erwarten, da die Parameter aus Finsternisbeobachtungen stammten. Ptolemaios mußte aber feststellen, daß die Längen in den Halbmondpositionen nicht gut getroffen wurden und hinter dem mittleren Mond $\bar{m}_0(t)$ um $7^\circ;40$ nachhinkten, obwohl der Epizykel allenfalls ein wenig mehr als 5° wettmachen konnte.⁴⁶ Dieses unangenehme Phänomen erinnerte an die ungleichen Jahreslängen bei der Sonnenbahnbestimmung, diesmal jedoch in Form einer zusätzlichen „2. Anomalie“.⁴⁷ Wie ließ sich das reparieren?



Offenbar war diese Störung von der jeweiligen Stellung des Mondes zur Sonne abhängig. Die Korrektur mußte also relativ zum Sonnenstand angebracht werden - der Einfachheit

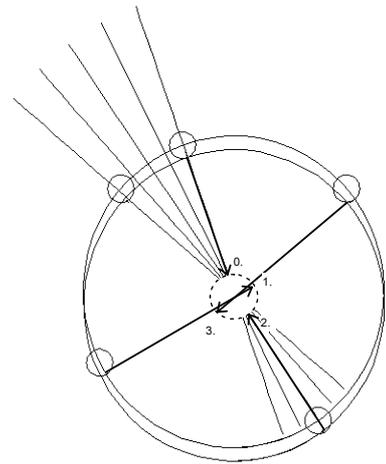
⁴⁵ Zu den Anfangswerten s. Pedersen, S. 182ff.

⁴⁶ In der Zeichnung ist die typische Situation für vier aufeinander folgende Wochen dargestellt.

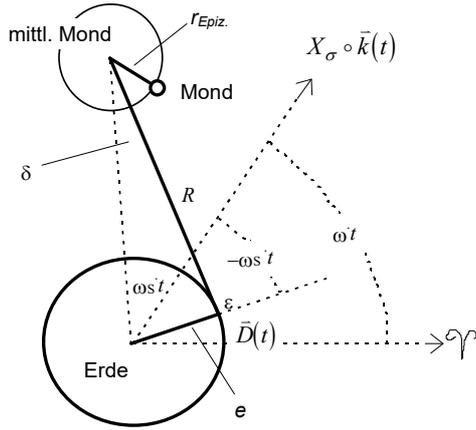
⁴⁷ Seit Ptolemaios heißt diese Mondbahnstörung „Evektion“. Es ist die größte der Bahnstörungen, die die Sonne beim Erde-Mond-System verursacht (Voigt, S. 56).

halber zunächst bzgl. der mittleren Sonne $X_\sigma \circ \vec{k}(t)$ in der Ekliptik. Um die treffende Darstellung bei den „Syzygien“ (Neu- und Vollmond) ungestört zu lassen, modifizierte Ptolemaios das 1. Modell der Längenbewegung nun so, daß der Epizykel lediglich in Nähe der Quadraturen (Halbmonde) an die Erde herangezogen wird, um den scheinbaren Winkeldurchmesser zu vergrößern. Die Idee war vielleicht zunächst, einen exzentrischen Deferenten analog zur Sonnenbahn zu wählen. Aber das hätte nur eine Quadratur korrigieren können; für die andere wäre der Epizykel von der Erde aus noch schlanker erschienen. Es mußte also eine zusätzliche periodische Bewegung der Epizykelmitte her, die die Abstände in den Syzygien ungestört ließ, zugleich aber die Erdbstände der Epizykel in den Quadraturen verringerte. Ptolemaios löste dieses Problem, indem er den Mittelpunkt des Deferenten um die Erde kreisen ließ. Die folgenden Bemerkungen sollen die Grundgedanken in moderner Terminologie zeigen:

Bezieht man die Überlegungen auf den Stand der mittleren Sonne, t Tage nachdem sie im Frühlingspunkt stand, so muß der Deferentradius bei den Syzygien längs der Sonnenrichtung zum Mond zeigen. Bei den Quadraturen steht die Verbindung Erde-Mond senkrecht zur Sonnenrichtung. Die Verbindung Erde-Deferentmitte muß dann ebenfalls senkrecht dazu stehen, diesmal aber vom Mond fortzeigen, damit der Epizykel an die Erde herangezogen wird. Die Bewegung der Deferentmitte hat folglich von Osten nach



Westen, gegen den Mondlauf, und mit $\omega_s = \frac{360^\circ}{\text{synodische Monatslänge}} \approx 12^\circ; 11,26,41,20,17,59 \frac{\circ}{d}$ zu erfolgen. Von der mittleren Sonnenrichtung $X_\sigma \circ \vec{k}(t)$ sollte sich die Deferentmitte $\vec{D}(t)$ gerade um den Winkel $-\omega_s \cdot t$ entfernt haben, wenn der (mittlere) Mond dazu den Winkel $\omega_s \cdot t$ gebildet hat. Ist e die Exzentrizität, d.h. der Radius des Kreises, auf dem die Deferentmitte wandern soll, und sind R bzw. $r_{\text{Epiz.}}$ die Radien des Deferenten bzw. des Epizykels, dann sieht die Situation so aus:



Da die mittlere Sonnenrichtung bzgl. des Frühlingspunktes den Winkel $\omega \cdot t$ bildet, hat die Deferentmitte die Gleichung

$$\bar{D}(t) = e \cdot X_{\sigma} \circ \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t - \omega_S \cdot t) \\ \sin(\omega \cdot t - \omega_S \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der mittlere Mond dreht sich entsprechend um $+\omega_S \cdot t$ gegenüber der Sonnenrichtung.

Aber seine Entfernung von der Erde wird

durch den festen Abstand R zu $\bar{D}(t)$ geregelt, er läuft daher ungleichförmig um die Deferentmitte $\bar{D}(t)$. Zum Drehwinkel $\varepsilon(t)$ verhelfen die Winkelsumme $\delta + 2\omega_S \cdot t + (180^\circ - \varepsilon) = 180^\circ$ und der Sinussatz $\frac{\sin(2\omega_S \cdot t)}{R} = \frac{\sin \delta}{e}$ im Dreieck Erde- $\bar{D}(t)$ -mittlerer Mond:

$\varepsilon(t) = \delta + 2\omega_S \cdot t = 2\omega_S \cdot t + \arcsin\left(\frac{e}{R} \cdot \sin(2\omega_S \cdot t)\right)$. Die Verbindung von $\bar{D}(t)$ zum mittleren Mond bildet mit der x -Achse (Frühlingspunkttrichtung) den Winkel $\omega \cdot t - \omega_S \cdot t + \varepsilon(t)$.

Und der Epizykelradius dreht sich immer noch wie im 1. Modell mit $-\omega_A \cdot t$ gegenüber der Linie Erde-mittlerer Mond, bildet also bzgl. der x -Achse den Winkel $\omega \cdot t + \omega_S \cdot t - \omega_A \cdot t$.

Schließlich ergeben sich die Radien aus der Syzygienbedingung $R+e := 60^p$ zu $e = 10^p;19$, $R = 49^p;41$ bzw. - wie im 1. Modell - $r_{Epiz.} = 5^p;15$ (Pedersen, S. 184ff.). Mit diesen Parametern lautet das mit Rücksicht auf die 2. Anomalie (Evektion) verbesserte

2. Modell der Längenbewegung des Mondes:

$$\bar{m}_2(t) := X_{\sigma} \circ \left[e \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t - \omega_S \cdot t) \\ \sin(\omega \cdot t - \omega_S \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} + R \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t - \omega_S \cdot t + \varepsilon(t)) \\ \sin(\omega \cdot t - \omega_S \cdot t + \varepsilon(t)) \\ 0 \end{pmatrix} + r_{Epiz.} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t + \omega_S \cdot t - \omega_A \cdot t) \\ \sin(\omega \cdot t + \omega_S \cdot t - \omega_A \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} \right],$$

wobei t - wegen der vereinfachten Anfangsbedingungen - seit einer Konjunktion des mittleren Mondes und der mittleren Sonne in Richtung des Frühlingspunktes zu rechnen ist.

Erde E und der mittlere Mond M mit $-\bar{D}(t)$ bzw. $\bar{D}(t)$ bilden: Nennt man die Abschnitte, die die Höhen $c = e \cdot \sin(2\omega_s \cdot t)$ auf (der Verlängerung von) EM erzeugen, a und b , dann werden

$$\tan \phi(t) = \frac{c}{a+2b} = \frac{c}{\sqrt{R^2 - c^2} + 2 \cdot \sqrt{e^2 - c^2}} \text{ bzw. } \sin \phi(t) = \frac{c}{\text{hilf}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + (a+2b)^2}}.^{48}$$

Die entsprechend modifizierte Vektorfunktion heiße $\bar{m}_3(t)$. (Eine Zeichnung findet sich unten im 4. Abschnitt, sie unterscheidet sich freilich kaum von der zum zweiten Modell.)

Die Breitenbewegung:

Das 3. Modell der Längenbewegung berucktigt noch nicht die Mondbreiten über bzw. unter der Ekliptik. Es wurde oben schon erwähnt, daß sich der Mond in einer gegen die Ekliptik angestellten Ebene bewegt und daß folglich nicht bei jedem Umlauf eine Finsternis entsteht. Natürlich hatten die Babylonier auch die Breitenbewegung sehr lange verfolgt: In jeder Saros-Periode von 223 Phasenzyklen kehrte der Mond 242mal auf dieselbe Breite zurück; im Mittel also schon in $\frac{6585\frac{1}{2}d}{242} \approx 27,21d$. Da der Mondmittelpunkt für einen vollen Umlauf $\frac{360^\circ}{\omega_T} \approx 27,32d$ braucht, legt er nur $27,21d \cdot \omega_T \approx 358,6^\circ$ zurück, bevor er wieder aufsteigend durch die Ekliptik wandert und den nächsten „aufsteigenden Knoten“ erreicht. In jedem „drakonitischen Monat“⁴⁹ von $27,21d$ fällt demnach die Knotenlinie in der Ekliptik im Mittel um ca. $1,4^\circ$ zurück. Der korrigierte tägliche Wert bei Ptolemaios ist $\omega_K = \omega_T - \omega_D = -0^\circ;3,10,41,15,26,7$ (Pedersen, S. 164).⁵⁰ Der Anstellwinkel der „Mondenebene“ konnte aus der Beobachtung der maximalen Breite zwischen zwei Knotendurchgangen bei entsprechendem Längenwert zu 5° bestimmt werden (vgl. van der Waerden 1988, S. 274).

