

Lutz Führer

## Objektstudien in der Vektorgeometrie

Immer wieder haben Kritiker „modernen Geometrieunterrichts“ beklagt, daß die geometrischen Aspekte der physischen Welt nur noch ein Schattendasein fristen dürfen. Es scheint manchmal so, als habe man den klassizistischen Unterricht nach Euklid nur überwunden, um Raum für eine – pädagogisch ebenso unerfreuliche – Lineare Definitionsarithmetic im Vorfeld einiger Universitätsdisziplinen zu schaffen.

Ich kann nicht bestreiten, daß Lineare Algebra in propädeutischer Hinsicht wertvoll ist, leistet sie doch redliche Dienste als mathematisches Hilfsmittel für Ökonomen, Physiker, Statistiker und Mathematiker. Man kann sie auch als Muster einer abstrakten Strukturtheorie lehren. Allerdings bleiben handfeste Anwendungen auf Schulniveau meist unerreichbar oder gekünstelt: Lineare (Un-)Gleichungssysteme sind ohne Computer zu rechenaufwendig, ebenso Matrizen, und qualitative Analysen wirken ohne ausreichenden mathematischen Erfahrungsschatz befremdend (z.B. „Kern des Ableitungsoperators“). Symptomatisch für diese Situation ist wohl das Mißverhältnis zwischen Definitionen und Sätzen in den einschlägigen Schulbüchern der letzten zehn Jahre oder auch in den behördlichen Kursvorschlägen, sei es im KMK-Normenbuchentwurf, in Bayern (KMBI. 1971, S. 660–661), Niedersachsen („Handreichungen“) oder Nordrhein-Westfalen („Empfehlungen“).

Irgendwie scheut man sich denn auch immer noch, die Geometrie ganz fallen zu lassen, sei es „um die Raumanschauung zu fördern“, sei es „um Anwendungen der Linearen Algebra aufzuzeigen“, was dann leider oft genug „aus Zeitmangel“ auf die „Klassifikation der Schnittmengen von Ebenen oder Geraden“ bzw. auf ebene Mittelstufengeometrie abgeschoben wird. Derartige Kurse und Lehrbücher dürften ehrlicherweise nicht länger „... und Analytische Geometrie“, „Vektorgeometrie“ oder gar „vektorielle Geometrie“ heißen, will man nicht bei den Schülern falsche Erwartungen wecken...

Es ist viel dazu gesagt und geschrieben worden, warum ein gehöriger Schuß Geometrie in die Grundausbildung des Oberstufenschülers gehört.<sup>1</sup> Ich möchte darum nur drei zentrale Argumente wiederholen:

- Geometrie übersetzt Realität in mathematisch verfügbare Schemata,
- Geometrie ringt um be „greifbare“ Weltmodelle,
- geometrische Assoziationsschemen leiten die meisten Benutzer jeglicher Mathematik.

Warum wirken dennoch „moderne“ Oberstufenkurse in Linearer Algebra und Analytischer Geometrie geometrisch fast belanglos?

Eine Antwort hat Freudenthal gegeben [10, S. 411]:

„Man erlaubt die Geometrie eben gerade so weit, wie die Methode der linearen Algebra reicht, und das bißchen wird bis zum Erbrechen ausgewalzt und ausgelaugt.... Der prinzipielle Fehler ist der, daß man die Geometrie einem System der Mathematik unterordnet.... Wieviel man von der Geometrie und wie man es bringt, hängt davon ab, was ins System paßt und wie es paßt.... In solch einem starren Ansatz ist es den

<sup>1</sup> Zum Beispiel sind in den Educational Studies oder auch in [15] zahlreiche Aufsätze zum curricularen Begründungszusammenhang der Schulgeometrie erschienen.

Schülern nicht erlaubt, den Raum und seine Körper zu erforschen, den Gegenstand zu ordnen, Definitionen und Deduktionen zu erfinden.... Die Geometrie, die mit linearer Algebra auf der Schule möglich ist, ist ein trübes Abwasser...“

Freudenthal hat dann jedoch – ebenso wie Kelly [16], Laugwitz [21] u.a. – selbst auf einen denkbaren Ausweg hingewiesen, indem er die Benutzung des Konvexitätsbegriffs im Rahmen der Kurse zur Linearen Algebra vorschlug. Leider ist man dieser Empfehlung nur in äußerst bescheidenem Umfang bei Kursen zur Linearen Optimierung gefolgt, vermutlich weil schon bei einfachsten Gebilden Schwierigkeiten mit Ungleichungen auftauchen – so ist z.B. der direkte Nachweis der Konvexität von Kreis und Kugel genauso schwierig wie der der Dreiecksungleichung<sup>1</sup>.

Durch Unterrichtserfahrungen ermutigt, möchte ich im vorliegenden Aufsatz zur Arbeit mit dem Konvexitätsbegriff im Rahmen der üblichen Vektorgeometrie-Kurse anregen. Ich glaube, daß sich hier ein Weg anbietet, dem Hauptübel „moderner“ Oberstufengeometrie beizukommen, nämlich dem Mangel an nichttrivialen und dennoch einfach beschreibbaren Raumkörpern. Stehen solche Körper in genügender Vielfalt zur Verfügung, so entstehen die zentralen Fragestellungen und Methoden der Vektor- wie Abbildungsgeometrie geradezu zwangsläufig aus dem Studium konkreten Materials. Die Schüler sind dafür auf jeder Klassenstufe leichter zu haben als für abstrakte Deduktionen: Sie können selbst Vermutungen entwickeln und zu theoretischen Untersuchungen anregen, um deren Ergebnisse nachher wieder auf anschauliche Gebilde anzuwenden, sie erfahren am konkreten Objekt wie unzulänglich die Anschauung ist und wie sehr man ihr durch analytische Erkenntnisse auf die Sprünge helfen kann, und sie lernen, Lehrsätze von vornherein mit unterschiedlichem Bedeutungsgrad zu gewichten. Schließlich können etwa vorhandene Analysiskenntnisse immer wieder nutzbringend eingesetzt werden, was sowohl dem geometrischen wie analytischen Verständnis zugute käme.<sup>2</sup>

### 1. Konvexe Mengen im linearen Raum

#### 1.1. Zur Terminologie:

Der Einfachheit halber sind die folgenden Überlegungen auf den  $\mathbb{R}^3$  bezogen. Seine Elemente werden als Vektoren bezeichnet, durch Symbole wie  $a, b, \dots$  gekennzeichnet oder in Spaltenform notiert. Unmittelbar mit der Einführung der linearen Operationen sind zwei Selbstabbildungstypen des  $\mathbb{R}^3$  verbunden, die Parallelverschiebungen oder Translationen der Form  $T_a: x \mapsto x + a$  und die (linearen) Streckungen der Form  $S_\alpha: x \mapsto \alpha \cdot x$ .

Mit  $a, e_1, e_2$  bzw.  $e_3$  werden die Vektoren  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  bzw.  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  bezeichnet.

Um den relativ komplizierten Überbau des affinen Raumes zu sparen, werden affine Begriffsbildungen wie Gerade, Ebene, affine Abbildung usw. als „bis auf Parallelverschiebung linear“ verstanden, so ist etwa eine Gerade nichts anderes als eine (möglicherweise)

<sup>1</sup> Das liegt in der Natur der Sache begründet und hat keineswegs nur technische Ursachen; vgl. Abschnitt 2.3.

<sup>2</sup> Analysiskenntnisse werden im folgenden jedoch nur vorausgesetzt, wenn der entsprechende Absatz mit (A) gekennzeichnet ist.

parallelverschobene Ursprungsgerade. Vektoren werden grundsätzlich durch Punkte (zeichnerisch) veranschaulicht, Translationen durch *gebogene* Pfeile. (Letzteres hat den Vorteil, daß die Pfeile nicht als geometrische Objekte, etwa als Strecken mißverstanden werden.)

Mit  $I$  bezeichnen wir das reelle Einheitsintervall  $\{t \mid 0 \leq t \leq 1\}$ , während  $L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n), L(M)$  bzw.  $\mathbf{a}_0 + L(\dots)$  lineare bzw. affine Erzeugnisse symbolisieren, d.h. die Mengen der entsprechend aus  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  oder allen Vektoren von  $M$  (mit Verschiebung um  $\mathbf{a}_0$ ) linear kombinierbaren Vektoren. So ist z.B.

$$\mathbf{a}_0 + L(M) := \{\mathbf{a}_0 + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \text{ ist endliche Linearkombination aus } M\}.$$

Für die Symbole  $K(\dots)$  bzw.  $A + B, \alpha \cdot A$  sei auf Abschnitt 1.4. bzw. 2. verwiesen.

## 1.2. Strecken

Da wir unsere Umwelt grundsätzlich in begrenzten Ausschnitten wahrnehmen, müssen beim Aufbau eines mathematischen Modells für den Anschauungsraum eigentlich Strecken vor den Geraden erklärt werden, zumal man sich Geraden doch in der Regel als unbegrenzt verlängerte Strecken denkt – jede Zeichnung eines Achsenkreuzes setzt diesen geistigen Akt voraus.

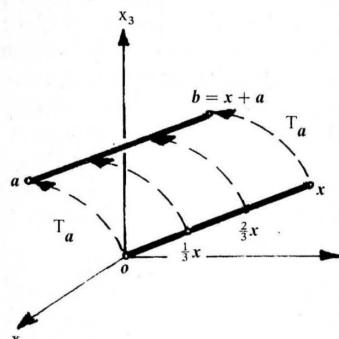


Fig. 1

Im Unterricht kann das etwa so geschehen:

Zunächst wird aus einem Vektor  $x$  durch „Schrumpfung“ die Verbindungsstrecke mit  $\mathbf{o}$ :  $[\mathbf{o}; \mathbf{x}] := \{t \cdot \mathbf{x} \mid 0 \leq t \leq 1\}$ . Möchte man nun  $\mathbf{a}$  mit  $\mathbf{b}$  verbinden, so suche man unter den – schon erklärt – Ursprungsstrecken diejenige, deren Enden durch eine geeignete Parallelverschiebung auf  $\mathbf{a}$  bzw.  $\mathbf{b}$  abgebildet werden. Man hat dabei zwei Möglichkeiten:  $\mathbf{o}$  kann auf  $\mathbf{a}$  oder  $\mathbf{b}$  gebracht werden. Im ersten Fall muß  $T_{\mathbf{a}}([\mathbf{o}; \mathbf{x}]) = [\mathbf{a}; \mathbf{b}]$  sein, d.h.  $\mathbf{b} = T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$  und folglich  $\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ , wenn man voraussetzt, daß Translationen Strecken auf Strecken abbilden sollen. Es müßte also festgesetzt werden, daß

$$[\mathbf{a}; \mathbf{b}] := T_{\mathbf{a}}([\mathbf{o}; \mathbf{b} - \mathbf{a}]) = \{\mathbf{a} + t \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \mid t \in I\} \quad (1.2.1)$$

ist.

