Gekürzte Fassung erschienen in: Praxis der Mathematik 43.2 (2001), 57-67.

Kubische Gleichungen und die widerwillige Entdeckung der komplexen Zahlen - Zwei Beispiele zur historisch-genetischen Methode

von Lutz Führer, Frankfurt am Main

Vor einigen Jahren wurde ich vom Physikkollegen und ein paar aufgeweckten Schülern gebeten, im Unterricht etwas über komplexe Zahlen zu verraten. So etwas passiert einem Mathematiklehrer nicht jeden Tag, also wollte ich mir Mühe geben und die Sache möglichst spannend anfangen: Wo kamen die „imaginären“ Monster eigentlich her? Was waren die ursprünglichen Erkenntnisinteressen der Erfinder? Es stellte sich heraus, daß die Frage es in sich hatte und daß sie mir im Laufe der Jahre noch einige überraschende Einsichten von recht allgemeiner Bedeutung bescheren sollte. Da die Zusammenhänge nur umständlich aufzufinden waren, möchte ich im folgenden ein wenig von meiner Entdeckungsreise berichten. Ich glaube, daß es sich gerade heute, wo der Algebraunterricht ins publizistische Gerede gekommen ist, lohnt, diese Geschichte in Erinnerung zu bringen. Sie scheint mir nämlich ein bezeichnendes Licht auf die Herkunft abstrakter Denkweisen in der Mathematik zu werfen.

Überdies ergeben sich zwei lohnende Beispiele historisch-genetischer Heuristik: Einerseits wird sich am Versuch einer historisch korrekten Rekonstruktion der Entdeckung der Cardanischen Formel zeigen, daß geometrische Denkweisen gelegentlich algebraischen überlegen sind. Von dieser Perspektive ausgehend, soll dann zum anderen ein fiktiver Gedankengang illustrieren, welche Erkenntnisinteressen und welche Anstrengungen schließlich zur Geburt der modernen abstrakt-algebraischen Sichtweisen geführt haben. In diesem Teil der Darstellung wird nicht mehr versucht, die tatsächliche historische Entwicklung nachzuzeichnen; er folgt vielmehr einer didaktischen Auffassung, die Otto Toeplitz einst mit Bezug auf die Analysis propagierte: „Ich will aus der Historie nur die Motive für *die* Dinge, die sich hernach bewährt haben, herausgreifen und will sie direkt oder indirekt verwerten... Nicht um die *Geschichte* handelt es sich, sondern um die *Genesis* der Probleme, der Tatsachen und Beweise, um die entscheidenden Wendepunkte in dieser Genesis...“ (Toeplitz, S. 94)

Wozu also komplexe Zahlen? Bekanntlich erweitert man die natürlichen Zahlen zu den ganzen, rationalen oder reellen Zahlen, um Fallunterscheidungen zu vermeiden und gewisse einfache Gleichungen als unbeschränkt lösbar anzusehen. Diese Sichtweise stimmt zwar nicht ganz, weil so nur die algebraischen reellen Zahlen entstehen - und nach Cantor gibt es viel mehr vom transzendenten Typ -, aber in der Schule ist es wohl die übliche Perspektive auf die aperiodischen Dezimalzahlen. Sollen nun alle quadratischen Gleichungen als lösbar betrachtet werden oder will man gar den Fundamentalsatz der Algebra ansprechen, dann muß man den Körper $\mathbb{R}$ wenigstens um $\sqrt{-1}$ erweitern, und das reicht dann auch schon für den Fundamentalsatz. So weit, so gut, und die Geschichte dazu ist auch in groben Zügen geläufig: Cardano löst in der *Ars magna* von 1545 die quadratische Gleichung $x \cdot (10 - x) = 40$ mit *„5.p. ℞. m.15“* und *„5.m. ℞. m.15“*; der Niederländer Albert Girard vermutet 1629 den Fundamentalsatz; Leibniz und Johann Bernoulli erörtern Logarithmen aus negativen Zahlen; Euler klärt die Zusammenhänge und benutzt die komplexen Zahlen umfassend; und Gauß beweist endlich 1799 den Fundamentalsatz in seiner Dissertation, nachdem es Kapazitäten wie d'Alembert, Euler, Lagrange und Laplace nicht ganz geschafft hatten[2].

Leider besteht diese Kurzgeschichte im wesentlichen aus Halbwahrheiten. Cardano selbst und noch viele seiner Nachfolger haben quadratische Gleichungen mitnichten als ernsthaften Anlaß gesehen, sich mit komplexen Zahlen zu befassen. Sie betrachteten solche Gleichungen als skurrile, aber „falsche“ oder „unmögliche“ Aufgaben.[3] „Wahre“ Aufgaben mußten vorläufig - wenn auch in zunehmend großzügigerer Weise - anschaulich, d.h. geometrisch, deutbar sein, durften also nur positive reelle Koeffizienten enthalten. Quadratische Gleichungen ohne reelle Lösung galten damals - wie heute üblicherweise in der Schule auch - schlicht als unlösbar. Viel eher hat der Fundamentalsatz seit Girard und Descartes dazu geführt, den komplexen - und übrigens auch der Null und den negativen - Zahlen allmählich Bürgerrecht in der wissenschaftlichen Mathematik einzuräumen.[4] Erst Anfang des 19. Jahrhunderts wurden die Zweifel eines Cardano[5], Descartes [6], Leibniz[7], Newton[8] oder Euler[9], ob es die imaginierten Zahlen denn überhaupt gebe, endgültig beiseite geschoben: Sie funktionierten halt gut[10], und man konnte sie als geometrische „Größen“ veranschaulichen, nämlich als Maßzahlen ebener Vektoren oder Drehstreckungen.[11] Daß sie im wahrsten Sinne des Wortes „unheimlich“ gut funktionierten, mußte schon Cardano bei dem Thema erleben, für das seine *Ars magna* unsterblich wurde:

1. Kubische Gleichungen

Das ursprüngliche Problem der Algebra war
die „Auflösung algebraischer Gleichungen“.
Otto Haupt (Band 1, S. 144)

Schauen wir uns zunächst die klassische Lösungstechnik in heutiger Schreibweise und ohne unterrichtsmethodische Rücksichten an. Auf die Unterrichtsfrage werde ich im zweiten Abschnitt im Zusammenhang mit historischen Details zurückkommen.

Mit Hilfe der ersten binomischen Formel lassen sich quadratische Gleichungen auf Scheitelpunktsform bringen. Anschließend ist die Lösung bekanntlich ein Kinderspiel. Wie wirkt sich dieses Verfahren bei „kubischer Ergänzung“ aus? Im Beispiel

(1) $$y^3 - 12y^2 + 54y - 108 = 0$$

betrachte man die ersten zwei Summanden als Rumpf eines kubischen Binoms. Es muß sich um

(2) $$\left(y - \tfrac{12}{3}\right)^3 = y^3 - 12y^2 + 48y - 64$$

handeln. Leider stimmt die rechte Seite von (2) nicht mit der linken von (1) überein; aus (1) wird lediglich

(1’) $$(y-4)^3 + 6y - 44 = 0$$

bzw.

(1’’) $$\left(y-4\right)^3+6\cdot\left(y-4\right)-20=0\,.$$

Natürlich ersetzt man die Klammer durch eine neue Variable, etwa $x := y$-4, und erhält für (1) die sogenannte „Normalform“, nämlich

(3) $$x^3+6x-20=0\,.$$

Die Normalform wirkt zwar etwas einfacher als die Ausgangsgleichung (1), es bleibt aber noch unklar, wie sie systematisch aufzulösen ist, wenn man sich nicht aufs Raten ($x_1 = 2$) oder Approximieren verlegen möchte (was unter numerischen Gesichtspunkten sicherlich am sinnvollsten wäre). Wie löst man Normalformen

(4) $$x^3+p\cdot x+q=0$$

ohne Probieren auf? Ganz einfach, für $q\neq 0$ bediene man sich der folgenden Tricks (5) und (7):

(5) Setze $x =: u-v$ mit $u, v\neq 0$ und $u\neq v$!

Dann wird aus (4)

(6) $$\left(u-v\right)^3+p\cdot\left(u-v\right)+q=0 \text{ bzw.}$$

(6’) $$u^3-v^3+\left(p-3uv\right)\cdot\left(u-v\right)+q=0\,.$$

Wählt man nun

(7) $$3uv\overset{!}{=}p \text{ , also } v=\frac{p}{3u}\ ,$$

dann verschwinden die Klammerteile aus (6’), und jene Gleichung wird zu der nur scheinbar komplizierteren

(8) $$u^3 - v^3 + q = u^3 - \frac{p^3}{27} \cdot \frac{1}{u^3} + q = 0 \quad \text{bzw.}$$

(9) $$u^6 + q \cdot u^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \; .$$

Das ist eine nur schwach getarnte quadratische Gleichung mit den zwei (Teil-)Lösungen

(10) $$u_{1,2} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \; .$$

Aus der kubierten Gleichung (7) erhält man bequem zu u_1 bzw. u_2 die passenden

(11) $$v\left(u_{1,2}\right) = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \; ,$$

wobei in (10) und (11) entweder beidemal die oberen oder die unteren Rechenzeichen zu wählen sind. Tatsächlich vertauscht die jeweils andere Wahl nur die Rollen von *u* und *v*. In Wahrheit hat man „nur“ eine Lösung $x = u_1 - v(u_1) = u_2 - v(u_2)$ für die Normalform (4) gefunden, nämlich

(12) $$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}} \text{, wobei } R := \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \; .$$

Das ist - in heutiger Schreibweise - die berühmte ***„Cardanische Formel“***.

In unserem Anfangsbeispiel $x^3 + 6x - 20 = 0$ ist der Radikand $R = 108 = 3 \cdot 36$, so daß nach der Cardanischen Formel $x = \sqrt[3]{10 + 6 \cdot \sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6 \cdot \sqrt{3}}$ herauskommt. Entweder berechnet man nun daraus doch näherungsweise $x \approx 2$ und verifiziert $x = 2$ als exakte Lösung, was wohl etwas inkonsequent wirkte, oder man findet aus $10 + 6 \cdot \sqrt{3} \overset{!}{=} \left(a + \sqrt{b}\right)^3$ mittels Koeffizientenvergleich, daß $\left(1 \pm \sqrt{3}\right)^3 = 10 \pm 6 \cdot \sqrt{3}$ gilt, woraus $x = 2$ direkt folgt.