⁴⁸ Ptolemaios arbeitete mit seiner Sehrentafel, also sinngemäß mit dem doppelten Sinus. Daher findet man bei ihm nur eine Berechnung im Sinne der letzten Formel (vgl. Pedersen, S. 194).

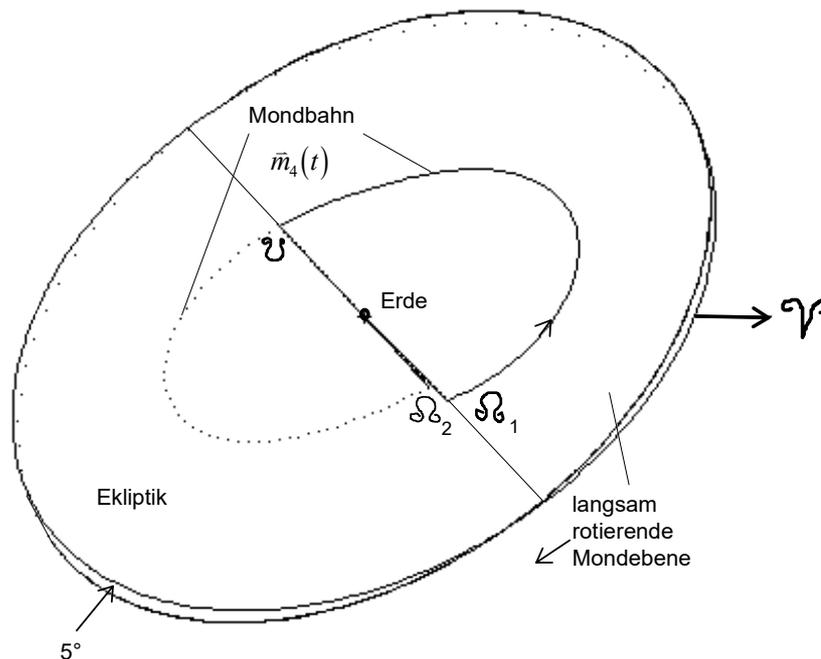
⁴⁹ Rückkehr zum Knoten desselben Typs. Nach alter Vorstellung saßen nahe den Knoten Drachen, die den Mond von Zeit zu Zeit verschlangen, um die Finsternisse zu bewirken - daher die Bezeichnung „drakonitisch“.

⁵⁰ Tatsächlich schwanken sowohl die Bahnneigung (zwischen $4^\circ;49$ und $5^\circ;19$) als auch die Drehung der Knotenlinie in Abhängigkeit zur Sonnenrichtung (Voigt, S. 57).

Die „wahre Mondbewegung“ findet darum bei Ptolemaios auf einer sich drehenden Ebene statt, die um 5° gegen die Ekliptik gekippt ist und die letztere in der mit $\omega_K \cdot t$ rotierenden Knotenlinie schneidet. Wegen der geringen Neigung von 5° kann man einfach die Längenbewegung des 3. Modells um die Knotenlinie kippen.⁵¹ Wir erreichen das am bequemsten, indem wir zunächst das Urbild der Längenbahn mitsamt der Knotenlinie in der Äquator-ebene betrachten, dort in Frühlingsrichtung drehen ($Z_{-\omega_K \cdot t}$), dann um die 5° kippen (X_{5°) und anschließend zurückdrehen ($Z_{\omega_K \cdot t}$), damit die Knotenlinie wieder richtig liegt. Erst am Ende drehen wir alles in die Ekliptik (X_σ). Damit lautet Ptolemaios' endgültiges Mondmodell:

4. Abschließendes Modell der Mondbewegung nach Ptolemaios:

$$\bar{m}_4(t) := X_\sigma \circ Z_{\omega_K \cdot t} \circ X_{5^\circ} \circ Z_{-\omega_K \cdot t} \circ \bar{m}_3(t) \approx X_\sigma \circ Z_{\omega_K \cdot t} \circ X_{5^\circ} \circ Z_{-\omega_K \cdot t} \circ \bar{m}_2(t). \quad ^{52}$$



5. Zur Qualität der Ptolemäischen Mondtheorie

⁵¹ Eine beruhigende Fehlerbetrachtung findet sich bei Pedersen, S. 199f.

Wegen der Vernachlässigungen bei den jeweiligen Anfangswerten können die hier hergeleiteten Bahnkurven nur schlecht mit modernen Berechnungen verglichen werden. Pedersen (S. 198) berichtet von einschlägigen Untersuchungen, wonach das 3. Modell erheblich besser als die vorangehenden ist und die tatsächlichen Längen bis auf einen mittleren Fehler von weniger als $1^{\circ};24$ liefert. Das sind immerhin mehr als zwei Monddurchmesser. Man muß jedoch berücksichtigen, daß die zweitgrößte Bahnstörung durch die Sonne, die „Variation“, erst kurz vor Erfindung des Fernrohrs von Tycho Brahe gegen Ende des 16. Jahrhunderts entdeckt wurde. Diese Störung macht immerhin mit bis zu $40'$ fast die Hälfte des Fehlers aus. Man kann daher verstehen, daß die Ptolemäische Längentheorie, die für die Astrologen das einzig Wichtige war, bis ins 16. Jahrhundert als ausreichend genau angesehen wurde (Pedersen, S. 198; van der Waerden 1988, S. 273).

Anders verhielt es sich mit zwei Schwachpunkten, die Ptolemaios selbst nicht übersehen haben kann: Um die Evekation einzufangen, wurden vom zweiten Modell an ungleichförmige Drehbewegungen und erhebliche Epizykelverschiebungen eingeführt. Ersteres vertrug sich überhaupt nicht mit der zentralen Grundvorstellung der Aristotelischen Physik, nach der den Himmelskörpern ihrer Natur nach ungezwungene Kreisbewegungen zukämen; und letzteres führte zu offensichtlich ganz falschen Abstandsvariationen zwischen Erde und Mond.⁵³ Kopernikus schrieb um 1510 dazu:

„Unsere Vorfahren haben, wie ich sehe, eine Vielzahl von Himmelskreisen besonders aus dem Grunde angenommen, um für die an den Sternen sichtbar werdende Bewegung *die Regelmäßigkeit zu retten...*

... Daher schien es eine bessere Ansicht zu sein, daß dies durch exzentrische Kreise und Epizykel bewirkt wird. Und eben darin ist sich die Mehrzahl der Gelehrten einig.

Aber was darüber von Ptolemaios und den meisten anderen hier und dort im Laufe der Zeit mitgeteilt worden ist, schien, obwohl es zahlenmäßig entsprechen würde, ebenfalls

⁵² Das Bild bezieht sich auf einen drakonitischen Monat Anfangs des dritten Jahres nach t_0 (734. bis 761. Tag).

⁵³ Die jeweiligen Abstände zwischen Erde und Mond und die scheinbare Mondgröße sind neben der Breitenbewegung insbesondere wichtig für eine einigermaßen aussichtsreiche Vorhersage von Sonnenfinsternissen. Hinzu kommt hier noch die „Mondparallaxe“, d.h. die Positionsverschiebung des Mondes für ei-

sehr viel Angreifbares in sich zu bergen. Denn es reichte nicht hin, wenn man sich nicht noch bestimmte ausgleichende Kreise vorstellte, woraus hervorging, daß der Planet sich weder auf seinem Deferenzkreise noch in bezug auf den eigenen Mittelpunkt mit stets gleicher Geschwindigkeit bewegte. Eine Anschauung dieser Art schien deshalb nicht vollkommen genug, noch der Vernunft hinreichend angepaßt zu sein...

... Wer aber meint, dies könne mit einem exzentrischen Kreis erklärt werden, der verfällt - abgesehen davon, daß Ungleichförmigkeit bei Bewegung im Kreise unangebracht ist - in zwei handgreifliche Fehler. Denn mit mathematischer Beweisführung folgt, daß der Mond in den Vierteln, wenn er also im untersten Teil des Epizykels steht, fast viermal so groß erscheinen würde (sofern er nur ganz leuchtete), als bei Neu- und Vollmond. Es sei denn man behauptete ohne Grund ein Anwachsen und Abnehmen seiner Körpergröße... Wenn man aber sorgfältiger untersucht, findet man, daß die Größe in den Vierteln sich nur sehr wenig von der Größe bei Neu- und Vollmond unterscheidet; und daher wird man diese unsere vernünftigeren Überlegung nicht leicht bezweifeln...“ (Kopernikus, S. 9 u. 17f.)

Wegen der langgezogenen Bahnkurve ab dem zweiten Modell, müßte der Mond bei den Quadraturen (Halbmonden) tatsächlich fast doppelt so breit erscheinen wie bei Vollmond und der Erde viel näher sein, nämlich $38;43$ Erdradien (statt modern 56) Erdradien gegenüber der maximalen Entfernung von $e+R+r_{Epiz} = 64$ (entspricht dem modernen Wert).⁵⁴ Die Unterschiede sind so deutlich, daß sie auch Ptolemaios nicht entgangen sein können. Als Astrologe hat er sich aber wohl mehr für die richtige Anpassung der Längen interessiert (van der Waerden 1988, S. 272f.).

Kopernikus hat beide Probleme so zu lösen versucht, daß er den exzentrischen Deferenten durch einen zur Erdmitte konzentrischen mit zusätzlichem Epizykel ersetzte⁵⁵: Der Deferent vollführt bei ihm „im Sinne der Zeichen (von Westen nach Osten) monatliche Umwälzungen um den Erdmittelpunkt“ und trägt den gegenläufigen „Epizykel der ersten Un-

nen Beobachter außerhalb der Erdmitte. Ptolemaios hat sich mit diesen Problemen ausführlich, aber wenig erfolgreich befaßt (vgl. Pedersen, S. 203ff.).

⁵⁴ Ptolemaios mittlere Entfernung $e+R = 59$ Erdradien lag nahe beim modernen Wert von $60,27 r_E$, aber das war ein eher glückliches Resultat aufgrund von Fehlerkompensation (vgl. Pedersen, S. 207).