Im zweiten Fall müßte entsprechend  $\mathbf{a} = T_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}$  sein, also  $\mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$  und folglich

$$[\mathbf{a}; \mathbf{b}] := T_{\mathbf{b}}([\mathbf{o}; \mathbf{a} - \mathbf{b}]) = \{\mathbf{b} + s \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \mid s \in I\}. \quad (1.2.2)$$

Worin unterscheiden sich nun beide Definitionsvorschläge? Durchlaufen  $s$  und  $t$  von Null an das Einheitsintervall  $I$ , so wird die Strecke nach (1.2.1) von  $\mathbf{a}$  nach  $\mathbf{b}$  durchlaufen, nach (1.2.2) aber von  $\mathbf{b}$  nach  $\mathbf{a}$ . Als Mengen sind aber beide Strecken gleich! Durchläuft nämlich  $t$  das Intervall  $I$  wachsend, so durchläuft  $s := 1 - t$  dasselbe Intervall fallend. (1.2.1) und (1.2.2) beschreiben also dieselbe Menge wie

$$[\mathbf{a}; \mathbf{b}] := \{s \cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b} \mid s, t \in I \text{ mit } s + t = 1\}. \quad (1.2.3)$$

Eine andere Möglichkeit zur Einführung des Streckenbegriffs besteht darin zu fragen welche Translationen  $\mathbf{a}$  auf „geradem Weg“ in Richtung  $\mathbf{b}$  verschieben. Speziell  $T_{\mathbf{b}-\mathbf{a}}$  schiebt  $\mathbf{a}$  ganz nach  $\mathbf{b}$ . Will man nur halb- oder „ein-Drittel“ soweit, so nehme man  $T_{\frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a})}$  bzw.  $T_{\frac{1}{3}(\mathbf{b}-\mathbf{a})}$  usf.

Bei beiden Einführungen wird sofort klar, was als Mittelpunkt von  $[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$  anzusehen ist, nämlich das arithmetische Mittel  $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ .<sup>1</sup>

Eine schöne Aufgabe im Anschluß: Das Viereck  $V$  sei durch die Ecken  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  gegeben.

Man bestimme und untersuche sein Mittenviereck  $M$ !

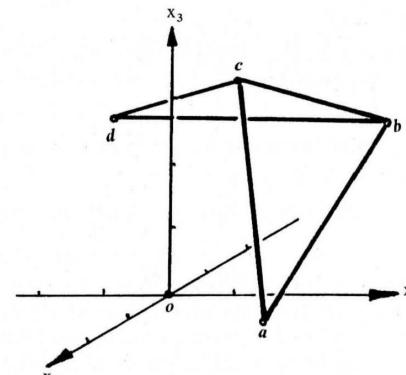


Fig. 2

Zunächst muß eigentlich erst geklärt werden, was mit  $V$  gemeint ist. Beachtet man die alphabetische Reihenfolge, so ist

$$V = [\mathbf{a}; \mathbf{b}] \cup [\mathbf{b}; \mathbf{c}] \cup [\mathbf{c}; \mathbf{d}] \cup [\mathbf{d}; \mathbf{a}] \quad (1.2.4)$$

und demnach

<sup>1</sup> Das Studium von Teilverhältnissen liegt auf der Hand.

$$M = [\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}); \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})] \cup [\frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}); \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{d})] \cup [\frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{d}); \frac{1}{2}(\mathbf{d} + \mathbf{a})] \cup [\frac{1}{2}(\mathbf{d} + \mathbf{a}); \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})].$$

Da  $T_{-\frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{d}}$  die erste auf die dritte und  $T_{-\frac{1}{2}\mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a}}$  die zweite auf die vierte Seite von  $M$  bringen, handelt es sich bei  $M$  also – unabhängig von speziellen Koordinatenwerten – stets um ein Parallellogramm.

Ich habe diese altbekannte Beobachtung hier so ausführlich dargelegt, weil sie ein schönes Beispiel für das abgibt, was ich mit „Objektstudien in der Vektorgeometrie“ meine: Im Idealfall erschließen sich überraschend allgemeine Erkenntnisse aus dem Studium eines oder mehrerer konkreter geometrischer Figuren. Ohne Muße für heuristische Ansätze, ohne konkret-geometrische Initialzünder artet die Lehre von der Geometrie leicht in Auswendiglernerei aus.

An den Satz vom Mittelparallelogramm lassen sich nun zahlreiche Überlegungen anschließen:

- Die Verbindungsstrecken der Mitten von Gegenseiten schneiden sich im arithmetischen Mittel der Ecken. Es liegt nahe, diesen Schnittpunkt als „Schwerpunkt“ des Vierecks aufzufassen. Welchen physikalischen Sinn kann man dieser Auffassung geben?
- Vertauscht man die Ecken von  $V$  zyklisch (in alphabetischer Reihenfolge), so geht das nach (1.2.4) erklärte  $V$  in sich über, anders bei „azyklischer“ Vertauschung: z.B. erhält man bei Vertauschung von  $\mathbf{a}$  mit  $\mathbf{b}$ :

$$V' = [\mathbf{b}; \mathbf{a}] \cup [\mathbf{a}; \mathbf{c}] \cup [\mathbf{c}; \mathbf{d}] \cup [\mathbf{d}; \mathbf{b}]$$

mit veränderten Seiten und neuem Mittenviereck  $M'$ . Welche Beziehungen bestehen zwischen  $M$  und  $M'$ ? Wieviele verschiedene Vierecke gibt es zu vier vorgegebenen Ecken?

- Wie verändert sich  $M$ , wenn eine Ecke von  $V$  „wandert“ (z.B. auf einer Parallelen zur gegenüberliegenden Vierecks„hälfte“)? Gibt es Lagen dieser Ecke, bei denen  $M$  und  $M'$  besondere Gestalt oder relative Lage haben?

- Ist das Mittenfünfeck(-sechseck) eines räumlichen Fünfecks (Sechsecks) eben (mit paarweise parallelen Seiten)?

Der Frage nach dem Schwerpunkt kann man noch eine andere Wendung geben, wenn man an die „Vierecksfläche“ denkt. Im Beispiel (1.2.4) wird man als „Fläche von  $V$ “ wohl die Vereinigung der Dreiecksflächen mit den Ecken  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  bzw.  $\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}$  ansehen. Oder sollte man die Vereinigung der Flächen zu  $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  und  $\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$  wählen? (Daß die Vierecksfläche durch die Ecken nicht eindeutig festliegt, ist für Schüler keineswegs selbstverständlich.) Bleiben wir erst einmal bei der ersten Fläche. Erhält man den Schwerpunkt von  $V$ , wenn man die Mitte zwischen den Schwerpunkten der beiden Teildreiecke berechnet? Unsere Erfahrungen mit dem Streckenmittelpunkt und der Mitte des Mittenvierecks legen nahe, den Schwerpunkt des Dreiecks zu  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  wiederum als arithmetisches Mittel der Ecken zu wählen.<sup>1</sup> Demnach ergäbe sich als „Schwerpunkt von  $V$ “ jedoch

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(\mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{a}) = \frac{1}{6}(2\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c} + \mathbf{d}),$$

<sup>1</sup> Eine einfache Rechnung zeigt, daß sich hier die Seitenhalbierenden schneiden.

ein Mittelwert, in dem  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{c}$  doppelt repräsentiert sind, weil sie zu beiden Teildreiecken gerechnet wurden. (Man kann sich diese Ecken mit doppelter Massenbelegung versehen denken. Bei homogenen Flächenbelegungen der Teildreiecke müßte man noch deren Fläche berücksichtigen usw.)

Für spätere Überlegungen ist es nützlich, eine erste Beschreibung der Dreiecksfläche zu haben. Analog zum Vorgehen bei Strecken denke man sich zunächst eine Ecke im Ursprung. Die Fläche  $\Delta(\mathbf{o}; \mathbf{x}; \mathbf{y})$  läßt sich dann als Vereinigung aller Verbindungsstrecken von  $\mathbf{o}$  mit den Punkten von  $[\mathbf{x}; \mathbf{y}]$  gewinnen, also  $\Delta(\mathbf{o}; \mathbf{x}; \mathbf{y}) := \{\mathbf{sz} \mid s \in I \text{ und } z \in [\mathbf{x}; \mathbf{y}]\}$ . Die Translation  $T_a$  bringt dann  $\mathbf{o}$  nach  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{x} := \mathbf{b} - \mathbf{a}$  nach  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{y} := \mathbf{c} - \mathbf{a}$  nach  $\mathbf{c}$ , so daß zwangsläufig definiert werden muß:

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}) &:= T_a(\Delta(\mathbf{o}; \mathbf{b} - \mathbf{a}; \mathbf{c} - \mathbf{a})) = \{\mathbf{a} + s \cdot \mathbf{z} \mid s \in I, \mathbf{z} \in [\mathbf{b} - \mathbf{a}; \mathbf{c} - \mathbf{a}]\} \\ &= \{\mathbf{a} + s \cdot ((1-t)(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + t \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})) \mid s, t \in I\} \\ &= \{(1-s) \cdot \mathbf{a} + (s - st) \cdot \mathbf{b} + st \cdot \mathbf{c} \mid s, t \in I\}. \end{aligned}$$

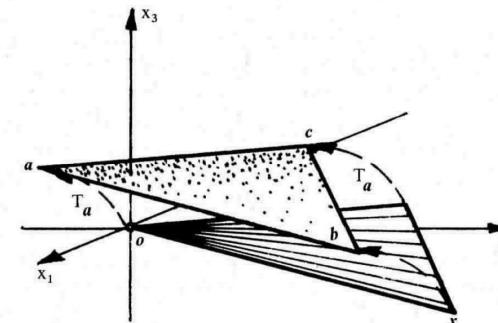


Fig. 3

Die Darstellung der Dreiecksfläche erscheint nun sehr asymmetrisch hinsichtlich der Koeffizienten von  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$ . Es fällt jedoch auf, daß die Koeffizientensumme wiederum eins ist und kein Koeffizient negativ. Demnach ist  $\Delta(\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c})$  enthalten in der Menge

$$K(\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}) := \{\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} \mid \alpha, \beta, \gamma \in I \text{ und } \alpha + \beta + \gamma = 1\}. \quad (1.2.5)$$

Durch einfaches Nachrechnen zeigt man, daß umgekehrt auch  $K \subset \Delta$  gilt, daß (1.2.5) also die gesuchte Dreiecksfläche beschreibt.