Der zweite Weg vermittelt quasi nebenbei eine folgenreiche Einsicht: Hat $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{R}}$ die Form $a + b$, dann muß $(a+b)^3 = a\cdot\left(a^2+3b^2\right)+b\cdot\left(3a^2+b^2\right) = -\frac{q}{2}+\sqrt{R}$ sein. Beim eben vorgeschlagenen Koeffizientenvergleich sind *q*, *a* und b^2 rational, $\sqrt{R}$ dagegen nicht, daher folgen $b\cdot\left(3a^2+b^2\right)=\sqrt{R}$, $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{R}} = a-b$ und aus der Cardanischen Formel $x = 2a$. In diesem Fall verschwindet *b* ganz aus der Lösung. Gleiches gilt, wie zuerst Bombelli bemerkte, wenn *q*, *a* und b^2 reell sind, $\sqrt{R}$ dagegen imaginär. Wir werden unten noch darauf zurückkommen.

2. Wie kam Cardano auf seine Formel?

Natürlich hat das Thema „kubische Gleichungen" in der eben gewählten Form wirklich nichts mehr im Unterricht verloren: Es gäbe da außer kubischer Ergänzung und zwei sehr spezialistischen „Tricks" nur eine Lösungsformel zu lernen, die praktisch viel umständlicher ist als jedes Näherungsverfahren. Die alles entscheidenden Kunstgriffe (5) und (7) würden als Rezepte mitgeteilt, ohne jede Verankerung in irgendeiner mathematischen Gedankenwelt, ohne eigene Bedeutung und ohne Chance auf Verallgemeinerung. Mathematisches Denken ließe sich daran mitnichten lernen, allenfalls algorithmisches - oder devotes.

Ist die Cardanische Formel heute wirklich nur noch ein Kuriosum für arbeitslose Historiker, oder sollte mehr daran sein? Nun gut, daß man mit den damals modernsten Mitteln der „Coß", d.h. der aufkeimenden Buchstabenrechnung, über die Griechen hinauskommen konnte, hat geistige Talente für die Renaissancemathematik gewonnen und so die explosionsartige Entfaltung unser Oberstufenmathematik im Barock ermöglicht. Das war einmal. Welche geistige Substanz hat denn aber dafür gesorgt, daß man sich in Gelehrtenkreisen auch heute noch, nach so vielen Jahrhunderten, allgemein zwar nicht mehr der Formel selbst, wohl aber ihrer Existenz und ihres Namens erinnert? Was ist oder war dran, an der Cardanischen Formel? „Wie ist Cardano auf die Tricks gekommen?" fragten mich die Schüler. Was sollte jemanden auf die seltsame Idee bringen, das unbekannte *x* als Differenz anzusetzen?

Nun, ich wußte, daß die frühen Cossisten ihre Kräfte sehr stolz und ausdauernd an komplizierten, aber konkreten Wurzeltermen gemessen haben. Darüber gab es sogar öffentliche Wettkämpfe mit erheblichen Preisgeldern.[12] Vielleicht war jemand auf die Idee gekommen, eine kubische Gleichung von der Lösung $x = 2 - \sqrt{2}$ her zu konstruieren: Man bestimme etwa die Parameter in $x^3 + \left(2 + \sqrt{2}\right) \cdot x = a + b \cdot \sqrt{2}$ so, daß $x = 2 - \sqrt{2}$ Lösung wird, d.h. zu $a := 22$ und $b := -14$.[13] Wurde nun die Gleichung $x^3 + \left(2 + \sqrt{2}\right) \cdot x = 22 - 14 \cdot \sqrt{2}$ vorgelegt, dann lag zur Lösungsfindung die Setzung $x =: u - \sqrt{2}$ mit anschließendem Koeffizientenvergleich und Probieren nahe. Sollte Cardano gesehen haben, daß man diesen Ansatz zum Trick (5) verallgemeinern kann? Ein pfiffiger Schüler hielt das für unwahrscheinlich, denn in (7) wird verlangt, daß $3uv = p$ ist, was hier $3u \cdot \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$ bedeuten und nicht zur Lösung führen würde.[14]

Wie war es denn historisch? Cardano sagt in der „Ars magna“ mehrfach, er habe die Lösungsformel im *Fall „de cubo & rebus æqualibus numero*“, d.h. heute $x^3 + p \cdot x = q$ mit p, $q > 0$, nur auf wiederholte Bitten andeutungsweise von Niccolo Tartaglia gehört und mit viel Mühe nacherfunden. Er sagt leider nicht, wie ihm das gelang. Der 1526 verstorbene Scipione del Ferro, Professor der Mathematik in Bologna, sei „vor etwa 30 Jahren“ ihr erster Entdecker gewesen[15], und Tartaglia ihr zweiter.[16] Damit war letzterer, der im Gegensatz zu Cardano von seinen Rechenkünsten leben mußte, überhaupt nicht zufrieden. Er warf Cardano Geheimnisverrat vor und brach einen Prioritätsstreit vom Zaune, in den der Meister zum Ärger Tartaglias nicht selbst eingriff, dafür aber umso heftiger Cardanos früherer Diener, begabter Schüler und Freund Ludovico Ferrari. Die Einzelheiten dieses Streits sollen uns hier nicht interessieren[17], wohl aber Tartaglias Behauptung, er habe Cardano seine Methode 1539 mit folgenden Versen „spontan“ offenbart:

Quando che’l cubo con le cose appresso, / Se agguaglia à qualche numero discreto

$$x^3 + p \cdot x = q$$

Trovan dui altri, differenti in esso. / Dapoi terrai, questo per consueto,

$$U - V = q \text{ bzw. } u^3 - v^3 = q$$

Che’l lor produtto sempre sia eguale / Al terzo cubo, delle cose neto.

$$U \cdot V = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \text{ bzw. } u \cdot v = \frac{p}{3}$$

El residuo poi suo generale / Delli lor lati cubi, ben sottratti

$$x := \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V} \text{ bzw. } x := u - v$$

Varrà la tua cosa principale.[18]

Dies und die Wiedergabe der Cardanischen Herleitungen in modernem Formelsatz haben häufig zu der Vermutung geführt, del Ferro, Tartaglia und Cardano hätten sinngemäß einfach die binomische Formel $(u-v)^3 + 3uv \cdot (u-v) = u^3 - v^3$ mit $x^3 + p \cdot x = q$ verglichen und das ganze lediglich wegen der vermeintlich höheren Beweiskraft geometrisch verpackt.[19] Die historische Begründung geht etwa so: „Beim Arbeiten mit Gleichungen sahen jedoch die meisten Renaissance-Mathematiker häufig selbst dann von geometrischen Interpretationen ab, wenn die von ihnen verwendete Sprache geometrische Assoziationen weckte. So besaß etwa eine Gleichung wie Cardanos *De cubo æquali rebus & numero* ($x^3 = bx + c$) für ihn und seine Zeitgenossen keine sinnvolle geometrische Interpretation. (Eine dreidimensionale Figur kann nicht einer eindimensionalen plus einer dimensionslosen Zahl gleich sein.)“[20]

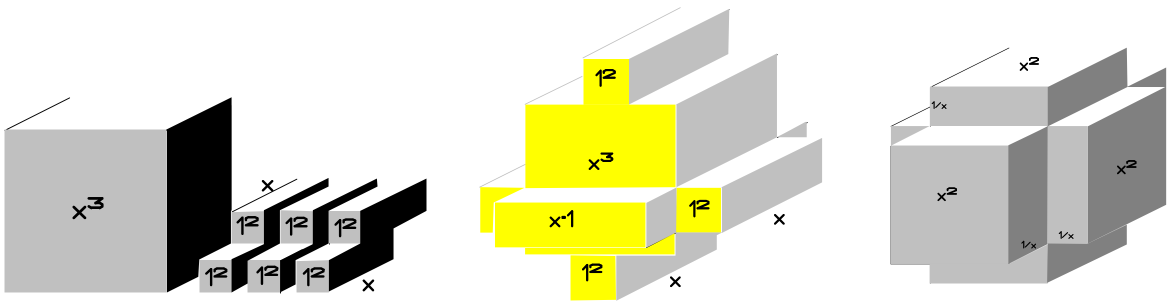
Nun erscheint mir diese Argumentation als recht wacklig. Die geometrisch verbrämte binomische Formel hat zwar Beweiskraft und würde den Trick (7) erklären, den Differenzansatz (5) könnte sie aber nicht motivieren. Weil Formeln damals eben noch keine Beweiskraft hatten, ist eher zu vermuten, daß man zumindest bei der völlig neuen Auflösung der kubischen Normalform äußerst vorsichtig vorgegangen ist, und das heißt: Es wurde nicht nur geometrisch begründet, sondern *geometrisch gedacht!* Diese Hypothese soll jetzt ein wenig untersucht werden.

Es trifft sich nicht ganz zufällig, daß gerade unser Beispiel (3) sinngemäß in der Form

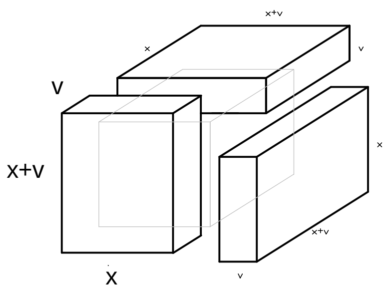
(13) $$x^3 + 6x = 20$$

in Kapitel XI von Cardanos *Ars magna* vorkommt. Überlegen wir uns die Sache also geometrisch, und vergleichen wir anschließend mit Cardano!