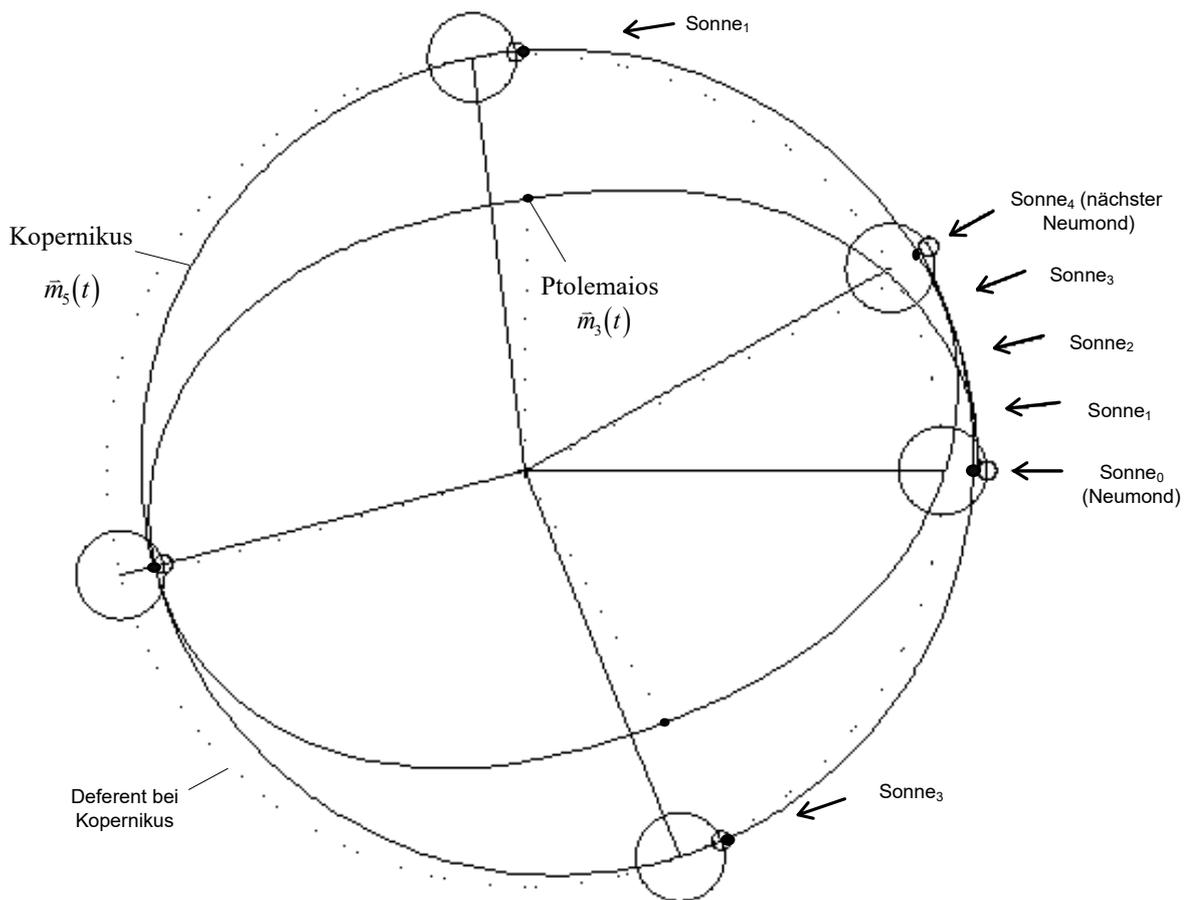
⁵⁵ Die prinzipielle Äquivalenz von Exzenter- und Epizykelmodellen war lange vor Ptolemaios bekannt - vermutlich schon Apollonios (van der Waerden 1988, S. 169).

gleichheit“, der in etwas längerer Zeit als einem Monat einen kleineren rechtläufigen 2. Epizykel mit zwei Umwälzungen je Monat mitführt, um die Ewektion auszugleichen. (Kopernikus, S. 16ff.; Teichmann, S. 45-47)

Da die Breitentheorie bei Kopernikus noch die gleiche wie bei Ptolemaios ist, brauchen wir nur sein Längenmodell mit Ptolemaios' drittem Modell zu vergleichen. In unser Schreibweise lautete Kopernikus' Anpassung (Kopernikus, S. 16-18 u. 44):

$$\bar{m}_5(t) := r_{EM} \cdot X_\sigma \circ \left[\begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t + \omega_S \cdot t) \\ \sin(\omega \cdot t + \omega_S \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{19}{180} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t) \\ \sin(\omega \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{720} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t + 2 \cdot \omega_S \cdot t) \\ \sin(\omega \cdot t + 2 \cdot \omega_S \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Die folgende Abbildung zeigt den Vergleich für einen synodischen Monat in der Ekliptik:



Tatsächlich werden die extremalen Abstandsverhältnisse mit 52:68 Erdradien statt des modernen Verhältnisses 56:64 besser getroffen (Teichmann, S. 46) - allerdings auf Kosten der Längengenauigkeit.

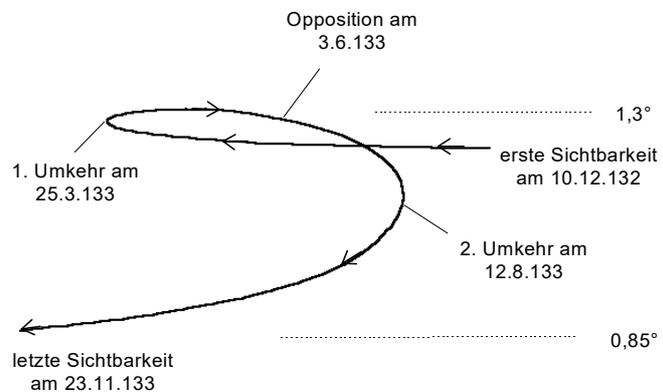
3.3 Bewegung der fünf „echten“ Planeten

Neben Sonne und Mond konnten noch die fünf Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn mit bloßem Auge nahe der Ekliptik beobachtet werden. Ptolemaios konstruierte für jeden dieser (im heliozentrischen Sinne) „echten“ (Sonne-) Planeten ein eigenes Bahnmodell. Im folgenden sollen die Grundgedanken und die wesentlichen Unterschiede skizziert werden.

Grundgedanken:

Im großen und ganzen führen alle Planeten, wie Sonne und Mond, langsame West-Ost-Wanderungen gegen den raschen täglichen Umschwung des Firmaments aus. Während sich Merkur und Venus wie die Sonne einmal im Jahr gen Osten um die Erde bewegen, braucht Mars dafür fast zwei Jahre, Jupiter fast 12 Jahre und Saturn gar 29,5 Jahre. Die genaueren Parameter sind aus langfristigen Beobachtungen ersichtlich. Allerdings treten - anders als bei Sonne und Mond - unterwegs in unregelmäßiger Folge scheinbare Stillstände und Rückläufe gen Westen auf. Bei Merkur und Venus ist deren Zusammenhang mit dem jeweiligen Sonnenstand offensichtlich, aber auch bei den (heliozentrisch:) „äußeren“ Planeten war ein solcher Zusammenhang anzunehmen: Im Gegensatz zu ersteren gelangen Mars, Jupiter und Saturn in beliebige Winkelpositionen zur Sonne und sind deshalb immer wieder auch während der ganzen Nacht zu beobachten. Treten sie dann während einer Rückwärtsbewegung nachts in Opposition zur (auf der Tagseite gedachten) Sonne, so geschieht das genau in der zeitlichen Mitte zwischen den Stillständen, die die Rückläufe einleiten bzw. beenden. Stillstände und

Rückläufe können also wie Oppositionen oder heliakische Auf- und Untergänge als „synodische“, d.h. an die Sonnenbewegung gekoppelte Ereignisse eingestuft werden. Das Bild rechts zeigt eine solche Rückkehrschleife des Saturn zu Ptolemaios' Zeit (nach Pedersen, S. 266).



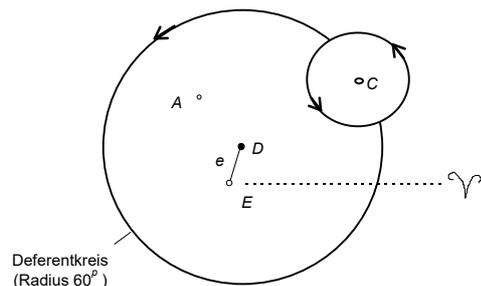
Wie die Erdumläufe zeigen auch die synodischen Ereignisse deutliche Unregelmäßigkeiten, die aber wenigstens langfristig periodisch auftreten und für alle synodischen Ereignisse gleich sind. Aus babylonischen Quellen hatte Ptolemaios die folgenden Planeten-Relationen (van der Waerden 1988, S. 283):

Saturn:	57 synodische Perioden \cong	59 Jahre + 1 ^d ;45	\cong	2 Umläufe + 1°;43
Jupiter:	65 synodische Perioden \cong	71 Jahre - 4 ^d ;54	\cong	6 Umläufe - 4°;50
Mars:	37 synodische Perioden \cong	79 Jahre + 3 ^d ;13	\cong	42 Umläufe + 3°;10
Venus:	5 synodische Perioden \cong	8 Jahre - 2 ^d ;18	\cong	8 Umläufe - 2°;15
Merkur:	145 synodische Perioden \cong	46 Jahre + 1 ^d ;2	\cong	46 Umläufe + 1°.

Daraus ergaben sich für jeden Planeten zwei mittlere tägliche Drehwinkel, nämlich $\omega_S := \frac{\text{syn. Periodenzahl} \cdot 360^\circ}{\text{Gesamtzeit in Tagen}}$ für die synodische Bewegung relativ zum Sonnenstand und $\omega_T := \frac{\text{Gesamtumlaufswinkel}}{\text{Gesamtzeit in Tagen}}$ für die „tropische“ Längenbewegung in der Ekliptik. Bei den beiden „unteren“ Planeten Venus und Merkur ist $\omega_T = \omega_S$, d.h. die mittlere tägliche Sonnenbewegung.