Abschließend seien noch zwei etwas schwierigere Aufgaben zum Thema Strecken genannt:

- Kann man jedem Viereck in  $\mathbb{R}^2$  ein Rechteck einbeschreiben, dessen eine Seite parallel zu  $[\mathbf{o}; \mathbf{e}_1]$  ist? (Vgl. Engel [8, Nr. 149])
- Wo liegen die Mittelpunkte aller Verbindungsstrecken zwischen zwei benachbarten, sich nicht berührenden Flächendiagonalen eines Würfels? Ist diese Menge eben?

### 1.3. Konvexität

Nach P.J. Kelly [16] läßt sich der Konvexitätsbegriff auf reizvolle Weise einführen, indem man versucht, die Charakteristika des Begriffs „Körper“ zu thematisieren: Was ist überhaupt ein Körper und wie läßt sich das mathematisch fassen?

Schüler haben mir darauf ähnliche Antworten gegeben wie sie Kelly antizipiert: In erster Linie dachten sie an beschränkte Teilmengen des  $\mathbb{R}^3$ .<sup>1</sup> Erst auf die zusätzliche Frage, wann man von einem Objekt sprechen könne, kamen Hinweise wie „substanziell“, „nicht allzu ätherisch“ oder „zusammenhängend“. Nach einigen unzulänglichen Ansätzen schlug dann z.B. ein Schüler vor, den Zusammenhang dadurch zu charakterisieren, daß den Körper treffende Geraden stets nur einzelne Punkte oder Intervalle ausschneiden. Es wurde auch erkannt, daß damit etwa nierenförmige Gebilde ausgeschlossen wären, was zu Modifikationen in Richtung auf den mathematischen „Wegzusammenhang“ führte. Andere Schüler verworfen auch diesen Ansatz, weil sie z.B. zwei sich berührende Kugeln nicht als einen Körper akzeptieren mochten. Um den technischen Aufwand in Grenzen zu halten, einigten wir uns vorerst auf den engeren Schülervorschlag:

Eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  heiße *konvex*, wenn sie von Geraden höchstens in einem Punkt oder Intervall getroffen wird. Oder – was technisch bequemer ist und auf dasselbe hinausläuft:

$M \subset \mathbb{R}^3$  heiße *konvex*, wenn für beliebige  $a, b \in M, t \in I$  stets

$$(1-t)a + t \cdot b \in M \quad (1.3.1)$$

ist.

Natürlich machten wir uns nun auf die Suche nach konvexen Mengen. Zahlreiche Vorschläge wie Dreieck, Viereck, Kreis, Kugel, Ei, Polyeder... wurden – zunächst kommentarlos – an der Tafel notiert.

Was nun – soll man sofort exakte Beweise anhängen? Auf nicht-konvexe Vierecke oder Polyeder abheben? Beide Vorgehensweisen erwiesen sich als unfruchtbare, weil der rechen-technische Aufwand in keinem Verhältnis zu den anschaulich so harmlosen Tatsachen zu stehen schien. Befriedigender verlief der Unterricht in dieser delikaten Phase, wenn vor den technischen Übungen eine Weile arglos mit Konvexitätsargumenten hantiert wurde. Erst danach, wenn der Konvexitätsbegriff bei den Schülern schon einen gewissen Kredit hat, unterzogen sie sich bereitwillig dem leider notwendigen technischen Training. Daher wurden Aufgaben des folgenden Typs zunächst heuristisch, mit vielen Anschauungsargumenten behandelt:

- Gegeben sind fünf Punkte in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ . Keine drei von ihnen liegen auf einer Geraden. Finden sich unter ihnen mindestens vier, die ein konvexes Vieleck bilden?
- Wieviele Schnittpunkte liefern die Diagonalen eines (ebenen) konvexen n-Ecks, wenn keine drei von ihnen einen gemeinsamen Schnittpunkt haben? Kann das überhaupt passieren?
- Gibt es in  $\mathbb{R}$  noch andere konvexe Teilmengen außer den Intervallen?

<sup>1</sup> Die Beschränktheit wurde sofort auf die Koordinatenmengen heruntergespielt.

– Welche Form kann  $M \subset \mathbb{R}^3$  haben, wenn  $M$  und zugleich der „Außenraum“  $\mathbb{R}^3 \setminus M$  konvex sind?

– Ist  $M \cup M'$  konvex, wenn es  $M$  und  $M'$  sind? Wie bekommt man die kleinste konvexe Obermenge? Ist  $M \cap M'$  konvex, wenn es  $M$  und  $M'$  sind? Wie ist das beim Durchschnitt unendlich vieler konvexer Mengen? (z.B. läßt sich so die Konvexität des Vollkreises oder des Überbaus einer Parabel mit Hilfe der Tangentenhalbebenen bequem nachweisen.)

– Wie sieht die kleinste konvexe Menge aus, die die Vektoren  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  enthält? Vgl. (1.2.4).

– Wie kann der Durchschnitt eines Tetraeders mit einer Kugel aussehen?

– Welche Formen können als Grundrisse konvexer Pentaeder auftreten?

– Warum fällt ein (realer) Spielwürfel – bei glatter Unterlage – stets auf eine Seite, warum bleibt er nie auf einer Kante liegen?

– Kegel, deren Spitze in  $o$  liegt, lassen sich sehr allgemein definieren:  $M \subset \mathbb{R}^3$  heiße kegelartig, wenn für jedes  $a \in M$  und beliebige nichtnegative Zahlen  $\alpha$  stets auch  $\alpha \cdot a \in M$  ist. Aus jeder Teilmenge  $A$  des  $\mathbb{R}^3$  läßt sich leicht ein kegeliges Gebilde erzeugen, indem man  $A$  mit von  $o$  ausgehenden Strahlen abfährt:  $C(A) := \{\alpha \cdot a \mid 0 \leq \alpha \in \mathbb{R} \text{ und } a \in A\}$ . Aus einem Kreis  $A$  wird dabei ein Kreis- oder elliptischer Kegel oder eine Ursprungsebene („wenn  $o$  innerhalb  $A$  liegt“). Aus einer Niere oder einem einspringenden Viereck wird ein eingedellter Kegel usw. Man zeige, daß Durchschnitt und Vereinigung von Kegeln wieder kegelartig sind! Welche Form kommt für einen konvexen Kegel in Frage, der eine Strecke mit Mittelpunkt  $o$  enthält? Man zeige, daß ein Kegel  $M$  genau dann konvex ist, wenn mit  $a, b \in M$  stets auch  $a + b \in M$  ist! Welche Gestalt können die von Tetraedern (oder allgemeineren Polyedern) erzeugten Kegel haben? Zeigen Sie, daß bei gegebenen Zahlen  $a, b, c$ ,

$$M := \{x \mid ax_1 + bx_2 + cx_3 \leq 0\} \quad (1.3.2)$$

stets ein konvexer Kegel ist!

– Bei gegebenen Zahlen  $a, b, c, d$  ist

$$H := \{x \mid ax_1 + bx_2 + cx_3 \leq d\} \quad (1.3.3)$$

stets konvex. (Nachweis?) Im Zusammenhang mit der Behandlung von Ebenen lernen die Schüler,  $H_d := \{x \mid ax_1 + bx_2 + cx_3 = d\}$  als Ebene aufzufassen, so daß  $H$  als Halbraum zur Randebene  $H_d$  gedeutet werden kann. Durch Probieren oder mit Hilfe des Inneren Produkts (Hesseform) erkennt man, daß

$$\mathbf{n} := \frac{d}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (1.3.4)$$

bei nichtverschwindendem Koeffizientenvektor stets in  $H_d$  liegt („Normallösung“ der Ebenengleichung). Verschiebt man mit  $T_{-\mathbf{n}}$ , so wird aus  $H_d$  die Ursprungsebene  $H_d - \mathbf{n}$  und aus  $H$  ein konvexer Kegel nach (1.3.2). (Beweis?)

- Greift man nun das Beispiel Kreis (oder Ei oder Paraboloid) nochmals auf, so kommen die Schüler vielleicht schon auf Stützebenenargumente: Ist  $x \in M$  und ist  $H$  ein Halbraum, in dessen Randebene  $x$  liegt, so „stützt“ diese Ebene  $M$ , wenn  $M \subset H$  ist. Es ist nun leicht zu sehen, daß eine Menge  $M$ , die von Geraden höchstens in (abgeschlossenen) Strecken geschnitten wird, genau dann konvex ist, wenn jeder Punkt ihrer „Oberfläche“ in einer Stützebene liegt. Wann gibt es genau eine Stützebene zu gegebenem Oberflächenpunkt?
- Gegeben seien zwei Strecken, zunächst in  $\mathbb{R}^2$ , dann allgemein in  $\mathbb{R}^3$ , etwa  $[\mathbf{o}; \mathbf{a}]$  und  $[\mathbf{b}; \mathbf{c}]$ . Wie sieht  $[\mathbf{o}; \mathbf{a}] + [\mathbf{b}; \mathbf{c}] := \{x + y | x \in [\mathbf{o}; \mathbf{a}] \text{ und } y \in [\mathbf{b}; \mathbf{c}]\}$  aus? Man zeige, daß diese Menge stets konvex ist! Ist die Summe von Dreiecksflächen stets konvex? (Vgl. Abschn. 2.)

Es zeigte sich, daß man mit solchen Aufgaben recht zwanglos und behutsam in die Nachweistechniken für Konvexität einführen kann. Der unvermeidliche Zeitaufwand erscheint mir durchaus gerechtfertigt, weil hier die Raumanschauung und Phantasie der Schüler angeregt wird und *weil fundamentale Techniken der Linearen Algebra wie Linearkombination, Erzeugung von Hüllen und (Un-)Gleichungssysteme am konkreten Material entstehen*.

Aus den genannten Aufgabentypen sind nun schon zwei Nachweisverfahren für Konvexität hervorgegangen: Der – in der Regel mühsame – direkte Ansatz nach Definition (1.3.1) und die Schnittmengentechnik (Stützebenen u.ä.). Eine dritte Technik beruht auf der Differentialrechnung, sie kann natürlich nur bei entsprechenden Vorkenntnissen der Schüler angesprochen werden:

- Zeigen Sie, daß der Graph einer quadratischen Funktion mit positivem Hauptkoeffizienten stets „oberhalb“ ihrer Tangenten liegt!
- (A) Zeigen Sie, daß der „obere Bereich“ zum Graphen einer reellen Funktion  $f$  in  $\mathbb{R}^2$  konvex ist, wenn  $D_f$  ein Intervall ist,  $f$  überall Tangenten hat und „über“ diesen verläuft!

**Definition:** Eine reelle Funktion  $f$  heiße konvex, wenn ihr „Überbau“  $\{(x, y) | x \in D_f \text{ und } y \geq f(x)\}$  konvex ist.