Geometrisch hätte es sich um die Aufgabe gehandelt, einem Würfel x^3 das Gesamtvolumen $6x$ hinzuzufügen, um das Volumen 20 zu erhalten. Da x erst noch herausgefunden werden sollte, mußte der Summenkörper $x^3 + 6x$ möglichst einfach gebaut sein. Hier sind drei Möglichkeiten:



Es gibt viele Möglichkeiten. Welche Form ist die kompakteste?



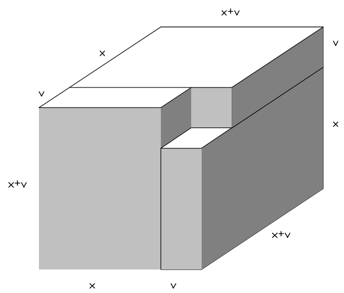
$x^3 + 3\cdot(x+v)\cdot v\cdot x$

$= (x+v)^3 - v^3 \overset{!}{=} 20,$

also muß wie in (7)

$3\cdot(x+v)\cdot v = 6$ sein

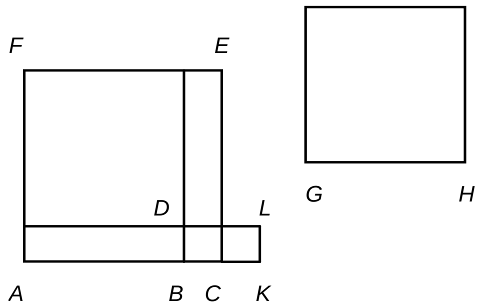
bzw. $(x+v) = \frac{2}{v}\ldots$



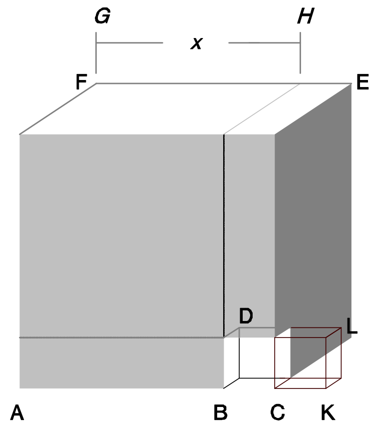
Diese Konfiguration dürfte die kompakteste sein und liefert tatsächlich die Tricks (5) und (7), wenn man noch $u := x + v$ einführt.

Vergleichen wir mit der *Ars magna*. Dort heißt es wörtlich: *„Sit igitur exempli causa cubus GH & sexcuplum lateris GH æquale 20, & ponam duos cubos AE & CL, quorum differentia sit 20, ita quod productum AC lateris, in CK latus, sit 2, tertia scilicet numeri rerum pars, & abscindam CB, æqualem CK, dico, quod si ita fucrit, lineam AB residuum, esse æqualem GH...“*.[21] Gemäß der von Cardano beigefügten Zeichnung läßt sich der Text etwa so übersetzen (vgl. Witmer):

„Als Beispiel sei GH^3 , zusammen mit seiner sechsfachen Seite *GH*, gleich 20. Und (nun) seien *AE* und *CL* zwei Würfel mit Differenz 20, so daß das Produkt der Seite *AC* mit *CK* gleich 2 ist, also gleich einem Drittel des Koeffizienten des Gesuchten. Trägt man *BC* gleich *GH* ab, dann ist die Reststrecke *AB* gleich *GH...*“



Zeichnet man die Angelegenheit in Parallelprojektion, dann soll aus dem Würfel *AE* eine Kopie *CD* des kleineren Würfels *CL* geschnitten werden. Der enstehende Restkörper soll das Volumen 20 bekommen, also x^3+6x repräsentieren. Wie kann man sich nun räumlich das Produkt der Seite *AC* mit *CK* vorstellen? Soviel ist klar: Am Ende soll *AB* = *GH* = *x* herauskommen. Demnach muß man sich unter x^3 den Würfel *FD* denken, und man sollte *BC* = *CK* = *v* setzen.



Der Teil der Frontplatte über *AB* hat den Rauminhalt $AB\cdot AC\cdot CK = x\cdot(x+v)\cdot v$, und drei derartige Platten ergänzen den Würfel x^3 = *FD* zum ausgestanzten 20er- oder *q*-Körper. Nennt man die Kantenlänge *AC* des großen Würfels *u*, dann haben die drei Platten zusammen das Volumen $3uv\cdot x$, und damit ist klar, warum in (5) $3uv = 6 = p$ sein soll und warum $u^3 - v^3 = q$ ist.[22]

Wir dürfen also annehmen, daß geometrisches Denken auf die Tricks (5) und (7) führte.[23]

3. Der „Casus irreducibiles“

Obwohl auch Cardano wußte, daß kubische Gleichungen durchaus mehr als eine Lösung haben können, gab er sich im allgemeinen damit zufrieden, jeweils eine Lösung für die dreizehn Gleichungstypen nachzuweisen, die entstehen, wenn man die Summanden so auf die beiden Gleichungsseiten verteilt, daß nur positive Koeffizienten vorkommen. Negative Koeffizienten waren aus geometrischer Sicht unsinnig, und negative Lösungen wurden als Indiz dafür genommen, daß die Gleichung selbst „falsch“, d.h. sinnwidrig oder unlösbar, gestellt war. Nach den Erfahrungen mit quadratischen Gleichungen gab das keinen Grund zur Beunruhigung. Weit unangenehmer war, daß die Lösungsformel unzuverlässig arbeitete, und zwar auch in Fällen, wo eine oder mehrere positive Lösungen bekannt waren. Ist nämlich in Cardanos Formel

> ***Die drei Lösungen der kubischen Gleichung:***
>
> Die Cardanische Formel liefert $x_0 = u\text{-}v$.
>
> Division von $f(x) := x^3+px+q$ durch $x\text{-}(u\text{-}v)$ ergibt
> $f(x) = (x\text{-}x_0)\cdot\left[x^2+(u-v)\cdot x+(u-v)^2+p\right]$ mit
>
> den weiteren Lösungen
>
> $x_{1,2} = -\dfrac{u-v}{2} \pm \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{-3(u-v)^2-4p}$. Erinnert man sich noch an (7), dann kann man jedes p durch $3uv$ ersetzen und erhält damit
>
> $x_{1,2} = -\dfrac{u-v}{2} \pm \dfrac{\sqrt{-3}}{2}\cdot(u+v)$. Drückt man das mit der 3. Einheitswurzel $\varepsilon := -\dfrac{1}{2}+i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ aus,
>
> so werden $x_1 = \varepsilon\cdot u-\varepsilon^2\cdot v$,
>
> $x_2 = \varepsilon^2\cdot u-\varepsilon^4\cdot v$ und allgemein
>
> $x_j = \varepsilon^j\cdot u-\varepsilon^{2j}\cdot v$ für $j = 0,1,2.$

(12) $$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{R}} \quad \text{für} \quad R := \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

R negativ, dann ließ sich die Quadratwurzel mit den damaligen Mitteln nicht ziehen. Im Beispiel

(14) $$x^3 = 15x+4$$

behauptet die cardanische Formel, daß

(15) $$x_1 = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

„die“ Lösung sei, obwohl man durch Probieren $x_1 = 4$ bekommt.

In der *Ars magna* sind derartige Beispiele sorgfältig vermieden, aber sie dürften auch Cardano kaum entgangen sein. Tatsächlich bemerkte erst Clairaut 1746, daß R genau dann negativ ist, wenn drei reelle Lösungen existieren, daß es sich also eigentlich um den angenehmsten Fall zum Raten handelt.[24] Cardano sah offenbar noch kein Mittel, diesen später so genannten ***„Casus irreducibiles“*** anzugreifen. Raffaele Bombelli konnte das Geheimnis ein Stück weit lüften: In seiner *Algebra*, die schon um 1550 entstanden ist und 1572 gedruckt wurde, operiert er formal mit Quadratwurzeln aus negativen Zahlen und zeigt für das Beispiel (14):

(16) $$\sqrt[3]{2\pm\sqrt{-121}} = 2\pm\sqrt{-1}\ , \text{ weil } \left(2\pm\sqrt{-1}\right)^3 = 2\pm 11\cdot\sqrt{-1}\ .$$

Demnach war (15) tatsächlich nur eine (komplex) getarnte Darstellung der Vier. Generell ist die Cardanische Formel (12) so gebaut, erkannte Bombelli, daß sich die Imaginärteile im Fall negativer R herausheben. Durch Kubieren und Koeffizientenvergleich sieht man nämlich, daß aus $\sqrt[3]{a+b\cdot\sqrt{-1}} = c+d\cdot\sqrt{-1}$ stets auch die konjugierte Beziehung $\sqrt[3]{a-b\cdot\sqrt{-1}} = c-d\cdot\sqrt{-1}$ folgt, und umgekehrt, so daß - in heutiger Ausdrucksweise - $x_1 = 2\cdot\mathrm{Re}(u) = 2\cdot\mathrm{Re}(v)$ ist und die beiden Imaginärteile nur die vorübergehende Funktion eines Katalysators haben.(Vgl. die Bemerkung am Schluß des 1. Abschnitts.) Leider liefert dieser Vergleichsansatz über die Erklärung hinaus i.a. kein Berechnungsverfahren für c = Re(u) aus a und b, die entstehenden Gleichungen sind nämlich wieder kubisch. Da sich alle Umrechnereien im Kreise drehten, schien es sich wirklich um einen „unauflösbaren Fall“, einen „*Casus irreducibiles*“, zu handeln.