Es lag nun nahe, sich die auffälligen Rückkehrschleifen so zu erklären, daß jeweils ein genügend rasch rotierender Epizykel auf einem Deferentkreis herumgeführt wird. Sollte der Epizykel die synodischen Phänomene erzeugen, dann mußte er irgendwie mit ω_S rotieren. Der Deferent war dann für den Erdumlauf zuständig, und seine Drehgeschwindigkeit sollte demgemäß aus ω_T abgeleitet werden. Die kleinen Breitenbewegungen bzgl. der Ekliptik - im Saturnbeispiel oben zwischen 0,85° und 1,3° - , die die Schleifen vertikal auseinanderziehen, deuteten darauf hin, daß Deferent- und Epizykelebenen in den endgültigen Modellen verschieden zu wählen waren. Wegen der geringen Abweichung befaßte sich Ptolemaios zunächst nur mit der Längenbewegung in der Ekliptik; und so wollen wir es auch vorerst halten.

Auf einem Deferentkreis um D in der Ekliptik bewege sich die Epizykelmitte C mit ω_T .



Wählt man die Drehgeschwindigkeit auf dem Epizykel gleichgerichtet zur West-Ost-Bewegung des Deferenten und in Abhängigkeit von ω_s genügend groß, dann treten auf der Innenseite des Deferenten von Zeit zu Zeit Rückwärtsbewegungen auf. Dies stimmt mit der größeren Helligkeit der Planeten bei Rückläufigkeit überein. Da die beobachteten Schleifen bei jedem Planeten unterschiedlich lang sind, empfiehlt es sich allerdings, nach dem Vorbild der höheren Mondtheorien die Abstände zwischen Erde und Epizykel etwas zu variieren. Dazu wähle man den Deferenten exzentrisch, d.h. der Erdmittelpunkt E liege außerhalb der Deferentmitte D .

Man sollte nun erwarten, daß sich die entstehende Exzentrizität e und der Epizykelradius $r_{Epiz.}$ passend zum Deferentradius mit dem Standardwert $R := 60^p$ so bestimmen ließen, daß der Umschwung von C mit ω_T die beobachteten Phänomene befriedigend genau produzierte. Ptolemaios fand aber die mit diesem Ansatz erzielbaren Ergebnisse unbefriedigend und entschloß sich - ohne nähere Begründung - , eine leicht ungleichförmige Drehbewegung von C um D zuzulassen.⁵⁶ Zur Steuerung der Drehgeschwindigkeit führte er einen „Ausgleichspunkt“ A ein, von dem aus die C -Bewegung auf dem Deferenten gleichförmig erscheint. (Abweichend von der Zeichnung oben ist A bei Ptolemaios außer für Merkur einfach das an D gespiegelte E . Im Fall des Merkur bewegt sich D - analog zur Mondtheorie - noch um E , während A ruht.⁵⁷)

Übersetzt man diesen Modellansatz in die heutige Vektorsprache, dann lassen sich Ptolemaios' Modelle der Längenbewegung in der Ekliptik für die fünf Planeten so darstellen:

$$\vec{p}_i(t) := \vec{D}_i(t) + R \cdot \begin{pmatrix} \cos f_i(t) \\ \sin f_i(t) \end{pmatrix} + r_{Epiz.} \cdot \begin{pmatrix} \cos g_i(t) \\ \sin g_i(t) \end{pmatrix},$$

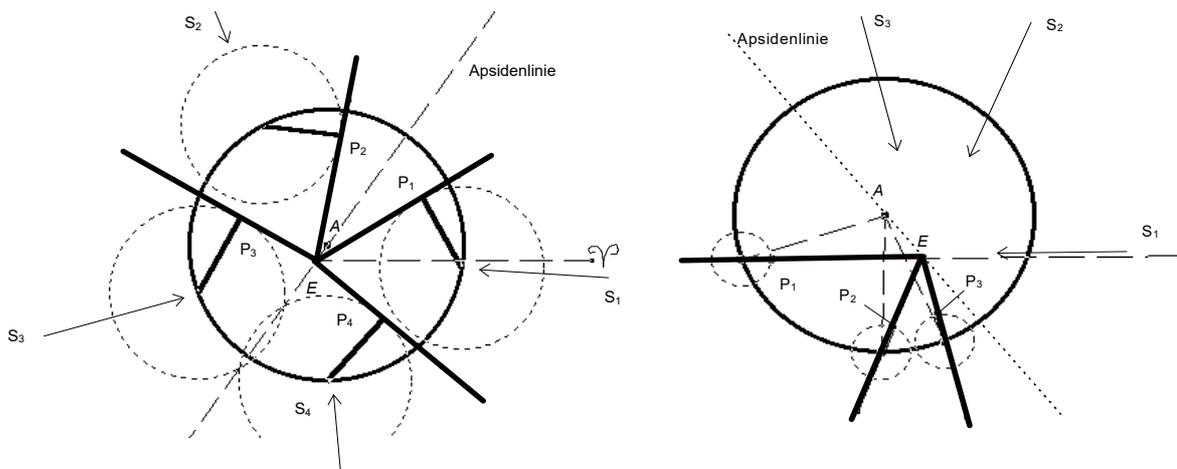
wobei die f_i und - im Fall des Merkur - \vec{D}_i nichtlineare Anteile bezeichnen.

⁵⁶ Das war natürlich wieder ein eklatanter Verstoß gegen das alte Programm zur „Rettung der Phänomene“. Ptolemaios äußerte sich dazu nicht, vermutlich um keinen Staub aufzuwirbeln. Aber Kopernikus kritisierte den Verstoß entsprechend drastisch und ersetzte den Exzenter - wie bei der Mondtheorie auf Kosten der Genauigkeit - durch weitere Epizykel auf einem konzentrischen Deferenten (Kopernikus, S. 19ff.).

⁵⁷ Der Ausgleichspunkt A entspricht bei kleiner Exzentrizität dem zweiten Ellipsenbrennpunkt in der heliozentrischen Auffassung. Da sich Merkur nur maximal 27° von der Sonne entfernt und sehr lichtschwach ist, ließ er sich mit bloßem Auge schwer beobachten. Ptolemaios' Beobachtungsdaten waren entsprechend schlecht und teilweise irreführend (zweifaches Perigäum). Hinzu kommt (aus heliozentrischer Sicht:) die

Gewinnung der Modellparameter

Bei den beiden „inneren“ Planeten Merkur und Venus wurden zunächst maximale Abweichungen vom Sonnenstand beobachtet (linke Abbildung), und bei den „äußeren“ Planeten Oppositionen zur Sonne (rechte Abbildung), wobei sich Ptolemaios immer auf den mittleren ekliptikalischen Stand aus seiner Sonnentheorie stützte.



Bei den inneren Planeten wurden die beobachteten extremen Positionen P_i mit den entsprechenden Sonnenständen S_i verglichen, die wegen $\omega_T = \omega$ zugleich die Lagen der Epizykelmitten anzeigten. Es erwies sich, daß (kurzfristig) P_1 und P_2 bzw. P_3 und P_4 symmetrisch zu einer Geraden durch die Erdmitte lagen. Langfristige Vergleiche zeigten, daß diese „Apsidenlinie“ anscheinend ortsfest an den Fixsternhimmel gebunden war. Dies schien bei allen fünf echten Planeten der Fall zu sein, so daß die Ausgleichspunkte A und - außer bei Merkur - auch die Deferentmittlen D auf diesen Symmetrieachsen zu suchen waren, die langfristig wegen der Präzession mit $\omega_{Apog.} := \frac{1^\circ}{100 \cdot (\text{Jahreslänge in Tagen})} \approx 0^\circ; 0,5,55 \frac{^\circ}{a}$ zur Länge bzgl. des Frühlingspunktes beitrugen.⁵⁸

relativ große Exzentrizität 0,2 der Bahnellipse, die sich schlecht mit den verschachtelten Kreisbewegungen verträgt.

⁵⁸ Nach Hipparchos betrug die Präzession des Frühlingspunktes, d.h. sein Zurückbleiben gegenüber der Fixsternsphäre („mindestens“) 1° je Jahrhundert (moderner Wert: $0^\circ; 0,50/a$). Tatsächlich liegen die Apsidenlinien nicht ganz fest in der Fixsternsphäre, sie führen noch langsame individuelle Eigenbewegungen unabhängig von der Präzession der Äquinoktien aus.

Die Entfernungen AE ergaben sich aus dem Vergleich der Winkel S_iEP_i mit den gemäß der ω_T -Drehung auf dem Ausgleichskreis erwarteten Winkeln. Die Epizykelradien erhielt Ptolemaios im Fall der „inneren“ Planeten direkt aufgrund der linken Abbildung und bei den „oberen“ Planeten mit Hilfe einer zusätzlichen Beobachtung außerhalb einer Opposition. Die Wahl der Deferentmitte D als Halbierungspunkt der Strecke AE ergab sich vermutlich als naheliegendster Interpolationsansatz.

Mit Anfangswinkeln α_i, β_i und γ_i , die sich nach geeigneter Rückrechnung auf den Mittag des julianischen Datums 26.2.747 v. Chr. beziehen (Beginn des 1. Regierungsjahres des Nabonassar von Babylon), lauteten die Ptolemäischen Modelle der ekliptikalischen Längenbewegung von Venus, Mars, Jupiter und Saturn in Vektorschreibweise:

$$\vec{p}_i(t) := e \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha_i + \omega_{Apog.} \cdot t) \\ \sin(\alpha_i + \omega_{Apog.} \cdot t) \end{pmatrix} + 60^p \cdot \begin{pmatrix} \cos f_i(t) \\ \sin f_i(t) \end{pmatrix} + r_{Epiz.} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_i + \omega_T \cdot t + \gamma_i + \omega_S \cdot t) \\ \sin(\beta_i + \omega_T \cdot t + \gamma_i + \omega_S \cdot t) \end{pmatrix},$$

wobei die $f_i(t)$ aus nebenstehender Zeichnung hergeleitet werden können:

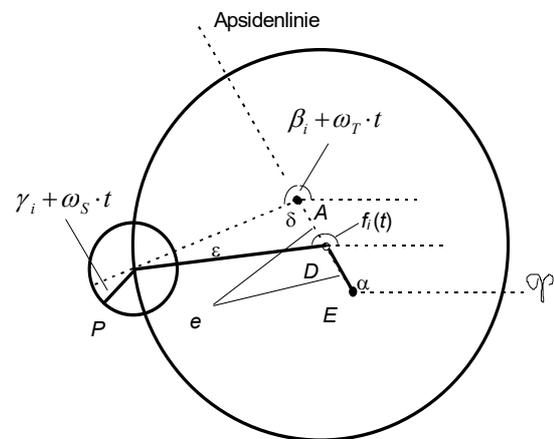
Mit $\frac{\sin \delta}{R} = \frac{\sin \varepsilon}{e}$ ist $\varepsilon = \arcsin\left(\frac{e}{R} \cdot \sin \delta\right)$.