- (A) Ist eine auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbare Funktion konvex, wenn ihre erste Ableitung monoton wächst?

- (A) Kann man aus dem Vorzeichen der zweiten Ableitung auf Konvexität von  $f$  schließen?
- (A)  $f$  sei über  $[-1; 1]$  definiert und differenzierbar. In  $o$  liege das absolute Minimum von  $f$ . Muß  $f$  nahe  $x = 0$  konvex sein? (Nein!)

- Untersuchen Sie einige Ihnen bekannte Funktionen wie  $|\cdot|$ ,  $[\cdot]$ ,  $\tan$ ,  $\exp$  usw. auf Konvexität!

- $f$  sei über  $I$  definiert und habe dort die folgende Eigenschaft: Für je zwei Stellen  $s, t \in I$  ist stets  $f\left(\frac{s+t}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(s) + f(t))$ , d. h. Mittelpunkte werden von  $f$  nie angehoben. Muß  $f$  dann konvex sein? (Unter diesen Voraussetzungen ist  $f$  genau dann konvex, wenn es stetig ist!) (Extremes Gegenbeispiel: Die Dirichlet-Funktion.)

- (A) Gibt es ganzrationale Funktionen fünften Grades, die konvex sind? (Hinweis: Diese Funktionen müssen mindestens einen Wendepunkt haben!)

- (A) Sind die folgenden Mengen konvex?

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | x > 0 \text{ und } y \leq \log x \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | y \geq 2^x \text{ und } |z| \leq 1 \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} | 0 \leq x \leq 2\pi \right\}, \{x | |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1\}, \{x | \max|x_i| \geq 2\}, \\ \{x | \sqrt{2x_1^2 + x_2^2} \leq x_3\}, \{x | x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \leq 1\}.$$

- Kann man sagen, eine reelle Funktion sei konvex, wenn sie Intervalle stets auf Intervalle abbildet?

- (A) Zeigen Sie, daß  $-\log$  konvex ist, und beweisen Sie damit die folgenden Ungleichungen:

Sind  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$  und  $t_i \in I$  mit  $\sum_{i=1}^n t_i = 1$  gegeben, so gelten  $\sum_{i=1}^n t_i x_i \geq x_1^{t_1} \cdot x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n}$  und  $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$ .

(Anwendungen auf Extremwertaufgaben findet man in MU 18 (1972), Heft 5.)

- (A) Zeigen Sie, daß jede konvexe Funktion im Innern ihres Definitionsbereiches stetig sein muß!

$$– (A) Ist \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | 27(y^2 + z^2) \leq (x+3)^3 \right\} \text{konvex?}$$

Eine vierte Nachweistechnik für Konvexität bietet sich bei der Behandlung linearer Abbildungen an: Sie erhalten, ebenso wie Translationen und folglich affine Abbildungen, Konvexität. Eine wesentliche Folgerung wollen wir im folgenden Abschnitt behandeln.

#### 1.4. Konvexe Hüllen und Polyeder

Man skizziert konvexe Mengen in der Regel durch Angabe ihres Randes bzw. ihrer Oberfläche. Vielecke und Polyeder baut man meist von den Ecken her auf. So haben wir in 1.2. demonstriert, wie man zu „schönen“, d. h. symmetrischen Darstellungen von Strecke und Dreieck kommt. Wir hatten dort sinngemäß

$$[\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2] = \{t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 | t_1 \in I \text{ und } t_1 + t_2 = 1\} \quad (1.2.3)$$

$$K(\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2; \mathbf{a}_3) = \{t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + t_3 \mathbf{a}_3 | t_1 \in I \text{ und } \sum_{i=1}^3 t_i = 1\} \quad (1.2.5)$$

durch eine Art „Kegelkonstruktion“ bekommen, d. h. durch Hinzunahme aller Verbindungsstrecken einer Ausgangsfigur mit einem neu hinzugenommenen Punkt. Vergleicht man mit der Vierecksdarstellung (1.2.4), so wird man naheliegenderweise versuchen, den vom Viereck bestimmten konvexen Bereich (Tetraeder) analog zu gewinnen. Ist die Erwartung richtig, daß

$$K(\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2; \mathbf{a}_3; \mathbf{a}_4) := \left\{ \sum_{i=1}^4 t_i \mathbf{a}_i \mid t_i \in I \text{ und } \sum_{i=1}^4 t_i = 1 \right\} \quad (1.4.1)$$

das von den vier Punkten „aufgespannte“ konvexe Polyeder ist, d. h. unter den konvexen Mengen, die die  $\mathbf{a}_i$  enthalten, die kleinste? Anders gefragt: Ist (1.4.1) konvex und enthalten in jeder konvexen Menge, die die  $\mathbf{a}_i$  erfaßt?

Daß (1.4.1) konvex ist, rechnet man ganz leicht nach. Erwas mühsamer bekommt man die Bestätigung der letzten Forderung:

Ist  $M$  irgendeine konvexe Menge mit  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_4 \in M$ , so umfaßt  $M$  natürlich die Strecke  $[\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2]$  und darüberhinaus alle Verbindungsstrecken von  $\mathbf{a}_3$  mit den Punkten der erstgenannten Strecke. In 1.2. haben wir gesehen, daß so das Dreieck (1.2.5) entsteht, daß es also ganz in  $M$  liegen muß. Zwangsläufig liegen nun auch alle Verbindungsstrecken dieses Dreiecks mit  $\mathbf{a}_4$  in  $M$ , und das bedeutet: Um zu zeigen, daß (1.4.1) in  $M$  enthalten ist, braucht man nur noch zu beweisen, daß jeder Punkt von (1.4.1) auf der Verbindungsstrecke eines Dreieckspunktes aus (1.2.5) mit  $\mathbf{a}_4$  liegt. Dazu nehmen wir uns ein beliebiges

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^4 t_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^3 t_i \mathbf{a}_i + t_4 \mathbf{a}_4 \quad (1.4.2)$$

aus  $K(\mathbf{a}_1; \dots; \mathbf{a}_4)$  her. Leider ist  $t_1 + t_2 + t_3$  nicht unbedingt gleich Eins, so daß nicht sicher ist, ob der vorletzte Summand in (1.4.2) zum „Basisdreieck“ (1.2.5) gehört. Nun ist aber  $t_1 + t_2 + t_3 = 1 - t_4$ , und das sollte uns an die Herleitung von (1.2.3) erinnern. Schreibt man (für  $t_4 \neq 1$ )

$$\mathbf{a} = (1 - t_4) \cdot \left( \sum_{i=1}^3 \frac{t_i}{1 - t_4} \cdot \mathbf{a}_i \right) + t_4 \cdot \mathbf{a}_4, \quad (1.4.3)$$

so liegt die eingeklammerte Summe im Basisdreieck und  $\mathbf{a}$  auf der Strecke zwischen dieser Summe und  $\mathbf{a}_4$ , also in  $M$ .  $M$  muß also die in (1.4.1) beschriebene Menge umfassen.<sup>1</sup>

Auf der Hand liegen nun die Begriffe „Konvexitätskombination“ und „konvexe Hülle“. Man kann jetzt einen Induktionsbeweis für  $K(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  anschließen und genauso zeigen, daß die kleinste konvexe Obermenge  $K(M)$  zu beliebigem  $M$  durch die Menge der Konvexitätskombinationen der Elemente von  $M$  gegeben ist, aber das ist eine rein technische Angelegenheit. M. Es. reicht es, wenn die Schüler den Fall  $n = 5$  in einer Hausarbeit nachzuvollziehen. Die allgemeinen Ergebnisse können dann mitgeteilt werden.

Folgende Aufgaben sind vielleicht lehrreicher:

- Man zeige, daß sich  $K(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_4)$  als Durchschnitt von vier Halbräumen darstellen läßt. (Die  $\mathbf{a}_i$  werden konkret vorgegeben.)
- Welches Polyeder wird durch

$$\{\mathbf{x} \mid \max|\mathbf{x}_i| \leq 3\} \text{ bzw. durch } \{\mathbf{x} \mid \sum_{i=1}^3 |\mathbf{x}_i| \leq 1\} \text{ oder durch}$$

$$\{\mathbf{x} \mid \max(|\mathbf{x}_3|; 2|\mathbf{x}_1| + 3|\mathbf{x}_2|) \leq 1\}$$

<sup>1</sup> Den mit konvexen Mengen vertrauten Leser muß ich hier für meine etwas breite Darlegung um Verzeihung bitten. Ich möchte damit nur andeuten, wie diese für Schüler recht raffinierte Stelle im Unterricht bewältigt werden kann.

beschrieben, und welche Halbräume kann man zur Darstellung heranziehen?

– Kann man  $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  als Konvexitätskombination von  $\mathbf{e}_1$  und  $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$  bzw. von  $\mathbf{e}_1$  und  $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$  oder von  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  und  $\mathbf{e}_3$  darstellen?

– Zeigen Sie, daß sich jede Konvexitätskombination von 5 (bzw. n) Elementen des  $\mathbb{R}^3$  auch als Konvexitätskombination von vier dieser Vektoren schreiben läßt! Heißt das, daß konvexe Polyeder höchstens 4 Ecken haben? Läßt sich jede Konvexitätskombination auf eine Dreierkombination reduzieren? Welche Aussagen entsprechen dem vermutlich in  $\mathbb{R}^4$ ?

– Wie unterscheiden sich die Konvexitätskombinationen von  $K(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_4)$ , wenn es sich um „innere“ bzw. „Oberflächenpunkte“ handelt? Geben Sie ein Beispiel an, wo  $K(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_7)$  nur 4 Ecken hat! Wie findet man die Ecken allgemein heraus, wenn irgendein  $K(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$

$$\text{gegeben ist? Welche Ecken hat } K\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)?$$

(Hinweis: Eine Möglichkeit, Ecken zu finden, ist die Prüfung, ob  $\mathbf{a}_i \in K(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1})$  ist.)

– Gegeben seien zwei Strecken  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ . Welche Ecken hat  $\sigma_1 + \sigma_2$ ?

– Gibt es unbeschränkte Polyeder?

– (Mit konkreten Beispielen:) Man zeige, daß das affine Bild eines konvexen Polyeders stets wieder ein Polyeder ist! Wie ist das mit dem Durchschnitt zweier konvexer Polyeder? Ist die konvexe Hülle der Vereinigung zweier Polyeder wieder ein Polyeder? Man bestimme die konvexe Hülle einiger vorgegebener Teilmengen des  $\mathbb{R}^3$  (u. a. auch des Achsenkreuzes)!

Über Polyeder gibt es eine Fülle an Literatur (z. B. Roman [23] oder – auf wissenschaftlichem Niveau – Grünbaum [13]). Verfügen die Schüler bereits über metrische Werkzeuge, vor allem Winkel, so wird man sicherlich platonische oder gar archimedische Körper ansprechen – ich brauche das hier nicht auszuführen.