Ganz so schlimm war die Sache aber doch nicht. Bei einer allgemeinen Untersuchung des geometrischen Winkelteilungsproblems bemerkte Viète um 1600, daß die Winkeldreiteilungsgleichung einen speziellen Casus irreducibiles darstellt, der mittels der Archimedischen Einschiebungskonstruktion geometrisch und mit Kosinustabellen approximativ lösbar ist.[25] Heute läßt sich das kurz so darstellen: Um α aus gegebenem 3α zu gewinnen, soll der Kreispunkt $(\cos\ \alpha | \sin\ \alpha)$ aus $(\cos\ 3\alpha | \sin\ 3\alpha)$ bestimmt werden. Für die erste Koordinate muß also bei gegebenem 3α

(17) $$\cos\ 3\alpha = 4 \cdot \cos^3 \alpha - 3 \cdot \cos\ \alpha \ \text{ bzw. } \ \cos 3\alpha = 4x^3 - 3x$$

aufgelöst werden. Die Normalform dazu lautet natürlich

(18) $$x^3 - \frac{3}{4} \cdot x - \frac{\cos 3\alpha}{4} = 0 \ \text{ mit } \ R = \frac{\cos^2 3\alpha}{64} - \frac{1}{64} \leq 0 \ .$$

Sie hat einerseits „die“ Lösung $x_1 = \cos\alpha$, andrerseits gilt nach der Cardanischen Formel

(19) $$x_1 = \cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\cos 3\alpha + \sin 3\alpha \cdot \sqrt{-1}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\cos 3\alpha - \sin 3\alpha \cdot \sqrt{-1}} \ .$$

Sind komplexe Zahlen erst einmal akzeptiert, dann kann man durch Koeffizientenvergleich daraus die spezielle de Moivresche Formel

(19’) $$\sqrt[3]{\cos 3\alpha \pm \sin 3\alpha \cdot \sqrt{-1}} = \cos\alpha \pm \sin\alpha \cdot \sqrt{-1}$$

erhalten - und damit einen Zauberstab gegen alle komplexen Kubikwurzeln: Im Casus irreducibiles könnte man jetzt die auftretenden Kubikwurzeln der Form $\sqrt[3]{c \pm i \cdot d}$ immer durch Ausklammern von $r := \sqrt{c^2 + d^2} = |c + i \cdot d|$ mit (19’) ausrechnen.[26]

Der historische Weg verlief wegen des Mißtrauens gegen Imaginärzahlen etwas vorsichtiger: Schon die arabischen Astronomen des Mittelalters hatten entdeckt, daß die Berechnung der Neunecksseite, also die Dreiteilung des 60°-Winkels, auf eine kubische Gleichung führt, und Viète bemerkte, daß sich mittels einfacher Substitution alle bis dahin „irreduziblen“ kubischen Gleichungen auf den allgemeinen Trisektionsfall zurückführen lassen: Läßt sich nämlich irgendeine gegebene kubische Gleichung

(20) $$y^3 + p' \cdot y + q' = 0 \ \text{ mit negativem } p'$$

durch passende Wahl von 3α auf die Form (18) zurückführen, dann kann man die Lösung einfach in einer Tabelle unter $\cos\alpha$ nachschlagen. Dazu bringe man *p’* erst einmal auf $-\frac{1}{4}$. Das gelingt leicht, indem man die Gleichung durch ein geeignetes c^3 dividiert und anschließend $x := \frac{y}{c}$ schreibt. Für negatives *p’* muß man dazu $c := 2 \cdot \sqrt{\frac{|p'|}{3}}$ wählen, dann wird (20) äquivalent zu

$$(21) \qquad \left(\frac{y}{c}\right)^3 + \frac{p'}{c^2} \cdot \frac{y}{c} - \frac{q'}{c^3} = x^3 - \frac{3}{4} \cdot x - \frac{q'}{8 \cdot \left|\frac{p'}{3}\right|^{3/2}} = 0 \quad (\text{für } p' < 0),$$

und der letzte Bruch hat genau dann einen für $\frac{\cos 3\alpha}{4}$ tauglichen kleinen Betrag $\leq \frac{1}{4}$, wenn *R’* negativ ist, wenn also (20) einen Casus irreducibiles darstellt. Löst man jetzt (21) mit $x_1 = \cos\alpha$, dann gibt $y_1 := c \cdot x_1$ „die“ gesuchte Lösung im Casus irreducibiles.

4. Die Unvermeidbarkeit der komplexen Zahlen

Was hatte man gewonnen? Oberflächlich betrachtet war den Fachleuten Anfang des 17. Jahrhunderts klar, wie man beliebige Gleichungen dritten Grades in geschlossener Form und ohne jede Anleihe bei den nur imaginierten Zahlen auflösen kann. Der Casus „irreducibiles“ hatte sich als lediglich „subjektiv irreduzibel“ herausgestellt, solange man eben nicht wußte, daß er sich stets durch $x := \frac{y}{c}$ auf die Trisektionsgleichung oder mittels Auflösung der Cardanischen Formel durch die de Moivresche bewältigen läßt. Damit waren auch alle Gleichungen vierten Grades bewältigt, denn Cardano hatte schon in der *Ars magna* einen universellen Trick seines Schülers Ferrari mitgeteilt, solche Gleichungen durch geschickte quadratische Ergänzung auf den kubischen Fall zurückzuspielen.[27]

Trotzdem war der Stand der Erkenntnis, den die Mathematiker mit Viètes Lösung gewonnen hatten, in mehrfacher Hinsicht unbefriedigend:

- Durch den Umweg über Kosinustabellen war ein artfremdes, höheres Niveau von Approximationstechniken ins Spiel gekommen, als es für Quadrat- und Kubikwurzeln erforderlich war.

- Durch das Ausweichen auf die Trisektionsgleichungen wurde eine Fallunterscheidung nötig. Wieso ersetzten gerade trigonometrische Betrachtungen die komplexen Zahlen?

- Die Cardanische Formel lieferte zwar auch im Casus irreducibiles „den" richtigen Lösungswert, aber anscheinend nur um den Preis eines seltsamen „Durchgangs durch das Imaginäre".

- Je mehr sich die Wissenschaftler seit Anfang des 17. Jahrhunderts von geometrischen Dimensionsbeschränkungen durch Einnahme formal-algebraischer Sichtweisen freimachten, desto bedrückender wirkte der erheblich gesteigerte Rechenaufwand bei Gleichungen vierten Grades.

- Und bereits alle Anläufe auf die allgemeine Gleichung fünften Grades führten zu völlig unerträglichen Kettenrechnungen, die den eleganten Näherungsmethoden der aufstrebenden Analysis keinerlei Konkurrenz bieten konnten.

Es wurde allmählich klar, daß man geschlossene Lösungsformeln für die allgemeinen Gleichungen fünften und höheren Grades nur erhoffen konnte, wenn es gelänge, durchsichtigere, einheitliche und leichter zu verallgemeinernde Lösungsverfahren für die schon gelösten Gleichungstypen zu entwickeln. Mit Bezug auf die Zeit des Spätbarock schreibt J.E. Hofmann: „Die Algebraiker verzehr(t)en ihre besten Kräfte im Ringen um das unerreichbare Wunschziel, die Lösungen allgemeiner Gleichungen in Radikalform zu geben."[28] Viele der größten Mathematiker von Descartes bis Euler, Lagrange und Gauß haben an diesem Programm mehr oder minder erfolglos gearbeitet.

Endlich kam der Verdacht auf, die Sache sei vielleicht von vornherein, aus prinzipiellen Gründen, zum Scheitern verurteilt, und man sollte statt nach Lösungswegen besser nach Techniken für Unmöglichkeitsbeweise suchen. Als Ruffini, Gauß, Abel, Cauchy, Galois, Jordan und andere solche Techniken ausfindig gemacht hatten[29], war die moderne Algebra geboren, und mit ihr eine völlig neue Kategorie mathematischer Erkenntnis: die ***Unmöglichkeitsbeweise***, d.h., es wurde möglich, für große Problemklassen die Unmöglichkeit einer endlich-algebraischen Rezeptur zu beweisen. Es wäre sicher ermüdend, die tatsächlichen Entwicklungen zwischen 1600 und 1800 im einzelnen nachzuzeichnen. Es soll stattdessen - ganz im Sinne des Toeplitzschen schwachen historisch-genetischen Prinzips - nur ein abgekürzter Gedankengang fingiert werden, der auf der historischen Linie dieses Zeitraums stattgefunden haben *könnte*.

Es geht um die naheliegende Frage, ob sich nicht doch eine einheitliche Lösungsformel für die allgemeine kubische Gleichung finden lasse, die wie die Cardanische den Casus irreducibiles einschließt, aber ganz ohne komplexe Zahlen auskommt. Die negative Antwort soll im folgenden möglichst elementar rekonstruiert werden. Im wesentlichen werden wir nicht mehr als den euklidischen Algorithmus für Polynome benutzen, und das auch nur vergleichsweise sparsam. Dabei werden sich einige der Grundideen der späteren Körpertheorie einstellen, und auch schon ein paar der berühmten Unmöglichkeitssätze.

Ausgangspunkt könnte die schmerzhafte Erfahrung gewesen sein, daß zwar mehrere Varianten der Cardanoschen und Ferrarischen Herleitungen entdeckt wurden, aber kein einheitlicher reeller Formalismus für den allgemeinen Fall. Hat man an einem Problem lange genug im Kreis herum gerechnet, dann wird man sich irgendwann erneut fragen müssen, wonach eigentlich gesucht wird und welche Chancen überhaupt bestehen. Was sucht man eigentlich, wenn man eine „algebraische Lösung“, das hieß: eine reelle Wurzelformel, für die allgemeine kubische Normalform $x^3 + px + q = 0$ sucht?

Offenbar geht es darum, eine Formel zu finden, die (stets) eine Lösung x_1 aus den gegebenen p und q erzeugt, indem lediglich Grundrechenarten und geschachtelte *reelle* Wurzelziehungen angewandt werden. Will man nun zeigen, daß das nicht immer geht - und diesen Verdacht mußte man sich erst einmal hart erarbeiten -, dann ist zu klären, warum diese Konstruktionsmöglichkeiten im Reellen nicht genug Zahlen aus p und q herzustellen vermögen.

Nehmen wir uns als Beispiel den Casus irreducibiles

(22) $$x^3 - 3x + 1 = 0 \text{ mit } R = -\frac{3}{4}$$

vor. Er hat, wie wir wissen, drei reelle Lösungen. Diese Lösungen sind auf keinen Fall rational. Gäbe es nämlich einen gekürzten Bruch $\frac{p}{q}$ als Lösung, dann müßten nach Multiplikation von (22) mit q^3 die Gleichungen $p^3 - q^2 \cdot (3p + q) = 0 = p \cdot \left(p^2 - 3q^2\right) - q^3$ gelten, so daß p und q einander wechselweise teilen müßten, obwohl $\frac{p}{q} = \pm 1$ keine Lösung ist. Es ist also nötig, die Lösungen von (22) außerhalb von $\mathbb{Q}$ zu suchen.