Daher ergibt sich $f_i(t) = \beta_i + \omega_T \cdot t - \varepsilon$. Nun sind noch $\delta = \alpha + 180^\circ - (\beta_i + \omega_T \cdot t)$ und $\alpha = \alpha_i + \omega_{Apog.} \cdot t$, so daß wir schließlich die

Formeln $f_i(t) = \beta_i + \omega_T \cdot t - \arcsin\left(\frac{e}{R} \cdot \sin(\beta_i - \alpha_i + \omega_T \cdot t - \omega_{Apog.} \cdot t)\right)$ für Venus, Mars,

Jupiter und Saturn erhalten.

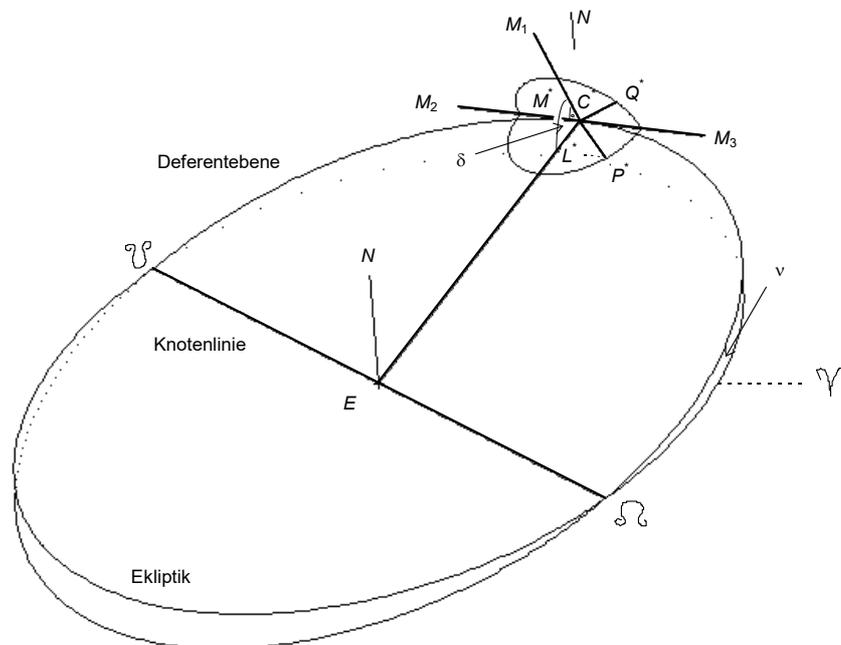
Die einzelnen Parameterwerte können der folgenden Tabelle (nach Pedersen, S. 426ff.) entnommen werden:



Bahnparameter	Anfangswerte 26.2.747 v. Chr.	Winkelgeschwindigkeiten
---------------	-------------------------------	-------------------------

Ptolemaios' Theorie der Breitenbewegung

Um die beobachteten Schleifen in den fünf Planetenmodellen nachahmen zu können, müssen den Längenbewegungen noch geeignete Breitenbewegungen bzgl. der Ekliptik überlagert werden. Das ist das Hauptthema des letzten, 13. Buches des „Almagest“:



Da er den größten Winkelabstand von der Ekliptik bei jedem echten Planeten stets im gleichen Längswinkel zur Apsidenlinie beobachtet hatte, kam Ptolemaios zu der Überzeugung, daß die Knotenlinie jedes echten Planeten - einfacher als beim Mond - in einem charakteristischen festen Winkel zur Apsidenlinie und damit auch zur Fixsternsphäre liege. Um jede solche Knotenlinie wurde zunächst die gesamte Längenbahn des betreffenden Planeten in eine zur Ekliptik um v geneigte „Deferentebene“ gebracht, bevor die Epizykel aus der Deferentebene um δ herausgekippt wurden. Die zueinander senkrechten Strecken CM_1 und M_2M_3 mögen dabei in der gekippten Epizykelebene liegen, und die Ebene ECM_1 ist senkrecht zur Ekliptik zu denken. Der dortige Winkel ECM_1 heiße „Kippwinkel“ δ .

Im „Almagest“ ist die Breitentheorie trotz einiger Verwicklungen leider - besonders für die „inneren“ Planeten - wenig erfolgreich: Nur für die „äußeren“ Planeten sind der Neigungswinkel v konstant und M_2M_3 parallel zur Ekliptik angenommen, während das variable δ

die Epizykelebene zwischen den Knoten aus der Deferentenebene auf- und niederklappt. Bei den „inneren“ Planeten variiert auch noch ν , und M_2M_3 führt zusätzliche Pendelbewegungen bzgl. der Ekliptik aus, so daß die ganze Epizykelbene um C schaukelt...⁵⁹

Ptolemaios war mit dieser komplizierten Theorie offenbar selbst nicht zufrieden, denn in der späteren Schrift „Hypothesen über die Planeten“ hat er die Breitentheorie erheblich vereinfacht und verbessert. Die Schaukelbewegungen entfielen dort ganz, und der Neigungswinkel ν der Deferentenebene blieb konstant. Bei den „äußeren“ Planeten wurden die Epizykel parallel zur Ekliptik belassen⁶⁰, und bei den „inneren“ ein konstanter Winkel zwischen Deferent- und Epizykelebene eingeführt. Diese „Kippwinkel“ $\delta := \angle MCE$ für Venus und Merkur standen jetzt nicht mehr senkrecht zur Ekliptik, sondern (wie EN und C^*N^*) senkrecht zur Deferentenebene - der Unterschied ist freilich wegen $\nu = 0^\circ;10$ sehr gering. Die verbesserten Daten der „Hypothesen“ sind in folgender Tabelle (nach Pedersen, S. 392 und S. 425ff.) zusammengestellt:

i	Planet	κ (aufst.Knoten)	Neigung ν	Kippwinkel δ
1	Saturn	133°	2°;30	Epiz. II Ekliptik
2	Jupiter	71°	1°;30	Epiz. II Ekliptik
3	Mars	85°;30	1°;50	Epiz. II Ekliptik
4	Venus	90°	0°;10	3°;30
5	Merkur	90°	0°;10	6°;30

Die Länge des jeweiligen aufsteigenden Knotens bzgl. des Frühlingspunktes in der Ekliptik und damit zugleich in der schwach geneigten Deferentenebene liegt um κ hinter der der Ap-sidenlinie, d.h. mit den früheren Daten:

$$\lambda_{\kappa_i}(t) := \alpha_i + \frac{1^\circ}{100a} \cdot t - \kappa.$$

⁵⁹ Die Details sind bei Pedersen, S. 355ff., genauer ausgeführt.

⁶⁰ Vom heliozentrischen Standpunkt ist klar, warum das zu einer erheblichen Verbesserung führte: Die Epizykelbewegung stellt die jährliche Erdbewegung um die Sonne aus geozentrischer Perspektive dar.

Dabei ist der Kippwinkel so zu orientieren, daß die größten Breitenauslenkungen während der Rückwärtsbewegungen der Planeten eintreten (vgl. die Abbildung einer Saturnschleife oben).

Vektoriell kann das bzgl. der Ekliptik als x - y -Ebene so erreicht werden:

Stellt man die Epizykelmitten C in der Ekliptik, d.h. die ersten zwei Summanden der Längenbewegung jeweils mit $\bar{c}_i(t) := \bar{D}_i(t) + R \cdot$

$$\begin{pmatrix} \cos f_i(t) \\ \sin f_i(t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dar, dann bekommt man die Epizy-}$$

kelmitten C^* in der geneigten Deferentenebene aus $\bar{c}_i^*(t) := Z_{\lambda_{K_i}} \circ X_v \circ Z_{-\lambda_{K_i}}(\bar{c}_i(t))$ und für die

„oberen“ Planeten ($i = 1, 2, 3$) die Ortskurven

$$\bar{q}_i^*(t) := Z_{\lambda_{K_i}} \circ X_v \circ Z_{-\lambda_{K_i}}(\bar{c}_i(t)) + r_{Epiz.} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_i + \omega_T \cdot t + \gamma_i + \omega_S \cdot t) \\ \sin(\beta_i + \omega_T \cdot t + \gamma_i + \omega_S \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzgl. der Ekliptik.}$$

Für Venus und Merkur kann zunächst der Epizykel mit δ um C aus der Ekliptik gekippt werden. Dabei sei L der Fußpunkt des Lotes der Längenposition P des Planeten in der Ekliptik. Beim Kippen des Epizykels mögen P nach Q und L nach M gehen. Dann sind die Verschiebungsvektoren

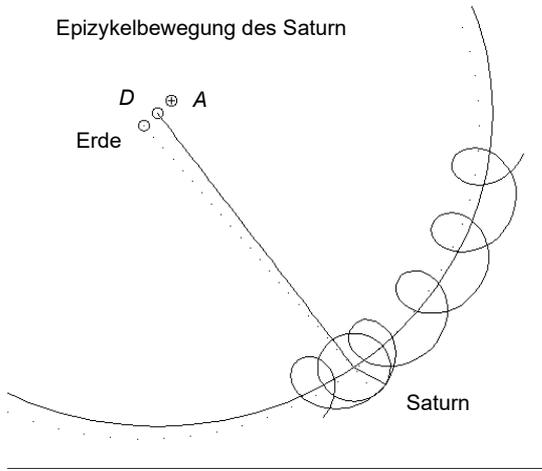
$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{LM} &= CL \cdot \left(\cos \delta \cdot \frac{-\bar{c}_i(t)}{|\bar{c}_i(t)|} + \sin \delta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

wobei CL die Projektion des aktuellen Epizykelradius in der Ekliptik auf EC ist. Die neuen

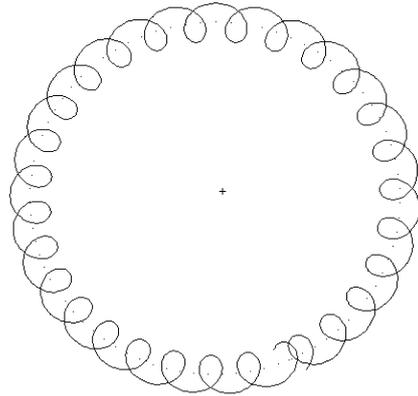
Bahnen von Venus und Merkur haben dann bzgl. der Ekliptik die Form

$$\bar{q}_i^*(t) := Z_{\lambda_{K_i}} \circ X_v \circ Z_{-\lambda_{K_i}} \left[\bar{c}_i(t) + r_{Epiz.} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_i + \omega_T \cdot t + \gamma_i + \omega_S \cdot t) \\ \sin(\beta_i + \omega_T \cdot t + \gamma_i + \omega_S \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} + \overrightarrow{PQ} \right].$$