Für die Anwendungen folgt aus den genannten Aufgaben automatisch der folgende

### Hauptsatz der linearen Optimierung:

- (1) Hat ein lineares Ungleichungssystem (mit drei Variablen) überhaupt Lösungen, so ist die Lösungsmenge als Schnitt von Halbräumen konvex.
- (2) Ist die (nichtleere) Lösungsmenge eines solchen Systems beschränkt<sup>1</sup>, so handelt es sich um ein Polyeder. (Seine Ecken erhält man – auf allerdings mühsame Weise – aus den Schnitten der Randebenen.)
- (3) Eine lineare oder affine (Ziel-)Funktion bildet die (beschränkte) Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems stets auf ein (abgeschlossenes) Intervall ab, denn das Bild

<sup>1</sup> Bei ökonomischen Anwendungen garantiert das meist die Natur des jeweiligen Problems, vgl. das folgende Beispiel.

ist konvex (bzw. Polyeder) in  $\mathbb{R}^3$ . Da das Bild der Lösungsmenge im Polyeder-Fall von den Bildern der Ecken aufgespannt wird, werden Minimum und Maximum der Zielfunktion zwangsläufig (auch) in Ecken der Lösungsmenge angenommen. (Der Simplex-Algorithmus macht sich das zunutze und sucht, von einer Anfangsecke ausgehend, nur auf „günstigen Kantenwegen“ nach „besseren“ Ecken. Was dabei „günstiger“ und „besser“ ist, erkennt man an der Zielfunktion.)

Als Beispiel ist unten die Lösungsmenge des Ungleichungssystems

$$\begin{aligned} 0 \leq x_1 &\leq 1000, \quad 0 \leq x_2 \leq 2000, \quad 0 \leq x_3 \leq 500, \\ 0,1x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3 &\leq 700, \quad 0,1x_1 + 0,5x_3 \leq 700, \\ 0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 &\leq 700 \end{aligned}$$

skizziert. (Die Ungleichungen könnten sich z.B. aus Kapazitätsbedingungen einer Produktion ergeben haben.) Für die durch  $g(x) := 7x_1 + 3x_2 + 10x_3$  gegebene Zielfunktion

(z.B. Erlös) würde das Maximum 15500 in  $\begin{pmatrix} 1000 \\ 3500 \\ 500 \end{pmatrix}$  und das Minimum 0 in  $\mathbf{o}$  erreicht

werden, wie man durch Berechnung und Auswertung der Ecken oder – bequemer – durch

Projektion auf die Gerade  $\hat{g} = \{t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$  anschaulich erkennt.

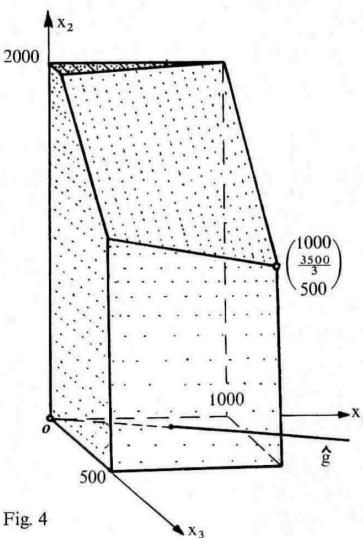


Fig. 4

Muß man auch die technischen Raffinessen der Optimierungstheorie speziellen Kursen vorbehalten, so könnte ein bescheidener Einblick in die geometrischen Grundlagen nach obigem Muster sicher für alle Teilnehmer eines allgemeinen Vektorgeometriekurses vorteilhaft sein.

## 2. Objekte im euklidischen Raum

### 2.1. Zur Einführung der euklidischen Metrik

Kugeln im euklidischen Raum sind konvex – das ist keine Überraschung, liegt doch jeder Punkt ihrer Oberfläche in einer passenden Stützebene. Nun wird diese Stützebene normalerweise durch Hilfsmittel wie „senkrecht“ oder die Dreiecksungleichung gewonnen, und das sind – am Anfang der euklidischen Geometrie – recht starke Geschütze. Sollte man es hier nicht doch lieber mit bescheideneren Mitteln versuchen?

Nach dem linearen Teil der Vektorgeometrie wird im Unterricht

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \quad (2.1.1)$$

als Abstand der beiden Vektoren erklärt, meist durch Rückgriff auf den (ebenen) Satz von Pythagoras. Einfache Eigenschaften wie Symmetrie in  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$ , Nichtnegativität, Translationsinvarianz und Verhalten unter zentrischen Streckungen  $S_{\mathbf{a}}$  sind leicht zu sehen. Lenkt man nun das Augenmerk auf die Abstandskugeln

$$B_r(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \mid |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq r\}, \quad (2.1.2)$$

so springt deren Konvexität ins Auge<sup>1</sup>. Da die Abstandskugeln das geometrische Bild der Metrik sind, wollen wir einen direkten Beweis mit (1.3.1) versuchen. Dabei reicht es, die Einheitskugel  $B := B_1(\mathbf{o})$  zu untersuchen.

Gegeben seien also irgend zwei Vektoren  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B$  und ein beliebiges  $t \in I$ . Wir müssen nachweisen, daß  $|(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}| \leq 1$  ist oder – was uns Wurzeln erspart – daß  $|(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}|^2 \leq 1$  ist. Schreibt man die linke Seite aus:

$$\begin{aligned} |(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}|^2 &= \sum_{i=1}^3 ((1-t)x_i + ty_i)^2 \\ &= (1-t)^2 |\mathbf{x}|^2 + t^2 |\mathbf{y}|^2 + 2(1-t)t \cdot \sum_{i=1}^3 x_i y_i \\ &\leq (1-t)^2 + t^2 + 2(1-t)t \cdot \sum_{i=1}^3 x_i y_i, \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

so stört nur noch die letzte Summe. Man hätte ein Binom vom Wert Eins, wenn diese Summe nicht größer als Eins wäre. Alles, was wir voraussetzungsgemäß wissen, begrenzt nur  $|\mathbf{x}|$  und  $|\mathbf{y}|$  oder – ohne Wurzeln ausgedrückt –  $\sum x_i^2$  und  $\sum y_i^2$ , nicht aber die Produktsumme in (2.1.3). Welche Beziehungen kennen Schüler, die Produkte mit Quadraten

vergleichen? Binomische Formeln! Aus  $(a-b)^2 \geq 0$  erhält man sofort ab  $\leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ , so daß

$$\sum_{i=1}^3 x_i y_i \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (x_i^2 + y_i^2) = \frac{1}{2} (|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2) \leq 1 \quad (2.1.4)$$

und schließlich

<sup>1</sup> Schüler sagen es noch deutlicher: Sie sind „schön“ konvex! Auf die gemeinte Symmetrie kommen wir noch zurück.

$$|(1-t)x + ty|^2 \leq (1-t)^2 + t^2 + 2(1-t)t = [(1-t) + t]^2 = 1$$

wie gewünscht folgt.  $B$  umfaßt also mit je zwei Vektoren stets auch deren Verbindungsstrecke.

Eine schlimme Rechnerei? Nun – man hat es in der Analysis mit weit ernsteren Abschätzungen zu tun, und die Beziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel ist ja unnütz nicht: So erkennt man aus (2.1.4) beispielsweise, daß in (2.1.3) der Zwischenpunkt nur dann auf der Oberfläche von  $B$  liegen kann, wenn er mit  $x$  oder  $y$  zusammenfällt, d. h. daß die Einheitskugel überall „nach außen gewölbt“ ist. Und schließlich hat sich die Rechnerei auch gelohnt:

– Man versuche zunächst einmal, aus Strohhalmen und Blumendraht ein Tetraeder aufzubauen, das je eine Kante der Länge 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 L. E. besitzt. Man wird feststellen, daß das unmöglich ist. Warum? Es klappt immer zusammen! Eine mathematische Erklärung beruht auf der Dreiecksungleichung: Eine der an die „6er-Kante“ angrenzenden Seiten muß eine Kante der Länge 4 und eine der Länge 3 haben. Für die andere angrenzende Seite bleiben dann nur die „5er“ und die „2er-Kante“ übrig, und die Seiten mit der „1er-Kante“ müssen entarten. (Fig. 5a)

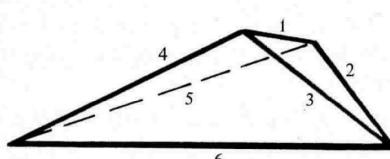


Fig. 5a Das 1-2-3-4-5-6-Tetraeder ist entartet.

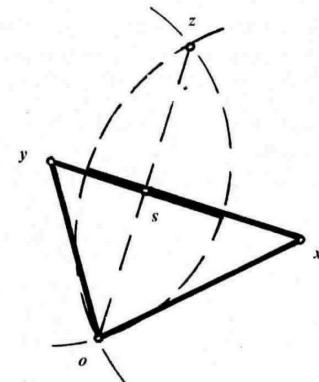


Fig. 5b Da Kreise konvex sind, muß  $s$  auf  $[x; y]$  liegen. Daraus folgt  $|x - y| \leq |x| + |y|$ .

Warum gilt die Dreiecksungleichung im  $\mathbb{R}^3$ ? Schlägt man im Dreieck  $K(o; x; y)$  den Kreis mit Radius  $|x|$  um  $x$  und den mit Radius  $|y|$  um  $y$ , um diese Seiten auf  $[x; y]$  abzutragen, so schneiden sich beide Kreise in  $o$  und  $z$ . Wegen der Konvexität der Kreise enthalten sie beide die Strecke  $[o; z]$  und deren Schnitt  $s$  mit  $[x; y]$ . Damit ist aber  $|x - y| = |x - s| + |s - y| \leq |x| + |y|$ . (Für die andere Diagonale im Parallelogramm  $K(o; x; y; x + y)$  erhält man daraus sofort  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .)<sup>1</sup>

Aus dieser Herleitung der Dreiecksungleichung kann man einen interessanten Schluß für beliebige Abstandsgrößen auf  $\mathbb{R}^3$  ziehen: *Die Ungleichung ist tatsächlich nichts*

<sup>1</sup> Eine andere Herleitung der Dreiecksungleichung aus der Konvexität findet man in [11, S. 39].

anderes als die algebraisch bequeme Fassung der Konvexität der (euklidischen) Eichfigur. Wir kommen darauf in 2.3. näher zu sprechen.

Einige Aufgaben in diesem Kontext:

– Wann gilt in  $|x - y| \leq |x| + |y|$  die Gleichheit? Offenbar genau dann, wenn in obiger Herleitung  $[o; z] = \{o\} = \{s\}$  ist und folglich  $x, y$  zu verschiedenen Seiten des Ursprungs auf einer gemeinsamen Ursprungsgeraden liegen. Wann gilt in  $|x + y| \leq |x| + |y|$  die Gleichheit?