In einem ersten Versuch nehmen wir an, es wäre möglich, eine Lösung x_1 in der irrationalen Form $x_1 = a + \sqrt{b}$ mit rationalen a, b darzustellen. Setzte man dieses x_1 in (22) ein, dann müßte $\left(a + \sqrt{b}\right)^3 - 3 \cdot \left(a + \sqrt{b}\right) + 1 = \left(a^3 + 3ab - 3a + 1\right) + \sqrt{b} \cdot \left(3a^2 + b - 3\right) = 0$ gelten. Das ginge nur, wenn die beiden letzten Klammern gleich Null wären. Mit dem b aus der letzten Klammer ergäbe die vorletzte $-8a^2 + 6a + 1 = -\left[(2a)^3 - 3 \cdot (2a) - 1\right] = 0$, so daß $2a$ rationale Lösung der Gleichung $x^3 - 3x - 1 = 0$ wäre. Die letztgenannte Gleichung hat aber ebenso wie (22) keine rationale Lösung. Folglich kann keine Lösung von (22) in der Form $x_1 = a + \sqrt{b}$ mit rationalen a, b darstellbar sein.

Versuchen wir es in einem zweiten Versuch mit einer irrationalen Lösung $x_1 = a + \sqrt[3]{b}$, wobei a und b wieder rational seien. Einsetzen in (22), Ausmultiplizieren und Zusammenfassen nach Potenzen von $\sqrt[3]{b}$ ergäbe diesmal $\left(a^3 + b - 3a + 1\right) + \sqrt[3]{b} \cdot \left(3a^2 - 3\right) + 3a \cdot \sqrt[3]{b^2}$, wobei die Klammern rational wären. Nun ist $\sqrt[3]{b^2} = \left(\sqrt[3]{b}\right)^2$ sicher kein rationales Vielfaches von $\sqrt[3]{b}$ und auch nicht rational, sonst wäre das rationale $b = \left(\sqrt[3]{b}\right)^3 = \sqrt[3]{b^2} \cdot \sqrt[3]{b}$ zugleich irrational. Folglich müßten alle Klammern in der Umformung von (22) gleich Null sein. Das würde aber $a = 0$ und $b = 1$ bedeuten, was natürlich unmöglich ist. Es kann also auch keine Lösung der Form $x_1 = a + \sqrt[3]{b}$ mit rationalen a und b geben.

Der dritte Fehlversuch ist mühsamer, dafür wird er uns der allgemeinen Lösung erheblich näher bringen: Nehmen wir an, es gäbe eine irrationale Lösung von (22), die sich mit rationalen a, b, c, d in der Form $x_1 = a + b \cdot r + c \cdot r^2$ mit $r := \sqrt[3]{d}$ schreiben läßt. Einsetzen in (22) und Ordnen nach r-Potenzen ergäbe diesmal $\left(a^3 + 6abd + b^3 d + c^3 d^2 - 3a + 1\right) +$ $r \cdot \left(3a^2 b + 3ac^2 d + 3b^2 cd - 3b\right) + r^2 \cdot \left(3a^2 c + 3ab^2 + 3bc^2 d - 2c\right) = 0$. Glücklicherweise interessiert nur, daß die Klammern rational und sogar - wie im zweiten Versuch - gleich Null sein müßten. Es ist diesmal allerdings sehr schwer, daraus die Koeffizienten a, b, c, d in einen Widerspuch zu verwickeln. Schaut man freilich die Umformungsstruktur genauer an, dann wird deutlich, daß nur die Beziehung $r^3 = d = \text{rational}$ ausgenutzt wurde. Nimmt man statt r mit Hilfe der dritten Einheitswurzel $\varepsilon := -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ die Parameter $r \cdot \varepsilon$ oder $r \cdot \varepsilon^2 = r \cdot \overline{\varepsilon}$, dann würde sich nichts ändern, d.h., mit $x_1 = a + b \cdot r + c \cdot r^2$ hätte man auch die Lösungen $x_2 = a + b \cdot r \cdot \varepsilon + c \cdot r^2 \cdot \varepsilon^2$ und $x_3 = a + b \cdot r \cdot \overline{\varepsilon} + c \cdot r^2 \cdot \overline{\varepsilon}^2$ dargestellt. Nun sind in (22) alle drei Lösungen reell. Daher müßten die Imginäranteile in den beiden letzten Darstellungen verschwinden. Es ist z.B. $\operatorname{Im}\left(x_2\right) = r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (b - c \cdot r)$, wie man leicht nachrechnet. Müßte dieser Term verschwinden, so müßte $b = c = 0$ sein, x_1 also rational. Das ist nicht möglich. Daher kann (22) keine Lösung der Form $x_1 = a + b \cdot \sqrt[3]{d} + c \cdot \sqrt[3]{d^2}$ mit rationalen a, b, c, d haben.

Dieser Fehlversuch läßt immerhin drei wichtige allgemeine Einsichten zu: Aus langer Erfahrung im Umgang mit Wurzeltermen wußte man, daß sich die Nenner aller Quotienten der Form $\dfrac{a' + b' \cdot \sqrt[3]{d} + c' \cdot \sqrt[3]{d^2}}{a'' + b'' \cdot \sqrt[3]{d} + c'' \cdot \sqrt[3]{d^2}}$ durch geeignete Erweiterung rational machen lassen. Unsere Überlegungen zeigen deshalb erstens, daß (22) auch in keinem Erweiterungskörper $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{d})$ mit rationalem d lösbar ist.[30] Zum zweiten haben wir von der speziellen Form von (22) nur soweit Gebrauch gemacht, als (22) ein Casus irreducibiles ohne rationale Lösung war. Das erste Ergebnis gilt also für alle derartigen Fälle. Schließlich, zum dritten, brauchten die Koeffizienten a, b, c, d gar nicht rational zu sein. Entscheidend war, daß sie aus irgendeinem reellen Oberkörper von $\mathbb{Q}$ stammten, der $\sqrt[3]{d}$ (und damit auch $\sqrt[3]{d^2}$) noch nicht enthielt. Zusammengefaßt haben wir damit folgendes Zwischenresultat:

Hat ein Casus irreducibiles keine Lösungen im reellen Körper $K \supset \mathbb{Q}$ *, dann nützt auch das Ziehen reeller dritter Wurzeln, d.h. die Körpererweiterung von K um eine reelle Kubikwurzel, nichts. Anders ausgedrückt: In diesem Fall können auch keine gebrochen-rationalen Ausdrücke mit Koeffizienten aus K und Potenzen aus einem reellen* $\sqrt[3]{k}$ mit $k \in K$ *eine Lösung herstellen.*

Stellt man sich nun vor, es gäbe eine reelle Wurzelformel zur Auflösung eines Casus irreducibiles mit rationalen Koeffizienten, aber ohne rationale Lösung, dann müßte diese Formel aus einer oder mehreren verschachtelten Wurzeln aufgebaut sein. Es leuchtet vielleicht ein, daß bei der Berechnung am Schluß irgendeine *dritte* Wurzel auftauchen müßte, denn die zu lösende Gleichung weicht mit dem x^3 bestenfalls dritte Wurzeln auf. Gibt es aber bis zu dieser letzten Wurzelziehung noch keine Lösung, dann verhilft eine abschließende Kubikwurzel nach obigem auch nicht mehr dazu! Daß es tatsächlich im letzten Schritt nur mit einer Kubikwurzel klappen könnte, also in Wahrheit gar nicht, beweist der folgende

Satz: Die Gleichung $f(x) = x^3 + px + q = 0$ habe rationale Koeffizienten und im Oberkörper K von $\mathbb{Q}$ keine Lösung, wohl aber in $K(r) = K\left(\sqrt[n]{k}\right)$ mit primem n und $k \in K$. Dann muß $n = 3$ sein. Anders gesagt: Das über K irreduzible $f(x)$ läßt sich durch Adjunktion einer Wurzel von Primzahlgrad allenfalls dann zerfällen, wenn es sich um eine Kubikwurzel handelt. (Dieser Satz zeigt auch sofort die Unmöglichkeit vieler berühmter Konstruktionsprobleme „mit Zirkel und Linealkante“, sobald sie sich auf irreduzible kubische Gleichungen über $\mathbb{Q}$ zurückführen lassen.[31])

Beweis: Die Elemente von $K(r) = K\left(\sqrt[n]{k}\right)$ haben nach Fußnote 30 ausnahmslos die Form $g(r) = \sum_{j=0}^{n-1} k_j \cdot r^j$ mit Koeffizienten aus K. Es seien $x_1 = g(r)$ in $K(r) = K\left(\sqrt[n]{k}\right)$ Nullstelle von f und r folglich dort Nullstelle von $f \circ g$. Das Polynom $h(x) := x^n - k$ hat dort dieselbe Nullstelle. Daher muß der größte gemeinsame Teiler von $f \circ g$ und h mindestens den Linearfaktor x-r enthalten. Nun läßt sich dieser ggT mit Hilfe des euklidischen Algorithmus’ ganz mit Rechenoperationen in K berechnen, und dort hat h gar keine Nullstelle. Deshalb kann der ggT nicht kleiner als h sein, und das heißt, das Polynom h ist Faktor des Polynoms $f \circ g$. Betrachten wir nun die auftretenden Grade: $Grad(f \circ g) = 3 \cdot Grad(g)$

mit $1 \leq Grad(g) < n$, und $Grad(h) = n$ muß Teiler davon sein. Da n als Primzahl vorausgesetzt wurde, muß n = 3 sein. Damit ist der Satz bewiesen.