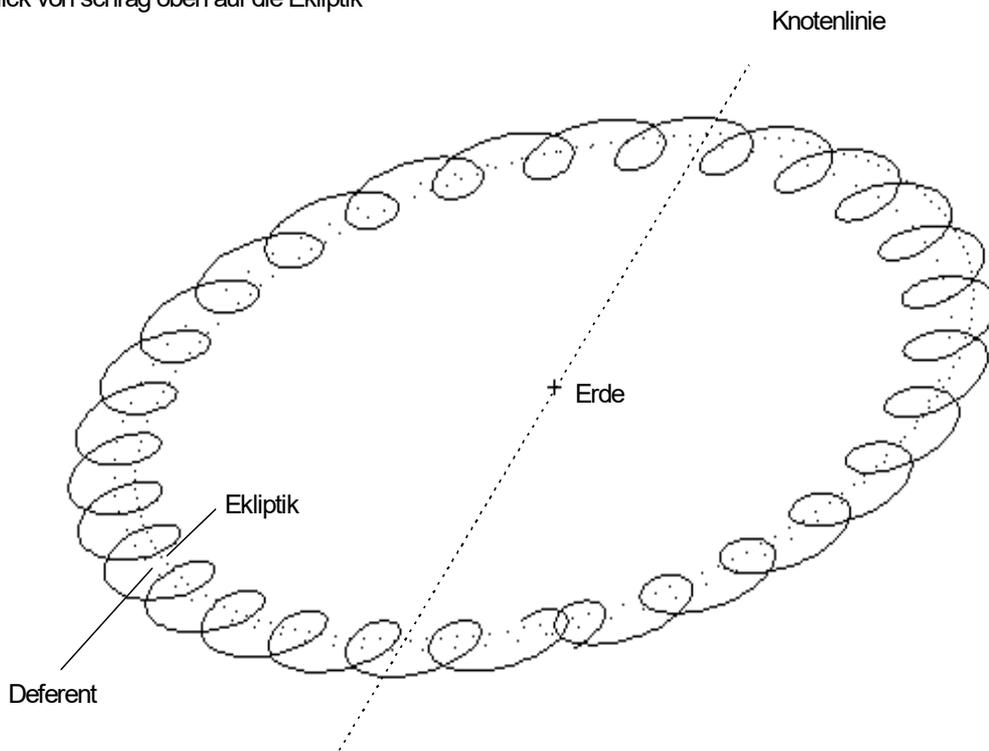
Keplers viel spätere Bemühungen, die Parameter des Ptolemäischen Modells im Fall des Mars so anzupassen, daß es die zeitgenössischen Beobachtungen Tycho Brahes korrekt wiedergab, führten ihn auf die Vermutung, gerade die Schwierigkeiten der Breitenbewegung hätten Ptolemaios zur Einführung des Ausgleichspunktes gezwungen (Pedersen, S. 278). Tatsächlich gelang es Kepler nicht, die Breitenbewegung im Exzenter-Epizykel-Modell ohne Schaden für die Längenbewegung für die gewachsenen Genauigkeitsansprüche zu retten... Aber das ist eine andere Geschichte.



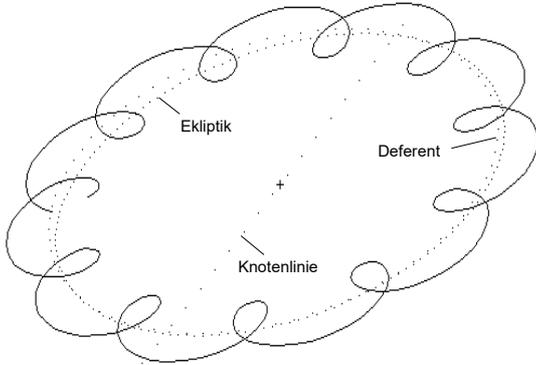
geozentrische Längenbewegung des Saturn über 29.5 Jahre (vom Nordpol der Ekliptik gesehen)



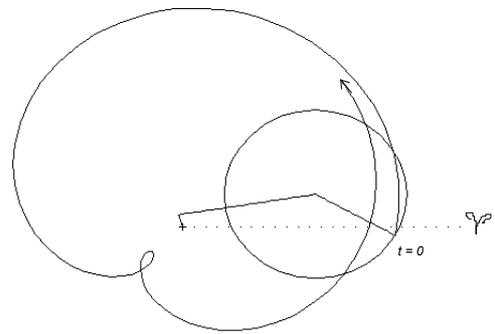
Saturnbewegung über 29,5 Jahre im Blick von schräg oben auf die Ekliptik



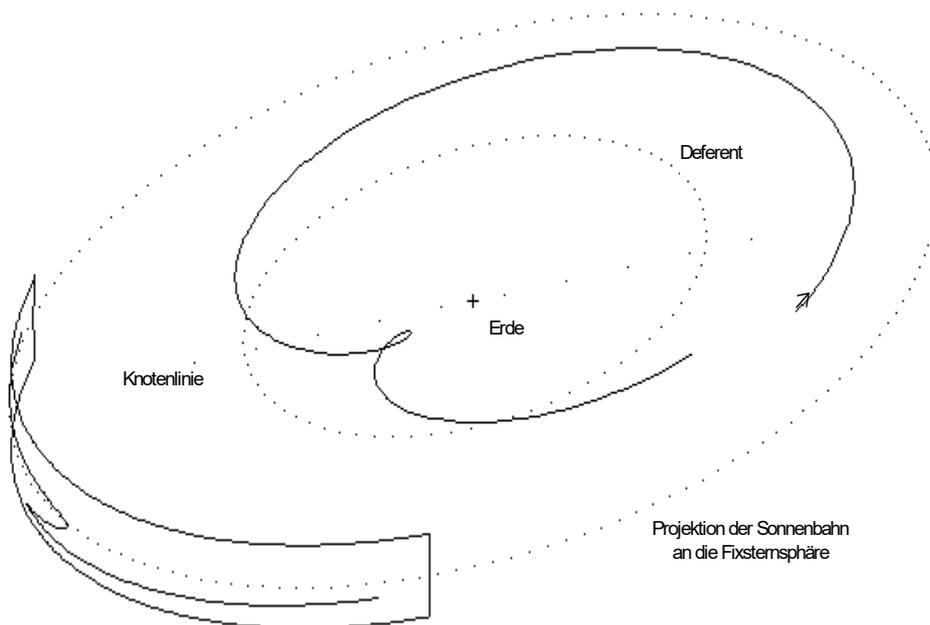
Jupiterbahn über 11.86 Jahre
 im Blick von schräg oben auf die Ekliptik



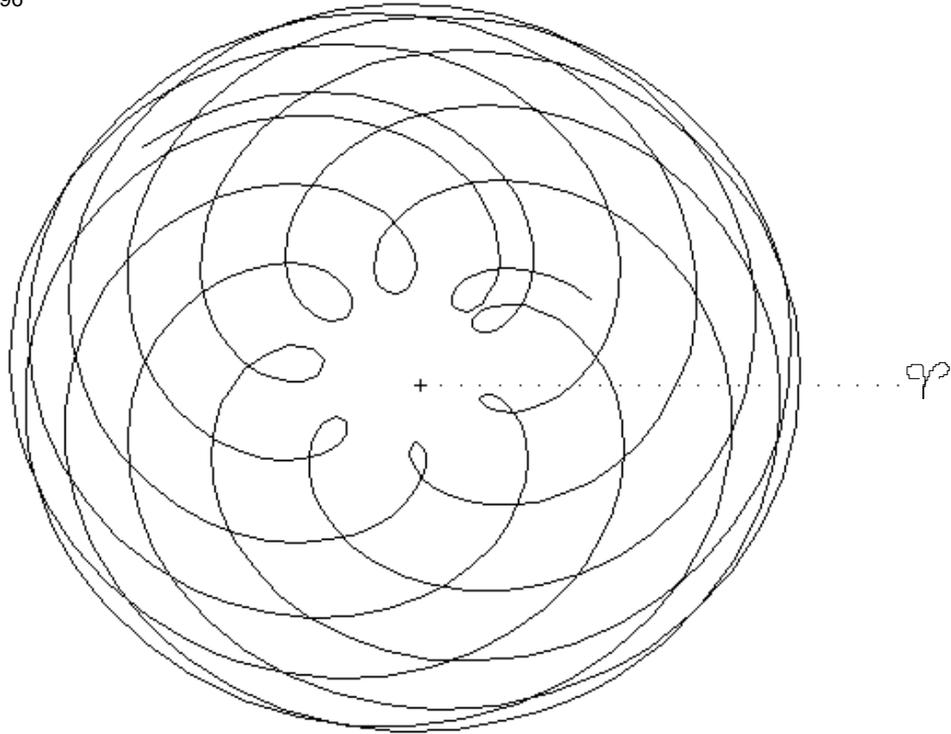
Marsbahn über 2,14 Jahre
 im Blick vom Nordpol der Ekliptik



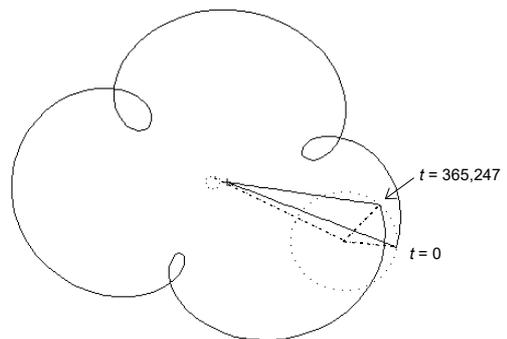
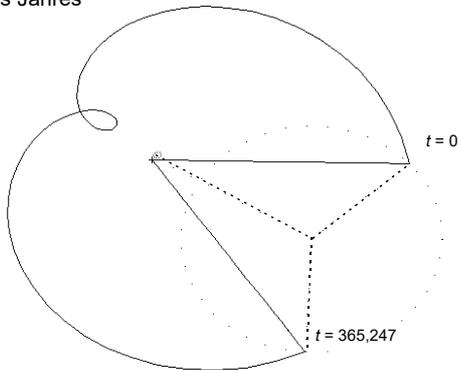
Marsbahn über 1,88 Jahre
 im Blick von schräg oben auf die Ekliptik
 (links unten ist ein Ausschnitt der von der Erde gesehenen
 Projektionskurve auf der Himmelssphäre gezeigt)