– Man zeige, daß jede isometrische Abbildung des  $\mathbb{R}^3$  in sich Strecken stets auf Strecken abbilden muß! (Hinweis: Man stelle einen Zwischenpunkt als einzigen Schnittpunkt zweier Hilfskugeln um die Enden der gegebenen Strecken dar.) Man folgere, daß jede Isometrie des  $\mathbb{R}^3$  affin und bijektiv ist!

– Bestimmen Sie alle Vektoren, die von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$  gleichweit entfernt sind! Zeigen Sie, daß nur einer dieser Vektoren auf der Kugel  $B_{1,5} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$  liegt! Welche Vektoren sind von  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid x \geq 1$  gleichweit entfernt? (Vom ersten ... doppelt so weit wie vom zweiten ...)

– Ist  $a$  ein Einheitsvektor und ist  $x$  irgendein Vektor des  $\mathbb{R}^3$ , so läßt sich mit quadratischer Ergänzung oder – etwas snobistisch – mit Differenzieren der nächste Punkt  $P_g(x)$  auf der Ursprungsgeraden  $g = \{ta \mid t \in \mathbb{R}\}$  bestimmen:

Soll  $|x - ta|^2 = \sum (x_i - ta_i)^2 = \sum (x_i^2 + t^2 a_i^2 - 2ta_i x_i) = |x|^2 + t^2 - 2t \sum_{i=1}^3 a_i x_i$  durch geschickte Wahl von  $t$  minimiert werden, so bleibt wegen

$|x - ta|^2 = |x|^2 + (t - \sum_{i=1}^3 a_i x_i)^2 - \left( \sum_{i=1}^3 a_i x_i \right)^2$  offenbar nur die Möglichkeit,  $t := \sum_{i=1}^3 a_i x_i$  und schließlich

$$P_g(x) := \langle a; x \rangle \cdot a \quad \text{mit} \quad \langle a; x \rangle := \sum_{i=1}^3 a_i x_i \quad (2.1.6)$$

zu setzen. (Die schon in (2.1.3) bedeutsame Summe erhält hier den Rang eines Projektionsmaßes:  $P_g(x)$  ist genau dann gleich  $o$ , wenn das „Innere Produkt“  $\langle a; x \rangle$  verschwindet, d. h. wenn  $a \perp x$  genannt werden kann.<sup>1</sup>)

Man zeige durch geeignete Definition der Spiegelungsabbildung, daß  $B$  symmetrisch zu allen Ursprungsgeraden ist! Sind  $a, b$  zueinander senkrechte Einheitsvektoren, so wird  $P_E(x) = \langle a; x \rangle a + \langle b; x \rangle b$ . Nachweis? Man zeige, daß  $B$  auch symmetrisch zu allen Ursprungsebenen ist!<sup>2</sup>

– Die vorangehenden Überlegungen schenken uns ein schlagkräftiges Hilfsmittel zur Analyse der Symmetriearbeitungen:

<sup>1</sup> (1.3.2)–(1.3.4) lassen sich nun geometrisch deuten.

<sup>2</sup> Möchte man hier Drehsymmetrie nachweisen, so vgl. man [11, S. 38].

Ist  $J$  eine Isometrie des  $\mathbb{R}^3$ , die  $o$  fest läßt, so muß  $J$  linear sein. Entsprechend der schon wiederholt benützten „binomischen Technik, Produkte mit Quadraten zu vergleichen“, bekommt man die Invarianz des Inneren Produkts aus der Abstandstreue:

$$\langle Ja; Jb \rangle = \frac{1}{2}(|Ja|^2 + |Jb|^2 - |Ja - Jb|^2) = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 - |a - b|^2) = \langle a; b \rangle.^1$$

Daraus folgt nun, daß  $(e_1; e_2; e_3)$  unter  $J$  auf ein orthonormales Dreibein gehen muß und daß umgekehrt jedes solche Dreibein – per linearer Fortsetzung – eine lineare Isometrie liefert. Man kennt also alle Isometrien (bis auf Translation), wenn man ihr jeweiliges Dreibein  $(Je_1; Je_2; Je_3)$  studiert, d.h. ihre Abbildungsmatrix „zeichnet“.

Ich hoffe, daß trotz der gerafften Darstellung deutlich wurde, welcher Beziehungsreichtum in einer geometrisch orientierten Einführung des Abstands begriffs steckt. Natürlich wird eine solche Einführung von zahlreichen konkreten Aufgaben durchsetzt sein:

- Ein Körper durchfliege die Kanten des Standard-Tetraeders  $K(o; e_1; e_2; e_3)$  nacheinander. Geben Sie eine denkbare Flugkurve an, und stellen Sie fest, wann er am nächsten

zu  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (bzw.  $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ ) ist!

- Zeigen Sie, daß die Einheitssphäre nicht konvex ist!
- Geben Sie die Vektoren an, die auf einem Bogen liegen, der zwei vorgegebene Punkte der Einheitssphäre verbindet und ganz in ihr verläuft!

– Untersuchen Sie die Risse von  $A(B)$ , wenn  $A$  die lineare Abbildung ist, die  $x$  auf  $\begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}$

wirft! Versuchen Sie, ein Schrägbild von  $A(B)$  zu skizzieren! Gibt es eine lineare Abbildung, die  $B$  auf ein Polyeder wirft?

– Gibt es konvexe Mengen mit mehreren In- und mehreren Umkugeln? Berechnen Sie die In- und Umkugel des Standard-Tetraeders! In welchem Verhältnis stehen dabei die Rauminhalte der drei Körper?

– Welche affinen Abbildungen bilden den Schnitt der Einheitssphäre mit der Sphäre vom Radius 2 um  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  auf den Einheitskreis im Grundriß ab?

– Zeigen Sie, daß eine Strecke die kürzeste unter allen Polygonalverbindungen zweier Punkte ist!

– An der Frage, welche Form die Mengen  $M := \{x \mid \sum_{i=1}^n |x - a_i| \leq \alpha\}$  bei gegebenen  $a_i \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}_+$  haben, kann sich ein ganzes Forschungsprogramm entzünden. (Wie groß muß  $\alpha$  mindestens sein, wenn  $n = 2$  und  $M \neq \emptyset$  sind? Liegen die  $a_i$  in einer Ebene und

<sup>1</sup> Man sieht hier übrigens, daß die Metrik bereits das Innere Produkt definiert, daß es also keinen Sinn hat, es jetzt „axiomatisch einzuführen“, wie es in manchen Schulbüchern vorgeschlagen wird. Die genannte Technik liefert z.B. auch Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Produktfunktionen mit der Kettenregel aus der von  $x^2$ .

ist  $n = 3$ , so bestimmt das minimale  $\alpha$  den „Punkt von Torricelli“, im Fall  $n = 4$  kommt man auf die bekannte „Flugplatzaufgabe“; vgl. [27] und die dortigen Hinweise. Sind die Mengen  $M$  stets konvex?)<sup>1</sup>

- Wie viele Sphären gehen durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen?
- Warum kann man jede lineare Funktion  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  als Projektion auf eine geeignete Gerade im  $\mathbb{R}^3$  auffassen? (Vgl. das Optimierungsbeispiel in 1.4.)
- Bastelt man aus Strohhalmen ein regelmäßiges Pentagon-Dodekaeder, so bekommt man Stabilitätsprobleme, die man mit eingeflochtenen Raumdiagonalen beheben kann. Wie lang muß man die Diagonalstäbe machen? (Es ergeben sich ziemlich „krumme“ Werte!)

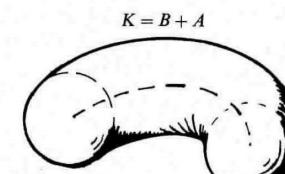
## 2.2. Würste und andere merkwürdige Körper

In der Einleitung zu diesem Artikel habe ich schon erwähnt, daß ich im Mangel an nicht-trivialen Körpern das Hauptübel des gegenwärtigen Unterrichts in Vektorgeometrie sehe. Dieses Übel ist mit Sicherheit auf die technischen Probleme zurückzuführen, die sich schon allein bei ihrer analytischen Darstellung rasch auftürmen. Es ist ein Glücksfall, wenn die Darstellung wie bei Ellipsoiden, Hyperboloiden oder Oktaedern in Form einer einfachen Ungleichung gelingt, aber schon bei den Polyedern kommt man i.a. so leicht nicht davon.

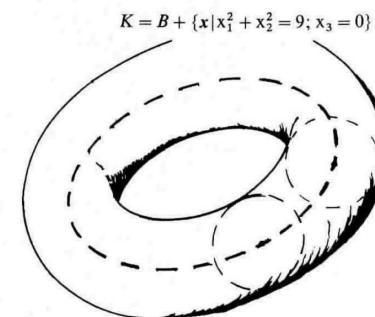
Nun ist in der Theorie der konvexen Körper seit Minkowski ein ganz elementares Konstruktionsprinzip gebräuchlich, dessen konkrete Verwendung im Schulunterricht vielfältige Möglichkeiten zu kreativem Entwurf und genetischer Theoriebildung suggeriert – ich meine die „Komplex-Summen“: Sind  $A$  und  $B$  irgendwelche Teilmengen des  $\mathbb{R}^3$ , so bezeichne

$$A + B := \{a + b \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

die Vektorsumme, die man anschaulich erhält, wenn man  $A$  nacheinander auf alle Punkte von  $B$  addiert, also gewissermaßen an  $B$  entlangschiebt.



$K = B + A$



$K = B + \{x \mid x_1^2 + x_2^2 = 9; x_3 = 0\}$

Fig. 6

<sup>1</sup> Mir ist nicht bekannt, ob das Fermatsche Problem (minimaler Abstand von drei ebenen Punkten) schon einmal in so allgemeiner Form untersucht wurde, vgl. jedoch Courant/Robbins [4, S. 273] und Sieber [27].

Addiert man z. B. die Einheitskugel  $B$  zum Viertelkreis  $A$  bzw. zur ganzen Kreislinie  $A'$  vom Radius 3 um  $o$  im Grundriß, so erhält man als Summe eine Wurst bzw. einen Volltorus (Fig. 6, s. S. 49).