Nehmen wir nun an, man habe aus den p und q einer gegebenen kubischen Normalform mittels Grundrechnungsarten und endlich vielen Wurzeladjunktionen eine Zahl mit einem Bestandteil k im Erweiterungskörper K gewonnen, und erst in K ($\sqrt[n]{k}$) finde sich eine Lösung der kubischen Gleichung, dann darf man n als Primzahl annehmen, denn für $n = n' \cdot n''$ könnte man erst noch $K\left(\sqrt[n'']{k}\right)$ bilden, bevor sich in $K\left(\sqrt[n']{\sqrt[n'']{k}}\right)$ erstmals eine Lösung fände. Jede geschachtelte Wurzelformel für eine kubische Normalform ließe sich folglich so aufbereiten, daß am Schluß eine Kubikwurzel gezogen werden müßte. *Im Beispiel (22) und allgemein in jedem Casus irreducibiles mit Koeffizienten, aber ohne Lösung aus* $\mathbb{Q}$ *ist es nach dem obigen Zwischenresultat unmöglich, eine Lösung reell-algebraisch darzustellen, d.h. durch Verschachtelung von und Grundrechenarten mit nur reellen Wurzeln.*

5. Zusammenfassung

Die Lösung der allgemeinen kubischen Gleichung durch reelle Radikale ist nicht möglich. Um sie aufzulösen, braucht man komplexe Zahlen - und auch, um das einzusehen. Als del Ferro, Tartaglia und Cardano ihr Lösungsverfahren fanden, tauchten komplexe Zahlen ganz unerwartet auf, leisteten jedesmal zuverlässig ihre Dienste, und verschwanden dann wieder spurlos, wie Bombelli und Viète zeigen konnten. Um das zu verstehen, mußte man sich widerstrebend auf die erstaunliche Katalysatorrolle des Imaginären einlassen, freilich auch auf die Null und die negativen Zahlen. Mit diesem Einsatz waren eindrucksvolle Sätze von ästhetischer Geschlossenheit zu gewinnen: die Cardanische Formel für alle Fälle oder auch der Fundamentalsatz der Algebra. Leibniz schrieb: „Es ist nämlich eifersüchtiger auf ihre herrliche Vielfalt die Natur der Dinge, die Mutter der ewigen Mannigfaltigkeiten, oder vielmehr der göttliche Geist, als daß er zuließe, daß alles unter einer einzigen Gattung zusammengedrängt würde. Daher fand er eine feine und wunderbare Ausflucht in jenem Wunder der Analysis, dem Monstrum der idealen Welt, fast einem Amphibium zwischen Sein und Nicht-Sein, welches wir die imaginäre Wurzel nennen.“[32]

Die Vièteschen Zusammenhänge zwischen Lösungen und Gleichungskoeffizienten einerseits und die aufkommende Überzeugung vom Fundamentalsatz der Algebra andererseits haben im 17. Jahrhundert zu der praktischen Gewohnheit geführt, Gleichungen ohne Rücksicht auf anschauliche Bedeutungen in Nullform, mit Buchstaben für irgendwelche positiven, negativen oder ganz verschwindenden Koeffizienten und mit komplexen Zahlen anzuschreiben. Geometrische Dimensionsrücksichten wurden durch die Gewöhnung an rein algebraische Sichtweisen überwunden. Und Lösungen durfte man nach den Erfolgen von Cardano und Ferrari auch bei noch unbewältigten Gleichungstypen von genialen Substitutionen und geschickten Faktorisierungen erwarten, das heißt von Zerfällungen in einfachere Teil- oder Hilfsgleichungen.[33] Vielleicht konnte es auch helfen, noch abstrusere Zahlen erfinden als die komplexen?

Erst als alle noch so angestrengten und ausdauernden Rechnungen nichts halfen, wandte man sich in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts nach gründlichen Bestandsaufnahmen strukturellen Betrachtungsweisen zu. Der obige Gedankengang zeigt die prinzipielle Wendung, die Motivationslage und die erfolgversprechende Technik. Für die Heuristik der allmählichen Wendung zu den Transformationsgruppen, die schließlich zum vorläufigen Abschluß unseres Fragenkreises durch die Galois-Theorie führen sollte, müssen wir auf Spezialliteratur verweisen (andeutungsweise etwa in Tropfke 1980, Freud oder Peiffer/Dahan-Dalmedico, detaillierter in Scholz, insbes. Kap. 14, oder Wussing). Die sensationellen, wenn auch enttäuschenden Ergebnisse der neuen Algebra im 19. Jahrhundert sind jedenfalls noch heute berühmt: Viele klassische Probleme der „Konstruktion mit Zirkel und Lineal(kante)“ wie die Dreiteilung beliebiger Winkel, die Verdopplung eines Würfels oder die Konstruktion der Seite eines regelmäßigen Siebenecks sind unlösbar; es gibt für bestimmte Gleichungen fünften und höheren Grades prinzipiell keine Auflösungsformeln aus verschachtelten Wurzelgebilden nach dem Vorbild der Cardanischen Formel; und es ist nur mit gravierenden Einschränkungen möglich, das Zahlenrechnen über den Bereich der komplexen Zahlen hinaus auszudehnen.

Seitdem hat sich das Interesse der modernen Algebra immer mehr auf abstraktere Strukturgebilde verlagert. Die „klassischen“ Negativresultate des 19. Jahrhunderts erscheinen in den heutigen Algebra-Vorlesungen meist nur noch am Rande, beim viel allgemeineren Thema Körpererweiterungen etwa oder als elegante Abfallprodukte der Galois-Theorie.

Von den einst so heftigen Geburtswehen der zunehmend abstrakteren Strukturtheorien erhält der Lernende nur in konkreten Übungsbeispielen einen fragwürdigen Eindruck, weil sie sich naturgemäß als erschreckend sperrig erweisen, jedenfalls im Vergleich zum schier endlosen, aber höchst eleganten Definitions- und Satzgefüge der Vorlesung.[34] Anders gesagt: Auf wie harter Rechenarbeit die abelschen Gruppen und die Galois-Theorie bei aller Genialität gewachsen sind, habe ich in keinem modernen Lehrbuch gesehen, und die berühmt kurzen Lebensspannen von Abel und Galois, mit denen man Studenten gern beeindruckt, lassen es kaum ahnen. Erst ein Blick in die Geschichtsbücher der Algebra verrät, daß beide den riesigen Überblicksaufsatz *„Réflexions sur la résolution algébrique des équations“* von Lagrange aus dem Jahre 1772 sehr gründlich studiert hatten, und natürlich Gauß' *„Disquisitiones arithmeticae“* von 1801. Dort aber waren die vergeblichen Rechnungen zum algebraischen Auflösungsproblem aus Jahrhunderten systematisch zusammengefaßt. Aus solch mühsamen und zähen Vorarbeiten, und nur daraus, stellte sich im Laufe der nächsten einhundert Jahre die heutige strukturelle Sichtweise ein - notgedrungen, und (noch) nicht als Frucht irgendeines Zeitgeistes oder gar freier Schöpfung.

---

1 Tropfke 1980, S. 151; Cardano, S. 219. Die *Artis magnae sive de regulis algebraicis* erschien 1545 in derselben Druckerei, die ein Jahr vorher mit Michael Stifels *Arithmetica integra* und wiederum ein Jahr früher mit *De revolutionibus orbium coelestium* von Nikolaus Kopernikus bereits zwei Werke von wissenschaftsgeschichtlichem Weltrang herausgebracht hatte.

2 Scholz, S. 276; viele Daten auch bei Pieper.

3 In Tropfke 1980, S. 151 wird berichtet, schon Heron habe sich eine derartige „falsche“ Aufgabe gestellt, nämlich die Höhe $\sqrt{81-144}$ für einen quadratischen Pyramidenstumpf zu berechnen, dessen Seitenkanten 15 Fuß, Grundkanten 28 Fuß und Deckflächenkanten 4 Fuß ausmachten. Heron rechnete dann weiter, indem er das mißliebige Vorzeichen unter der Wurzel einfach vergaß. Bei Cardano wird mit komplexen Zahlen zwar ungern, aber richtig gerechnet. Ausgiebig führte das dann Raffaele Bombelli in seiner berühmten „Algebra“ von 1572 durch - immer noch ein halbes Jahrhundert vor der Idee, grundsätzlich Nullgleichungen zu betrachten und Linearfaktoren abzuspalten, und Girards Fundamentalsatz. „Wir bemerken..., daß die Beschäftigung mit quadratischen Gleichungen keinen Anlaß zur Einführung negativer Zahlen gibt, auch nicht zur Einführung komplexer Zahlen.“ (Tropfke 1980, S. 423 u. 490f.)

4 Tropfke 1980, S. 424

5 „falsche Probleme“, „Tortour“, „so raffiniert, wie nutzlos“; Cardano, Kap. 37

6 „Man kann sich bei jeder Gleichung soviele Lösungen vorstellen (*imaginer*), aber manchmal gibt es keine Größe, die dem entspricht, was man sich vorstellt“; Tropfke 1980, S. 152

7 „Monstrum der idealen Welt“, „fast ein Amphibium zwischen Sein und Nichtsein“, „unmögliche Größen“; Tropfke 1980, S. 153

8 „unmögliche Zahlen“; Scholz, S. 294

9 „Weil nun alle möglichen Zahlen, die man sich immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner als 0 oder 0 selbst sind, ist klar, daß die Quadratwurzeln von Negativzahlen nicht einmal zu den möglichen Zahlen gerechnet werden können. Folglich müssen wir sagen, daß sie unmögliche Zahlen sind. Dieser Umstand führt uns zum Begriff solcher Zahlen, die ihrer Natur nach unmöglich sind und gewöhnlich *imaginäre* oder *eingebildete Zahlen* genannt werden, weil sie bloß in der Einbildung vorhanden sind... Von diesen behauptet man also mit vollem Recht, daß sie weder größer noch kleiner als nichts, ja nicht einmal nichts selbst sind, weshalb sie für unmöglich gehalten werden müssen.

Dennoch bieten sie sich unserem Verstande dar und finden in unserer Einbildung Platz; deshalb werden sie auch bloß eingebildete Zahlen genannt. Obwohl aber diese Zahlen, wie z.B. $\sqrt{-4}$, ihrer Natur nach ganz und gar unmöglich sind, haben wir von ihnen doch einen hinlänglichen Begriff, da wir wissen, daß durch sie eine Zahl angedeutet wird, die mit sich selbst multipliziert als Produkt -4 hervorbringt; und dieser Begriff ist ausreichend, um diese Zahlen den Rechenverfahren zu unterwerfen...