Marsbahn nach
Ptolemaios zwischen
1580 und 1596

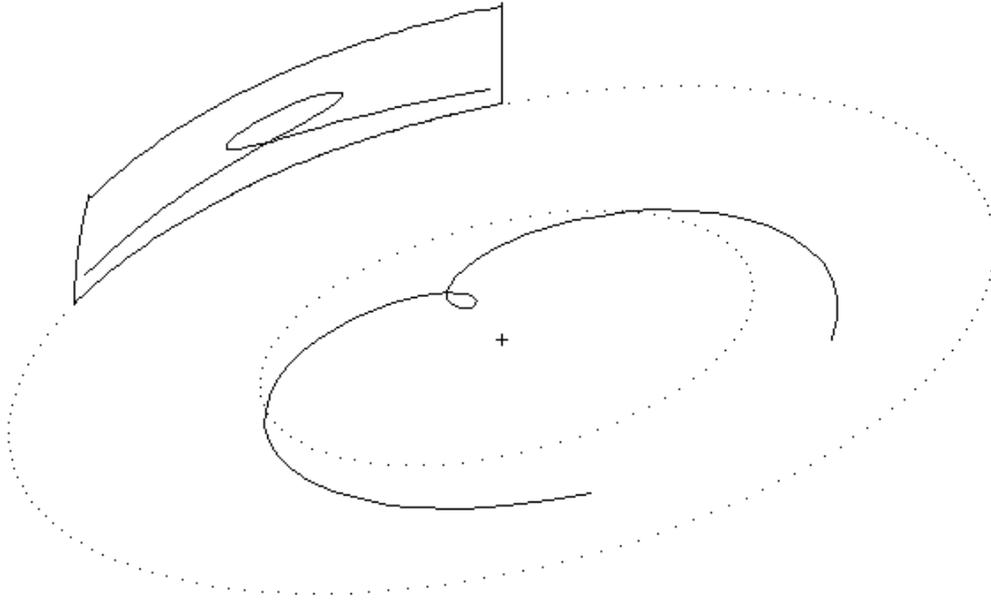


Venusbahn während
eines Jahres

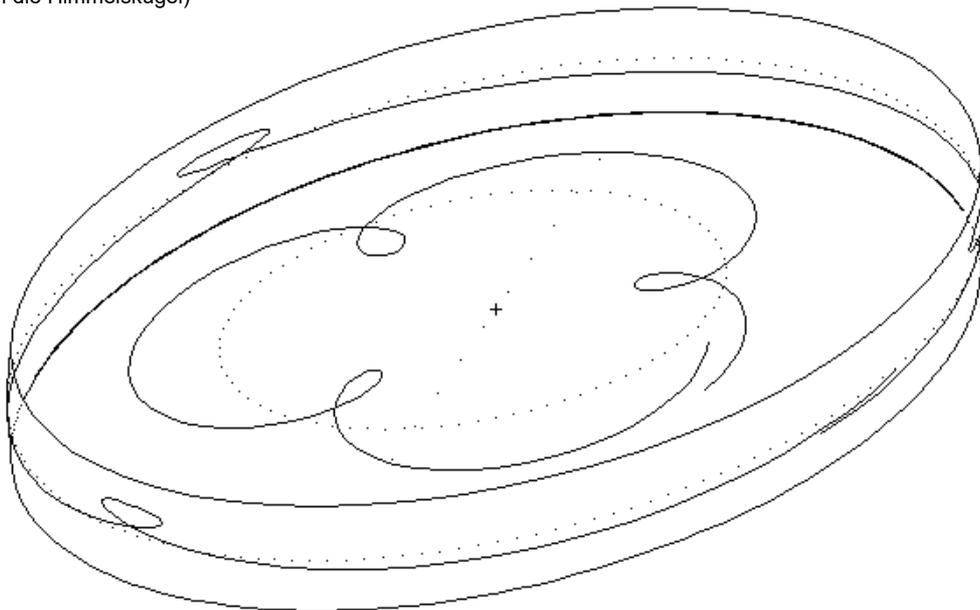


Merkurbahn während
eines Jahres

Venusbahn über ein Jahr
(mit Ausschnitt der Projektion an die
Himmelskugel nördlich der Ekliptik)



Merkurbahn für ein Jahr
(mit Ausschnitt der Projektion
an die Himmelskugel)



4. Didaktische Bemerkungen

Die vorstehende Schilderung der Beobachtungen und mathematischen Konzepte, die schließlich zum sogenannten Ptolemäischen Weltbild geführt haben, ist *nicht* als Einführung in die heutige mathematische Astronomie gemeint, sondern als Einblick in die Frühgeschichte der Elementar- und höheren Mathematik auf der Linie astronomischer Erkenntnisinteressen. Es wurde ja versucht, mit den kinematischen Ansätzen des Altertums, d.h. insbesondere: ohne Gravitationsgesetz und Analysis, auszukommen; lediglich die heutigen Begriffe und Schreibweisen wurden der Kürze und Verständlichkeit halber frei benutzt. Um es noch einmal zu betonen: So, wie Ptolemaios' Modelle oben beschrieben sind, steht es nicht im „Almagest“⁶¹. Dort werden vielmehr Anleitungen zur Berechnung konkreter Planetenpositionen begründet, beschrieben und tabelliert. Die Ausdrucksweise ist informell, oft weitschweifig und für heutige Leser ohne einschlägige Vorkenntnisse kaum verständlich. Daher haben wir uns nicht an die Manitius-Übertragung der Originaltexte, sondern im wesentlichen an Pedersens ausgezeichneten „Survey...“ in moderner Sprache gehalten.

Unser Interesse galt demnach auch nicht in erster Linie dem historischen „Almagest“ und den sogenannten „Verbrechen“ Ptolemaios', viele seiner angeblichen Beobachtungsdaten passend zur Theorie frisiert zu haben. Mögen R. R. Newtons diesbezügliche Vorwürfe auch vom Standpunkt der Historiographie der praktischen Astronomie noch so berechtigt sein, die Disqualifikation, der sich auch van der Waerden 1988 anschloß, wirkt nach fast zwei Jahrtausenden etwas merkwürdig. Die Qualität der Ptolemäischen Beobachtungsdaten ist natürlich seit der Blütezeit der indischen und arabischen Astronomie überholt, spätestens seit Tycho Brahe und der rasch darauf folgenden Erfindung des Fernrohrs zu Keplers Zeiten. Für uns lehrreich sind nicht die Daten, sondern die mathematische Vorgehensweise, die „Große Zusammenfassung“ wie Himmelserscheinungen mathematisiert werden konnten.

⁶¹ Die arabische Bezeichnung „Almagest“ stammt vom Titel „Kitab al-mijisti“, „Buch al-mejisti“, einer Übersetzung, die in Bagdad um 830 erschienen ist. Ptolemaios' Titel war „Mathematikes Syntaxeos biblia $\overline{\tau\gamma}$ “, „Die mathematische Zusammenfassung in 13 Büchern“. Inzwischen war daraus vermutlich die „Große Zusammenfassung“, „Megale syntaxis“, geworden, und der Superlativ von „megale“ ist „megiste“. Vielleicht wurde daraus dann mit Artikel das arabische Wort „al-mejisti“. (Vgl. Pedersen, S. 15)

Diese Vorgehensweise ist in der Tat ein Musterbeispiel problemorientierten Arbeitens, und in seiner genetischen Darstellung noch dazu eines von höchstem historischen Rang. Wenn heute angesichts der neuen Rechenhilfsmittel wieder von vielen Seiten für die ausgiebige Behandlung von Kurven im Mathematikunterricht plädiert wird⁶², dann überwiegen in der Regel die formalbildenden Argumente, man könne diese oder jene Standardtechnik besonders gut an Kurven lernen. Die aus- oder angefügten Hinweise auf die eine oder andere materiale Anwendung reichen aber selten aus, den Verdacht des Eklektizismus zu zerstreuen. Was kann, was soll Allgemeines an Kurven gelernt werden, das nicht auch am Herkömmlichen zu lernen wäre?

Die Kurven der Ptolemäischen Planetenmodelle wirken in diesem Sinne vielleicht ebenso eklektisch. Stellen sie denn mehr als eine historische Reminiszenz dar? Ich bin fest davon überzeugt.

Zunächst einmal: Ptolemaios' Bahnbestimmungen waren der bewunderungswürdige Versuch, die Himmelsbewegungen aus einem überzeugend begründeten theoretischen Grundprinzip herzuleiten, nämlich dem der Kreisbewegung, die in sich vollkommen, affektfrei, antriebslos und ewig, kurz: dem unerreichbaren Himmel gemäß schien.

„Daß ich sterblich bin, weiß ich, und daß meine Tage gezählt sind. Aber wenn ich im Geiste den vielfach verschlungenen Kreisbahnen der Gestirne nachspüre, dann berühre ich mit den Füßen nicht mehr die Erde: am Tische des Zeus selber labt mich Ambrosia, die Götterspeise.“ (zitiert nach van der Waerden 1988, S. 256)

Der Ansatz - von einer theoretischen Hypothese über erste Modelle, deren Falsifikation an empirischen Daten und immer besser angepaßten Modellen zur Modifikation der Ausgangshypothese - ist charakteristisch für große Mathematisierungen von Naturerscheinungen geblieben.