Die folgenden Körper wurden von Schülern gezeichnet.<sup>1</sup> Dabei ist besonders beachtlich, daß keinerlei Vorkenntnisse in Darstellender Geometrie vorhanden waren, daß vielmehr der Wunsch nach diesbezüglichem Unterricht aus den Zeichenversuchen heraus laut

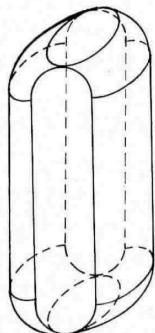


Fig. 7a  $K = A + B$ , wobei  $A := \{x | x_1^2 + x_2^2 \leq 1; -3 \leq x_3 \leq 3\}$   
und  $B := \{x | x_1 = 0; x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$

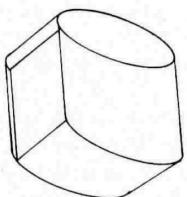


Fig. 7b  $K + L$ , wobei  $K$  der Einheitsvollkreis im Grundriß und  
 $L := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} | |y| + |z| \leq 1 \right\}$

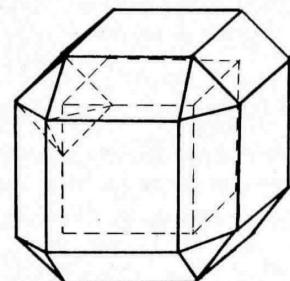


Fig. 7d Würfel + Oktaeder

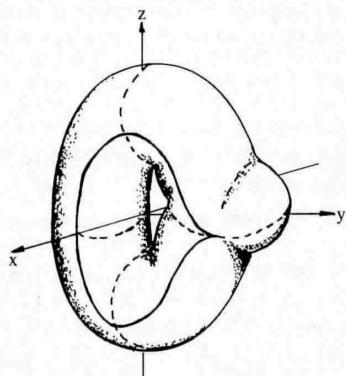


Fig. 7c Die Einheitskugel wurde auf die Kurve  
 $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} | y \leq 2; z^2 = (y + 1) \cdot (y - 2)^4 \right\}$   
addiert.

1 Für die Überlassung ihrer Arbeiten danke ich meinen Schülern D. Aden, L. Höpfner und D. Weiß.

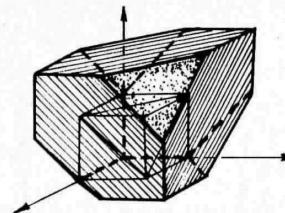


Fig. 7e Im Einheitswürfel  $W$  spannen die von  $o$  ausgehenden  $W + T$ , wobei  $W$  der Einheitswürfel und  $T$  das Tetraeder aus den Flächendiagonalen ist, die  $o$  nicht treffen.

wurde! (Die Summanden der Figuren 7b und 7c hatten sich die Schüler selbst vorgegeben, während die Analyse von 7a einer Abituraufgabe entstammt.)

Arbeitet man – wie oben – zunächst mit orthogonalen Summanden, so lassen sich die Normalrisse besonders einfach gewinnen, und man hat so eine bequeme Hilfe beim Aufbau des Schrägrisses.

Bevor man ein wenig in die Theorie dieser Summen einsteigt, wird man naheliegende Fragen an speziellen Beispielen erörtern, etwa an obiger Figur 7a:

Welche Symmetrien weist die Summe auf? Zunächst ist sie offensichtlich symmetrisch zur Grund-, Auf- und Seitenrißebene. Das ist auch analytisch ganz leicht nachzuweisen:

Die Spiegelung  $S_G: x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$  ist ja linear und überführt die Summanden in sich. Gibt

es noch andere Ebenensymmetrien? Offenbar müßte eine solche Symmetrieabbildung den Deckkreis  $D$  auf sich oder auf den Bodenkreis  $D'$  abbilden, so daß die Symmetrieebene durch die 3. Achse zu verlaufen oder im Grundriß zu liegen hätte. Den letzten Fall haben wir schon erledigt. Läuft die Symmetrieebene aber durch die 3. Achse, so müßte die ebene Frontfigur  $F$  zugleich auf sich oder auf die entsprechende hintere Figur  $F'$  abgebildet werden, was nur die Symmetrie zur Seiten- oder Aufrißebene zuläßt. Es gibt also keine weiteren Ebenensymmetrien. (Mit entsprechenden Argumenten sieht man, daß die Koordinatenachsen alle Achsen symmetrien erfassen und alle Drehungen, daß also alle Symmetrien von  $K$  durch Verkettung der drei Ebenensymmetrien erhältlich sind!<sup>1</sup>)

Welches Volumen hat die Figur 7a? Bei so einfachen Körpern gelingt die Volumenbestimmung meist auf einfache Weise nach Cavalieri. Dabei wird die Raumanschauung der Schüler erheblich trainiert (Fig. 8, s. S. 52).

Es ergibt sich als Volumen der Wert  $10\pi + 24$ .<sup>2</sup>

1 Ein glänzender Hinweis auf den Dreispiegelsatz!

2 Ein Schüler machte darauf aufmerksam, daß Keplers Faßregel hier einen um ca. 16% zu kleinen Wert liefert.

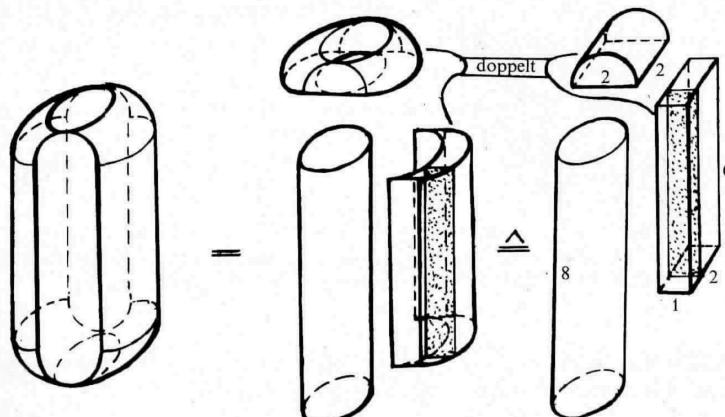


Fig. 8 Figur 7a wird durch „Abschälen“ ausgemessen.  
(Die „Wülste“ werden nach dem Satz von Cavalieri begradiert.)

Bei etwas komplizierteren Körpern – etwa Figur 7c – kann man mit Querschnittsfunktionen und einfachen Integralen arbeiten, wobei der Ansatz der Querschnittsfunktionen wiederum räumliches Denken fordert.

Als ich im Unterricht diese und ähnliche Beispiele behandelte, konnte ich mich vor allgemeinen Behauptungen der Schüler kaum retten, und es tauchte eine Fülle von – teilweise harten – geometrischen Problemen auf. Gibt es so etwas bei Kursen zur Linearen Algebra?

Mit einigen Beispielen möchte ich hier nur zu eigenen Versuchen in dieser Richtung anregen:

- Überträgt sich eine gemeinsame Symmetrie beider Summanden stets auf die Summe? Gibt es eine symmetrische Summe mit asymmetrischen Summanden? Kann man alle Symmetrien durch Aufsuchen der Ebenensymmetrien erschlagen?
- Kann man das Standard-Tetraeder als Summe zweier ebener Mengen gewinnen? Man zeige, daß sich das regelmäßige Kuboktaeder (14-Flächner; Fig. 9) als Summe zweier regelmäßiger Tetraeder gewinnen läßt! (Vgl. [14])
- Man zeige, daß  $K(\mathbf{a}; \mathbf{a}_2) + K(\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \mathbf{b}_3) = K(\{\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_j | i = 1, 2 \text{ und } j = 1, 2, 3\})$  ist, und verallgemeinere den Satz auf beliebige Polyedersummen! (Vgl. [13])
- Mit  $A$ ,  $B$  und  $C$  seien die Einheitsvollkreise im Grund-, Auf- bzw. Seitenriß des  $\mathbb{R}^3$  bezeichnet. Man gebe  $K := A + B$  bzw.  $L := A + B + C$  in Grund-, Auf-, Seiten- und Schrägriß an und bestimme Symmetrien und Volumina!
- Skizzieren Sie die „Wendeltreppe“  $A + B$ , wobei  $A := \{x | |x_i| \leq 1\}$  und  $B := \{x | x_1 = 3 \cos t, x_2 = 3 \sin t, x_3 = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{t}{2} \right] \text{ und } 0 \leq t \leq 2\pi\}$  sind!

- Muß  $K$  eine Kugel sein, wenn  $K$  konvex ist und alle drei Normalrisse gleichgroße Kreise darstellen?
- Jedes Dreieck kann als Summe zweier ihm ähnlicher Dreiecke dargestellt werden (Parallelkörperkonstruktion). Geht es mit nichtähnlichen Summanden? (Hinweis: Man addiere geeignete Stützhalbräume!) Man zeige, daß es zu jedem Viereck (Fünfeck) eine Zerlegung in nicht-ähnliche Summanden gibt! Versuchen Sie, die Argumente auf Tetraeder, Quader u.ä. zu übertragen! Ist es möglich, ein Polyeder mit dreieckigen Seiten in nicht-ähnliche Summanden zu zerlegen? (Vgl. [13])
- Geben Sie einen nicht-punktsymmetrischen konvexen Summanden für jedes punktsymmetrische 6-, 8-, 10-, ...,  $2n$ -Eck an! Warum geht das beim Parallelogramm nicht?
- Ein „Zonotop“ (vgl. [13]) ist eine endliche Summe von Strecken. Man zeige, daß jedes Zonotop punktsymmetrisch ist! Ist es dreidimensional, wenn keine drei der Summanden parallel zu einer Ebene sind?
- Sind Pyramiden und Doppelpyramiden in nicht-ähnliche Summanden zerlegbar?
- Wie könnte man den „Durchmesser“ der Körper aus Figur 7 bestimmen?
- Man zeige, daß die Summe konvexer Mengen stets wieder konvex ist!
- Kann man den Begriff „Prisma“ durch die Summe ebener Figuren erklären?
- (A) Man zeige: Ist  $f$  Graph einer stetigen reellen Funktion mit einem Intervall als Definitionsbereich und ist  $B$  der Einheitsvollkreis in  $\mathbb{R}^2$ , so hat  $f + B$  einen (einmal) differenzierbaren Rand.

Figur 7c deutet, an, wie man Analysiskenntnisse mit dem Thema Komplexsummen verbinden kann: Zunächst bekommen die Schüler eine Kurvendiskussion – etwa einer algebraischen Kurve in  $\mathbb{R}^2$  – aufgegeben, dann soll ein (einfacher) Summand, der nicht in  $\mathbb{R}^2$  liegt, addiert werden, und schließlich gilt es, die Volumenbestimmung der Summe mittels Integralrechnung zu bewältigen. (Oberflächen dürften in der Regel schwerer bestimmbar sein.) Derartige Aufgaben von unterschiedlichstem Schwierigkeitsgrad sind leicht zu entwerfen und eignen sich wegen ihrer Vielschichtigkeit gut für Abiturthemen. Aber auch innerhalb eines Vektorgeometriekurses bietet sich hier eine Fülle von Anschauungsmaterial, das die Grundfragen und -methoden der Abbildungsgeometrie förmlich

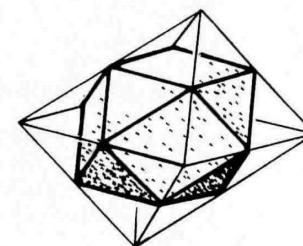


Fig. 9 Das regelmäßige Kuboktaeder.

aufdrängt. Schließlich liegt in der Einfachheit der Beschreibung ein besonderer Reiz: Vor allem, wenn sich die Schüler selbst die einzelnen Summanden ausgedacht haben, bemühen sie sich willig und harnäckig um eine genaue Anschauung des Summenkörpers. Wahrscheinlich sind die Minkowski-Summen eine wahre Fundgrube für konkretisierte Schulgeometrie!