Endlich muß noch das Bedenken behoben werden, daß die Lehre von den unmöglichen Zahlen als nutzlose Grille angesehen werden könne. Dieses Bedenken ist unbegründet. Die Lehre von den unmögliche Zahlen ist in der Tat von größter Wichtigkeit, da oft Aufgaben vorkommen, von denen man nicht sofort wissen kann, ob sie Mögliches oder Unmögliches verlangen. Wenn dann ihre Auflösung zu solchen unmöglichen Zahlen führt, hat man ein sicheres Zeichen dafür, daß die Aufgabe Unmögliches verlangt.“ (Euler, S. 86-88)

„.... woraus erhellt, daß beide Werte imaginär sind oder die Gleichung unmöglich wird, wenn... „ (ebenda, S. 312)

„... während bei imaginären Ausdrücken, wie etwa $\sqrt{-5}$, auch keine Näherung stattfindet, da 100 davon ebensoweit entfernt ist wie 1 oder irgendeine andere Zahl.“ (ebenda, S. 313)

Als kuriose Anmerkung dazu folgendes Zitat: „... Ferner wie ist es möglich, daß etwas kleiner als nichts und doch eine Größe sein kann? Es lehren zwar Einige: ein solches Nichts sei nicht nichts, sondern eine gewisse Art Etwas. Aber diese Erklärung von Nichts taugt nichts, denn aus nichts wird nichts.“ (Friedrich von Drieberg: Die Arithmetik der Griechen. Leipzig: Weigel 1819, S. 130)

10 Bombelli bemerkte in seiner „Algebra“ von 1572, daß z.B. $x^3 = 15x + 4$ durchaus keine falsche Gleichung sei, weil die cardanische Formel lediglich eine komplexe Darstellung der vernünftigen Lösung $x = 4$ gebe. Girard begründete den Nutzen der „unmöglichen Lösungen“ mit der Gültigkeit des Fundamentalsatzes, mit der Sicherheit, daß es keine weiteren Lösungen gebe, und mit der Möglichkeit, Lösungen wahrer Gleichungen zu finden, wenn man ihren Zusammenhang mit unmöglichen Gleichungen studiere. (Tropfke 1980, S. 152) Für negative Lösungen, die als ebenso sinnlos galten, hatte Cardano das schon vorgemacht: $x^3 + 16 = 12x$ hat die sinnlose Lösung $x =$ -4, was für $x^3 + 12x = 16$ die „wahre“ Lösung $x =$ +4 liefert (Cardano, S. 12). Bei Cauchy (um 1826), Gauß (1832) und Hamilton (1837) findet sich dann die „moderne“, formalistische Auffassung, daß es sich um nichts Metaphysisches, sondern um eine Rechnen mit Zahlenpaaren, Polynomklassen oder Ebenenpunkten nach interessanten Regeln handle. (vgl. Gray und Pieper)

11 C. Wessel suchte in einer zunächst wenig beachteten dänischen Schrift von 1797 nach einer Multiplikation für dreidimensionale Größen und führte dazu gerichtete Größen der Ebene auf komplexe Zahlen zurück. J.R. Argand (1806) bemerkte, daß die Frage, wie real gewisse Zahlen seien, von der Art der gemessenen Größe, d.h. vom Anwendungskontext, abhängt. Bei Kontenständen hätte negative Zahlen Sinn, bei Äpfeln nicht. Einen Kontext, in dem nun komplexe Zahlen als Größenmaß Sinn machten, fand er in gerichteten

Strecken der Ebene. Ähnliche Auffassungen vertraten Gauß (ab 1801), J.F. Francais (1813), C.V. Mourey (1828), Cauchy (1849) und andere. (Gray, S. 293-299 und Pieper, S. 208-223)

12 „Ausgangspunkt für Ferro scheint die Frage gewesen zu sein, wann sich $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$ als $u+\sqrt{v}$ schreiben läßt. Ein Hinweis auf dieses Problem steht am Ende der Rudolffschen *Coß* (1525). Stifel untersucht die Angelegenheit in seinen *Erläuterungen zur Coß* (1553/54) genauer, und Ähnliches findet sich (jedoch wohl in Unkenntnis des Vorgängers) in Bombellis *Algebra* (1572).“ (J.E. Hofmann, Bd. I, S. 135)

13 Linearfaktoren, negative Koeffizienten und Nullgleichungen waren im 16. Jahrhundert noch nicht gebräuchlich.

14 Vgl. dazu eine ähnliche Spekulation in Tropfke 1980, S. 447f., sowie die Hinweise in Cantor, S. 446 u. 486; Tropfke 1937, S.140. In Tropfke 1937, Fußnote 527, heißt es noch mit Bezug auf del Ferro: „Man vermutet heute, daß ihm die Lösung durch Probieren mit kubischen Irrationalitäten geglückt sei.“

15 Scipione del Ferro, über den man wenig weiß, lehrte von 1496 bis zu seinem Tode 1526 ununterbrochen an der Universität von Bologna. Er muß wohl gut gearbeitet haben, denn üblicherweise wurden die Lehrverträge alle paar Jahre gewechselt. An der in Mathematik damals führenden Bologneser Universität haben Kopernikus ab 1496 und vermutlich 1506 auch Dürer studiert. Luca Pacioli war dort um 1500 einige Zeit Professor. Nach Nicolo Fontana, genannt Tartaglia (der Stotterer), seien schon 1536 dreißig Jahre vergangen gewesen, seit del Ferro das Geheimnis der kubischen Gleichung gegenüber seinem Schüler Floridus gelüftet habe. (Cantor, S. 346, 468, 483f. u. 496f.)

16 Die Priorität del Ferros ist auch von Tartaglia nicht bestritten worden. Erstaunlich bleibt allerdings, daß del Ferro, Tartaglia und Cardano fast unabhängig voneinander auf denselben Lösungsweg am selben Fall „Kubus + Unbekannte = Zahl“ gekommen sein sollen. (Eine dt. Übersetzung des Anfangs von Kap. XI der Ars magna findet sich in Andersen, S. 165f.)

17 Ferrari hat u.a. die allgemeine Lösung der Gleichung 4. Grades zur Ars magna beigesteuert. Natürlich hatte der Stotterer Tartaglia im öffentlichen Disput wenig Chancen gegen den eloquenten jungen Cardano-Bewunderer. Für Einzelheiten des heftigen Streits sei auf Cantor und Ore verwiesen. Die „vornehme“ Zurückhaltung Cardanos erinnert ein wenig an die spätere „vornehme“ Zurückhaltung Newtons im Prioritätssteit über die Erfindung der Differentialrechnung.

18 Zitiert nach Cantor, S. 488, und Tropfke 1980, S. 448. Bei Cantor geht das Zitat noch weiter.

19 vgl. etwa Eves, S. 173; Struik, S. 64; Tropfke 1980, S. 449f.; Andersen, S. 163-168. Meist wird auf Regiomontan oder Stifel verwiesen; vgl. Fußnote 23.

20 K. Andersen, S. 163

21 vgl. Struik, S. 62ff.

22 Cardano begründet das im Anschluß an die eben zitierte Textstelle etwas umständlicher, indem er die über x^3 überstehenden Teile in quadratische Säulen zerlegt; vgl. Cardano, S. 96f. oder Andersen, S. 164.

23 Es gibt schon entsprechende Hinweise bei Regiomontan 1456 (Tropfke 1980, S. 443f.) und 1471 (Tropfke 1937, S. 135). Michael Stifel hat 1553 bei der Neuherausgabe der Rudolffschen *Coß* dessen perspektivisch gezeichnete Würfelteilung für $\left(3+\sqrt{2}\right)^3 = 45+\sqrt{1682}$ mit der kubischen Gleichung in Verbindung gebracht (Tropfke 1937, S. 140). Auch in seiner *Arithmetica integra* von 1544 findet sich diese Teilung in Parallelprojektion zur Auffindung der dritten Wurzel aus einem Ausdruck der Form $a+\sqrt{b}$ (Röttel).

[24] Tropfke 1937, S. 152. Man sieht diese überraschende Tatsache am bequemsten ein, wenn man die Funktion $f(x) := x^3 + px + q$ studiert. f hat genau dann drei Nullstellen, wenn zwei Extremwerte $f(x_1), f(x_2)$ mit gegensätzlichem Vorzeichen existieren, d.h. wenn das Produkt der Funktionswerte $f(x_1) \cdot f(x_2) = q^2 - \frac{4}{9} p^2 \cdot \frac{|p|}{3} = 4R$ negativ ist.

[25] veröffentlicht 1615, vgl. Tropfke 1980, S. 454. Vermutlich war der Zusammenhang zwischen kubischen Gleichungen und der Winkeldreiteilung im 15. Jahrhundert schon Regiomontan bekannt; Tropfke 1937, S. 135.

[26] Um einzusehen, daß die cardanische Formel auch im Casus irreducibiles funktioniert, muß man Bombellis Problem der Berechnung beliebiger $\sqrt[3]{c \pm i \cdot d}$ lösen. Vietes Erkenntnis des Zusammenhangs mit der Winkeldreiteilungsgleichung eröffnet folgenden Weg:

Wendet man auf die Trisektionsgleichung (19), die ja „die“ Lösung $x_1 = \cos\alpha$ hat, die cardanische Formel an, dann ergibt sich für $a \pm i \cdot b := \sqrt[3]{\cos 3\alpha \pm i \cdot \sin 3\alpha}$ nach Bombelli $x_1 = \cos\alpha = \mathrm{Re}(a + i \cdot b)$. Durch Kubieren und Koeffizientenvergleich findet man auch $b = \sin\alpha$ und damit die de Moivresche Formel für den Grad 3. Um mit dieser Formel beliebige $\sqrt[3]{c \pm i \cdot d}$ ausrechnen zu können, muß man im Radikanden $r := \sqrt{c^2 + d^2}$ ausklammern und 3α so bestimmen, daß $\cos 3\alpha = \frac{c}{r}$ und $\sin 3\alpha = \frac{d}{r}$ wird.