„Nun fanden wir aber bei fortgesetzter genauer Anpassung und Vergleichung des von Fall zu Fall durch Beobachtung festgestellten Laufs mit den aus der Kombination der

⁶² Die Argumente sind umfassend bei Schupp/Dabrock zusammengetragen.

beiden Hypothesen sich ergebenden Leitpunkten, daß der Verlauf der Bewegung nicht so einfach sein könne,“ erklärt Ptolemaios lapidar zu seiner Einführung des Ausgleichspunktes. (loc. cit., S. 286)

„Die Einfachheit der Vorgänge am Himmel darf man nicht nach dem beurteilen, was uns Menschen als einfach gilt, zumal man auf Erden über den Begriff ‘einfach’ keineswegs einig ist... Man muß vielmehr in seinem Urteil von der Unwandelbarkeit der am Himmel selbst kreisenden Geschöpfe und ihrer Bewegungen ausgehen; nur unter diesem Gesichtspunkt können sie alle ‘einfach’ erscheinen, ja noch in einem höheren Grade einfach als die Dinge, welche auf Erden als einfach gelten, weil kein Mühsal, kein Notzustand bei den Umläufen dieser Wesen denkbar ist.“ (Almagest, 13. Buch, Kap. 2)

Nach den Erfahrungen der Physik des 20. Jahrhunderts liest sich das wohl nicht mehr als Ausrede zum gescheiterten Programm der „Rettung der Phänomene“ durch gleichförmige, zur Erdmitte konzentrische Kreisbewegungen. Die Mathematisierungsmethode Ptolemaios’ an sich blieb paradigmatisch.

Material galt der „Almagest“ mit seiner Sehnentafel als historischer Anfang der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Das ist heute nicht mehr haltbar. Die Anfänge reichen viel weiter zurück, wenigstens bis Apollonios und Hipparchos, wahrscheinlich aber bis ins vierte oder fünfte vorchristliche Jahrhundert bei den Griechen und vielleicht noch viel weiter bei den Chaldäern. Das ist deswegen wichtig, weil die Überzeugung immer hinfalliger wird, Euklid habe seine „Elemente“, das Stammbuch der Elementarmathematik, aus dem „platonischen“ Geiste Reiner Mathematik geschöpft. Die bis zur Neuzeit andauernde friedliche Koexistenz des Aristotelischen Universums innerhalb der Himmelsphäre mit den (potentiell) unendlichen Geraden und Ebenen der euklidischen Geometrie sollte zu denken geben. Ich kann nicht glauben, daß man letztere einfach als Bewohner eines Gedankenreiches hinnahm, das viel, viel weiter reichte als die Sphäre der Götter. Eher ist anzunehmen, daß in der Geometrie - wie im alltäglichen Zahlenrechnen - eine endlich-konstruktive Sichtweise vorherrschte. Auch heute läßt sich wohl noch nicht sagen, wir hätten den Widerspruch im Kern aufgelöst (vgl. etwa Jammer).

Unser Bericht über die vermutliche Genesis der geometrischen Astronomie in der griechischen Antike sollte auch zeigen, was gedanklich zu leisten war, bevor Trigonometrie entstehen konnte. Die Elementargeometrie und die propädeutische Analysis unserer heutigen Schulprogramme waren das Mindeste. Es liegt für mich sehr nahe, daß sie, d.h. die höhere Elementarmathematik unserer Curricula, aus astronomischem Erkenntnisinteresse heraus entstanden sind. Nicht nur die 360° des Vollkreises (der Ekliptik), das 60er-System der Zeitrechnung, unser Sonnenjahr, die schiefe Zwölftteilung in aufgerundete Mondmonate und Tageshälften, die Trigonometrie, (Längen- und Breiten-) Koordinaten und viele Begriffe der Geometrie, Geographie und Astronomie stammen daher, sondern auch viele tiefere Sätze über das Verhältnis von Kreisen und Geraden, die Motive für nichtlineare Raumgeometrie, für zeitlich funktionale Interpolationen und für einen ernsthafteren Geschwindigkeitsbegriff. Nicht zuletzt ist der erste Grund zu nennen, sich mit „astronomisch“ großen Zahlen und verwickelten Brüchen genau und approximativ auseinanderzusetzen. Man mußte das alles lernen, weil man verstehen wollte, was man als übermenschlichen Entwurf am Himmel sah.⁶³ Und als man es gelernt hatte, erfuhr man wunderbarerweise viel mehr über die Erde, auf der man lebte. Unser Vertrauen in wissenschaftliche Möglichkeiten hat zweifellos solche Wurzeln.

Es trifft sich gut, daß uns die Computerwerkzeuge und die Vektorrechnung heute bequem Bilder liefern, für die noch vor einer Generation nur wenige die Geduld aufbrachten. Schon im bescheidenen Rahmen eines Grundkurses zur Vektorgeometrie kann wenigstens gezeigt und erklärt werden, was die Großen der frühen Astronomie und Mathematik bis Kopernikus, Kepler und Newton bewegt hat, und es würde sicher nicht schaden, wenigstens skizzenhaft zu erzählen, wie es über Laplace und Gauß bis in unsere Zeit weiterging.⁶⁴ Viel wichtiger aber ist es, vernünftige Haltungen zur Welt der Phänomene zu fördern, etwa das Strukturieren und Prognostizieren durch Mathematisieren. Bei der „Rettung der Phänomene“ geriet offenbar der Weg zum Ziel, und der Dogmatiker Kopernikus zum Revolutionär wider Willen - wie es oft geht.

⁶³ Geld verdienen konnten damit wohl i.allg. nur die Astrologen - aber die standen zeitweilig in hohem Ansehen...

⁶⁴ Schließlich verlangt man vom Deutsch-, Kunst- und Musikunterricht auch nicht, nur solche Werke zu behandeln, die die Schüler selbst erfinden können.

Literatur:

- S. Abramowski/H. Müller: Geometrisches Modellieren. Mannheim: BI 1991.
- Archimedes: Werke (Übersetzung von A. Czwalina). Darmstadt: Wiss. Buchges. 1972.
- H.-G. Bigalke: Kugelgeometrie. Frankfurt/M.: Salle/Sauerländer 1984.
- H. Dörrie: Triumph der Mathematik. Würzburg: Physica (5°) 1958.
- F.A. Dreier: Winkelmeßinstrumente. Berlin: Kunstgewerbemuseum 1979.
- O. Giering/J. Hoschek (Hrsg.): Geometrie und ihre Anwendungen. München/Wien: Hanser 1994.
- R.-H. Giese: Einführung in die Astronomie. Darmstadt: Wiss. Buchges. 1981.
- R. Girard: Die ewigen Mayas. Wiesbaden: Vollmer o.J.
- W. Großmann: Vermessungskunde, Band 3. Berlin: de Gruyter (Samml. Göschen; 8°) 1965.
- A. Guthmann: Einführung in die Himmelsmechanik und Ephemeridenrechnung. Mannheim: BI 1994.
- H.-W. Henn(Hrsg.): Computereinsatz im Geometrieunterricht II. MU 41.1 (1995).
- D.B. Herrmann: Vom Schattenstab zum Riesenspiegel. Berlin: Neues Leben 1978.
- J.E. Hofmann: Geschichte der Mathematik, Band 1. Berlin: de Gruyter (Samml. Göschen) 1963.
- M. Jammer: Das Problem des Raumes - Die Entwicklung der Raumtheorien. Darmstadt: Wiss. Buchges. 1960 (engl. Original: Cambridge, Mass., 1954).
- R. Joeckel/M. Stober: Elektronische Entfernung- und Richtungsmessung. Stuttgart: Wittwer (2°) 1991.
- H.-U.Keller: Das Himmelsjahr 1996. Stuttgart: Kosmos-Franckh 1995.
- (N. Kopernikus): Erster Entwurf seines Weltsystems - nach den Handschriften hrsg., übers. u. erl. von F. Rossmann. Darmstadt: Wiss. Buchges. 1986.
- F. Krafft/A. Meyer-Abich: Große Naturwissenschaftler - Biographisches Lexikon. Frankfurt/M.: Fischer TB 1970.
- E.C. Krupp: Astronomen, Priester, Pyramiden - Das Abenteuer Archäoastronomie. München: C.H. Beck 1980.
- A. Lübke: Das große Uhrenbuch. Tübingen: Wasmuth 1977.
- R. Luthardt: Sonneberger Jahrbuch für Sternfreunde '96. Frankfurt/M.: H. Deutsch 1995.
- H. Mehrrens: Moderne - Sprache - Mathematik. Frankfurt/M.: Suhrkamp 1992.
- R. R. Newton: The Crime of Claudius Ptolemy. Baltimore: Univ. Pr. 1977.

- W. Papke: Die geheime Botschaft des Gilgamesch. Augsburg: Weltbild 1994.
- O. Pedersen: A Survey of the Almagest. Odense: Odense Univ. Press 1974.
- C. Ptolemäus: Handbuch der Astronomie. (Übersetzung und Erläuterungen von K. Manitius, Leipzig 1912-1913; Neuausgabe mit Vorwort und Berichtigungen von O. Neugebauer:) Leipzig: Teubner 1963.
- H. Rixecker: Sonnenuhren. PM 5(1982), 146-150.
- I.D. Rozanskij: Geschichte der antiken Wissenschaft. München: Serie Piper 1984.
- S. Sambursky (Auswahl u. Einl.): Der Weg der Physik - 2500 Jahre physikalischen Denkens - Texte von Anaximander bis Pauli. München: dtv 1978.
- L. Schele/D. Freidel: Die unbekannt Welt der Maya. München: Knaus 1991.
- I. Schneider: Archimedes. Darmstadt: Wiss. Buchges. 1979.
- H. Schupp/H. Dabrock: Höhere Kurven. Mannheim: BI 1995.
- A. Szabó/E. Maula: Enklima - Untersuchungen zur Frühgeschichte der griechischen Astronomie, Geographie und der Sehnentafeln. Athen: Forschungsinst. für griech. Philosophie der Akademie Athen 1982.
- A. Szabó: Das geozentrische Weltbild. München: dtv wissenschaft 1992.
- A. Szabó: Die Entfaltung der griechischen Mathematik. Mannheim: BI 1994.
- J. Teichmann: Wandel des Weltbildes. München: Deutsches Museum 1983. (1985 auch als Rowohlt Taschenbuch erschienen: ISBN 3 499 17721 8 - im Text wird die Münchner Ausgabe zitiert)
- B.L. van der Waerden: Erwachende Wissenschaft, Band 2 - Die Anfänge der Astronomie. Basel: Birkhäuser (2°) 1980.
- B.L. van der Waerden: Die Astronomie der Griechen. Darmstadt: Wiss. Buchges. 1988.
- H.H. Voigt: Abriss der Astronomie. Mannheim: BI (5°) 1991.
- W. Westphal: Die Maya. München: Bertelsmann 1986.
- H. Wussing: Mathematik in der Antike. Aachen: Mayer 1962.