Angesichts der Schlüsselrolle, die den Sinus-Kosinus-Kombinationen bei diesen Umformungen für komplexe Zahlen zukommt, wundert man sich, warum die Deutung in der Ebene bis 1800 fehlte. Die lange gesuchte Darstellung der drei reellen Lösungen im Casus irreducibiles gelang erst 1675 dem Eichmeister Michael Dary; vgl. Hofmann, III, S. 29.

[27] Die Idee ist zwar rechenaufwendig, aber sehr elegant: Wie bei den kubischen Gleichungen kann man den zweithöchsten Summanden immer durch biquadratische Ergänzung fortschaffen, so daß die allgemeine Gleichung 4. Grades durch eine Normalform $x^4 = px^2 + qx + r$ beschreibbar ist. Mit dem Parameter c wird nun die linke Seite quadratisch ergänzt zu $\left(x^2 + c\right)^2 = px^2 + qx + r + 2cx^2 + c^2$. Klammert man anschließend rechts $d := p + 2c$ aus, dann läßt sich der verbleibende Faktor durch Wahl von c zu einem vollständigen Quadrat machen: Er lautet $x^2 + \frac{q}{d} x + \frac{r + c^2}{d} = \left(x + \frac{q}{2d}\right)^2 + \frac{4(p + 2c)\left(r + c^2\right) - q^2}{4d^2}$, und der letzte Bruch verschwindet, wenn c als Nullstelle des kubischen Nenners gewählt wird. Für Ferraris etwas umständlicheren Ansatz und historische Varianten der Grundidee vgl. Tropfke 1937, S. 162ff. und Eves, S. 174 ff. Man beachte, daß Gleichungen 4. oder höheren Grades für die geometrische Auffassung der Renaissancemathematiker lediglich formale Spielereien darstellen konnten - Cardano äußert sich auch entsprechend im ersten Kapitel der Ars magna. (Vgl. Witmer, S. 9)

[28] Hofmann, III, S. 28

[29] Vgl. etwa Wußing oder van der Waerden.

[30] Die Begründung macht einige Mühe, wenn man Brüche des genannten Typs direkt rational machen will. (Vgl. etwa Sawyer, S. 107 u. 199) Tatsächlich gilt die Aussage sogar für Aggregate aus n. Wurzeln, wenn n prim ist. Die folgende Begründung erspart furchtbare Rechnereien: Aus der Erweiterung des Körpers K

um eine n. Wurzel $r = \sqrt[n]{k}$, die noch nicht in K liegt, entstehen mit Hilfe der Grundrechenarten mindestens Zahlen der Form $f(r) := \sum_{j=0}^{n-1} k_j \cdot r^j$. Tatsächlich haben auch Quotienten solcher Zahlen dieselbe Form, wenn n prim ist. Dafür reicht es, den Kehrwert von $f(r)$ genauso darstellen zu können. Ist n prim, dann haben die Polynome $f(x)$ und $g(x) := x^n - k$ als größten gemeinsamen Teiler über K eine Konstante (sonst hätte g schon in K eine Nullstelle und k eine Wurzel). Aufgrund des euklidischen Algorithmus läßt sich der ggT mit Polynomen über K so darstellen:

$$1 = f_1(x) \cdot f(x) + g_1(x) \cdot g(x) = f_1(x) \cdot f(x) .$$

Und damit ist $f_1(r)$ eine ganzrationale Darstellung des Kehrwerts von $f(r)$ über K.

[31] Von den klassischen Konstruktionsaufgaben „mit Zirkel und Lineal“ lassen sich viele auf Gleichungen dritten Grades mit rationalen Koeffizienten zurückführen, neben der Dreiteilung beliebiger Winkel etwa die Verdopplung eines gegebenen Würfels, die Teilung einer Kugel in gegebenem Verhältnis oder die Konstruktion des regulären Siebenecks. (Vgl. etwa Tropfke 1980, Dörrie, Manin oder Breidenbach/Süss) Da die zugelassenen Konstruktionsmittel nur rational mit geschachtelten Quadratwurzeln zusammengesetzte Terme erlauben, sind solche Probleme dann und nur dann „mit Zirkel und Lineal“ lösbar, wenn die entsprechende kubische Gleichung eine rationale Lösung hat.

[32] zitiert nach Becker, S. 214. Das Originalzitat findet sich in G. Kowalewski (Hrsg.): Leibniz über die Analysis des Unendlichen. Leipzig: Ostwalds Klassiker (Nr. 162) 1908, S. 52ff.

[33] Vgl. etwa Tropfke 1980, S. 461-468.

[34] Die Unmöglichkeit einer reell-algebraischen Auflösung der allgemeinen kubischen Gleichung ist in dem ausgezeichneten Lehrbuch von Artin nur noch eine Übungsaufgabe - immerhin mit Sternchen (S. 667). Vgl. auch die kritischen Bemerkungen in Scholz, S. 410: Durch immer höhere Abstraktion habe man Einfachheit, Klarheit und Querbezüge gewonnen. „Der Preis dafür war eine Lehrweise des Stoffes, bei der im schlimmsten Fall der Kontakt mit den Beispielen vollständig verloren geht oder auf den Kopf gestellt oder dieser in verkehrter Weise erscheint - etwa dadurch, daß elementare Ergebnisse so dargestellt werden, als setzten sie die voll entwickelte Theorie voraus.“

Literatur:

Andersen, Kirsti: Algebraische Lösung der Gleichungen dritten und vierten Grades in der Renaissance. In: E. Scholz (Hrsg.): Geschichte der Algebra - Eine Einführung. Mannheim: BI 1990, S. 157-182.

Artin, Michael: Algebra. Basel: Birkhäuser 1993

Becker, Oskar: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Frankfurt/Main: Suhrkamp 1975.

Breidenbach, Walter/Süss, Wilhelm: Geometrische Konstruktionen. In: Behnke/Bachmann/Fladt/Süss: Grundzüge der Mathematik, Band 2. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1960, S. 138-173.

Cantor, Moritz: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Band 2. Leipzig: Teubner 1913.

Cardano, Girolamo: Artis magnae, sive de regulis algebraicis. (Benutzt wurde hauptsächlich die engl. Übersetzung von T. R. Witmer: Ars magna or the Rules of Algebra. New York: Dover 1993.)

Dörrie, Heinrich: Kubische und biquadratische Gleichungen. München: Leibniz Verlag 1948.

Euler, Leonhard: Vollständige Anleitung zur Algebra. (sprachlich modernisierte Fassung der dt. Erstausgabe Petersburg 1770 von Niessner/Hofmann) Stuttgart: Reclam 1959.

Eves, Howard: Great Moments in Mathematics (before 1650). MAA Publ. 1980, S. 172-181.

Fischer, Gerd/Sacher, Reinhard: Einführung in die Algebra. Stuttgart: Teubner 1983.

Freud, Róbert: Sind Gleichungen lösbar? In: R. Freud (Hrsg.): Große Augenblicke aus der Geschichte der Mathematik. Mannheim: BI 1990, S. 51-80.

Gallian, Joseph A. Contemporary Abstract Algebra. Lexington, Mass.: Heath (2°) 1990.

Gray, Jeremy J.: Herausbildung von strukturellen Grundkonzepten der Algebra im 19. Jahrhundert. In: E. Scholz (Hrsg.): Geschichte der Algebra - Eine Einführung. Mannheim: BI 1990, S. 293-323.

Haupt, Otto: Einführung in die Algebra. 2 Bände. Leipzig: Akad. Verlagsges. (2°) 1952/1954.

Hofmann, Joseph E.: Geschichte der Mathematik, 3 Bände. Berlin: de Gruyter 1957/1963 (Samml. Göschen).

Manin, J. I.: Über die Lösbarkeit von Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal. In: Alexandroff/Markuschewitsch/Chintchin: Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band 4. Berlin: DVW 1969, S. 205-230.

Okunjew, L.J.: Der Ring der Polynome und der Körper der rationalen Funktionen. In: Alexan droff/Markuschewitsch/Chintchin: Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band 2. Berlin: DVW 1956, S. 117-296.

Ore, Oystein: Cardano, the Gambling Scholar. Princeton: Univ. Pr. 1953.

Peiffer, Jeanne/Dahan-Dalmedico, Amy: Wege und Irrwege - Eine Geschichte der Mathematik. Basel: Birkhäuser 1994.

Pieper, Herbert: Die komplexen Zahlen. Frankfurt/M.: Harri Deutsch 1988.

Röttel, Karl: Der Mathematiker Michael Stifel. PM 29.8 (1987), 493-500

Sawyer, Walter W. : Eine konkrete Einführung in die abstrakte Algebra. Mannheim: BI 1970.

Scholz, Erhard (Hrsg.): Geschichte der Algebra - Eine Einführung. Mannheim: BI 1990.

Struik, Dirk J.: A Source Book in Mathematics 1200-1800

Toeplitz, Otto: Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihre Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an höheren Schulen. Jahresber. DMV, 36 (1927), S. 88-100.

Tropfke, Johannes: Geschichte der Elementar-Mathematik, Band 3. Berlin/Leipzig: de Gruyter (3°) 1937.

Tropfke, Johannes: Geschichte der Elementarmathematik, Band 1 (4. Aufl.=Neubearbeitung von Gericke/Reich/Vogel). Berlin: de Gruyter 1980.

van der Waerden, Bartel L.: A History of Algebra. Berlin u.a.: Springer 1985.

Weber, Heinrich: Encyklopädie der Elementaren Algebra und Analysis. Leipzig: Teubner (3°) 1909 (= Band 1 der Encyklopädie der Elementar-Mathematik von H. Weber und J. Wellstein).

Wussing, Hans: Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffs. Berlin: DVW 1969.

Adresse des Autors:

Prof. Dr. Lutz Führer
Institut für Didaktik der Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
Postfach 11 19 32
60054 Frankfurt am Main