### 2.3. „Bermuda-Kugeln“

Herr P.S. Glaubichnich ist seit vielen Jahren Lagerist, Science-Fiction-Fan und Amateur-Astronom. Berühmt wurde er jedoch erst, als er sich mit viel Sparsamkeit eine Touristenreise ins Bermuda-Dreieck verschaffen konnte. Auf Bimini angekommen, gelangen ihm auf Anhieb ganz erstaunliche Messungen: „Erstmals in der Geschichte der UFOs wurde von einem wissenschaftlich interessierten Menschen zweifelsfreies Material vorgelegt“, hieß es in einer bekannten Boulevard-Zeitung, die sich die Exklusivrechte von Glaubichnich sichern konnte. Dankenswerterweise bekamen wir die Erlaubnis, die kontinuierliche Präzisionsmessung, die Glaubichnich am gesichteten Flugobjekt vornahm, abzudrucken.

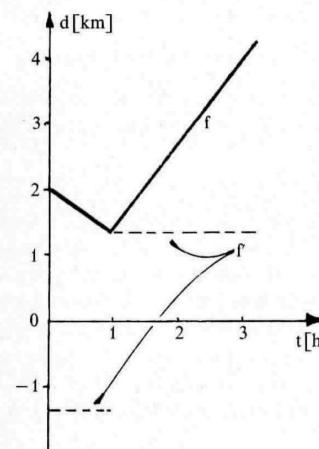


Fig. 10

Wie man sieht, gibt  $f(t) = |1 - t| + 1 + \frac{t}{3}$  das exakte Entfernung-Zeit-Gesetz bzgl. des Beobachters auf Bimini wieder. (Man nennt den charakteristischen Graphen seither den „Glaubichnich-Haken“.) Es spricht für Glaubichnichs wissenschaftliche Integrität, daß er der NASA nicht nur unverzüglich seine Daten übermittelte, sondern darüberhinaus auch sofort das wahrhaft Ungeheuerliche pointierte: Die Radialgeschwindigkeit

$\dot{f}(t) = \frac{t-1}{|t-1|} + \frac{1}{3}$  hat genau eine Stunde nach Beobachtungsbeginn eine Definitionslücke mit deutlichem Sprungverhalten! (Wir haben sie in Figur 10 gestrichelt.)

Da Glaubichnich versichert, solche Beobachtungen mehrfach gemacht zu haben, sind Zweifel an der Präzision seiner Messung natürlich völlig unangebracht.

Aber machen nicht gerade die Wiederholungen das „Glaubichnich-Phänomen“ so besonders erstaunlich? Warum hat es nur Glaubichnich – und das sogar wiederholt – beobachtet? Das rief natürlich Neider auf den Plan. Eine Gruppe ewig-gestriger Physiker konnte die Niederlage (einmal mehr!) nicht ertragen und legte nach zäher Kleinarbeit folgende – selbstverständlich völlig unglaublich wirkende – „Erklärung“ vor, die wir hier nur der Vollständigkeit halber erwähnen wollen:

In Glaubichnichs Lagerbuchhaltung – so der lächerliche Rechtfertigungsversuch der „Wissenschaftler“ – praktizierte man ein grobes Verfahren zur Bestandskontrolle. Dabei müsse der diensthabende Lagerist morgens und abends eine Bestandsliste ausfüllen und die Summe der Einzeldifferenzen mit den Zu- und Abgängen vergleichen. Im Betriebsjargon hießen diese Bestandslisten kurz „Vektor“ und die Summe der Differenzen „Abstand“. Dies lege nun die Vermutung nahe, Glaubichnich habe in einer gewissen Betriebsblindheit den Abstand von Raumpunkten entsprechend nach

$$d(x; y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3| \quad (2.3.1)$$

berechnet. Doch nicht genug mit dieser Unterstellung: Man könne getrost davon ausgehen, daß Glaubichnich einen sich gleichförmig bewegenden Flugkörper gesehen habe, der sich bzgl. Glaubichnichs egozentrischem Koordinatensystem zur Beobachtungs-

zeit  $t$  jeweils in  $f(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \\ t \\ \frac{t}{3} \end{pmatrix}$  befand.

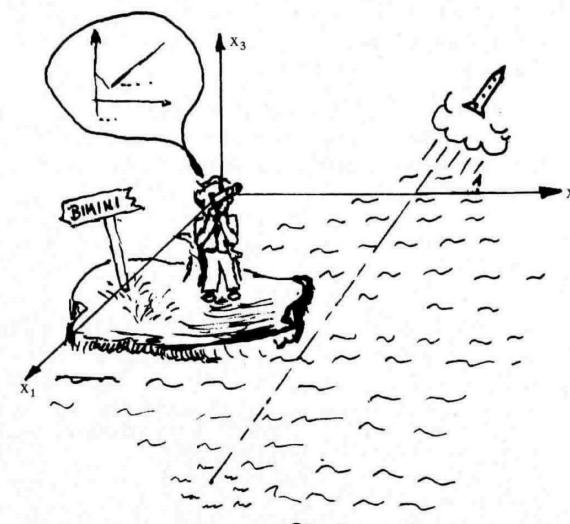


Fig. 11

Man mutet uns also nicht weniger zu, als glauben zu sollen, daß der berühmte Glaubich-nich lediglich die Entfernung zu einem geradlinig und gleichförmig bewegten Objekt mit dem falschen Abstandsbegriff berechnet habe! Selbstverständlich können wir dem keinerlei Glauben schenken, zeugt doch allein der Stil der Anschuldigung von Ignoranz. Ent-gegen allen Miesmachern wissen wir die Taten des großen Mannes zu schätzen und wan-ten gespannt auf Glaubichnichs Autobiographie, die – wie man hört – Charles Berlitz vorbereitet.... –

Man verzeihe mir bitte den kleinen Abstecher in die aktuelle Berichterstattung. Natürlich kann man die Abstandsmessung nach (2.3.1) auch seriöser motivieren: Vermutet man beispielsweise hinter den statisch ermittelten Wertpaaren  $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) eine lineare

Gesetzmäßigkeit, wie das etwa bei Messungen zum Hookeschen Gesetz naheliegt, so wird man nach einer optimalen linearen Funktion der Form  $f(x) = m \cdot x$  suchen, für die die Vektoren  $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  und  $m \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  im Sinne von (2.3.1) möglichst nahe beieinander liegen.

(Die Abstandsmessung des euklidischen Raumes erscheint hier unangebracht, weil sie durch das Quadrieren kleine Koordinatendifferenzen unterschlägt, große jedoch über-bewertet.) Man hätte dann die (reelle) Funktion

$$d(m) := d(y; m \cdot x) \text{ bei fest gegebenem } x \text{ und } y$$

zu minimieren.

– Man führe dies im Fall  $n = 3$  für die Meßpunkte  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1,9 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 3 \\ 3,4 \end{pmatrix}$  durch!

Wir wollen hier nicht weiter auf die Approximationstheorie eingehen<sup>1</sup> und uns auf die geometrische Untersuchung nichteuklidischer Abstandsbegriffe beschränken. Die beiden erwähnten „Anwendungsbeispiele“ sollten nur verdeutlichen, daß „unnatürliche“ Metriken durchaus für Schüler interessant sein können.

Nach Minkowski stehen Metriken auf Vektorräumen in sehr enger Beziehung zu ihrer „Eichfigur“. Gibt  $d(x; y)$  irgendwie den Abstand zwischen den Vektoren  $x$  und  $y$  im  $\mathbb{R}^3$  an, so wollen wir die Eichfigur gemäß der haarsträubenden Geschichte am Anfang eine „Bermuda-Kugel“, nennen. Zu  $d$  gehört also

$$B_d := \{x \mid d(x; o) \leq 1\} \quad (2.3.2)$$

als geometrischer Schlüssel.

– Man zeige, daß  $B_d$  ein konkaves Oktaeder ist, wenn  $d$  nach (2.3.1) erklärt wird! (Geo-metrisch läßt sich die Konvexität am bequemsten durch Angabe eines linearen Ungle-

<sup>1</sup> Generell spielt dieses Thema bekanntlich in der Experimentalphysik und Statistik („Regression“) eine bedeutende Rolle. Für den Vergleich verschiedener Abstandsmaße hinsichtlich des Approximationsproblems sei auf die gut lesbare Einführung bei Kühner u. Lesky [19] verwiesen.

Der an dieser Stelle fast obligatorische Hinweis auf die Minkowski-Metrik  $|(x; t)| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2}$  im Raum-Zeit-Kontinuum und auf das „Listenprodukt“ von Einkaufs- und Preisvektoren (vgl. etwa [20, S. 130 bzw. S. 124]) ist bedenklich, denn die Metrik ist (im klassischen Sinne) nicht auf  $\mathbb{R}^4$  definiert und das Listenprodukt benutzt Faktoren aus verschiedenen „Vektorräumen“. (Vgl. jedoch [22].)

chungssystems nachweisen.) Man diskutiere die Radialgeschwindigkeitskurve, die man erhält, wenn man den zur Zeit  $t$  in  $\begin{pmatrix} t \\ 2 \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}$  befindlichen punktförmigen Flugkörper von  $o$  aus verfolgt! Zeigen Sie für diese Metrik, daß sie translationsinvariant ist, daß stets  $d(\alpha \cdot x; o) = |\alpha| \cdot d(x; o)$  und daß allgemein die Dreiecksungleichung gilt! Welche Eigen-schaften hat  $\langle x; y \rangle_d := \frac{1}{2}(d(x; o)^2 + d(y; o)^2 - d(x; y)^2)$ ? (Es ist kein Inneres Produkt!) Vgl. Fußnote 1 auf S. 48.)

– Geben Sie ein realistisches Beispiel, in dem die Abstandsmessung nach  $d(x; y) := \max |x_i - y_i|$  brauchbar ist, und analysieren Sie die zugehörige „Bermuda-Kugel“!

– Ist die Kugel  $B_d$  konkav, wenn  $d(x; y) := \left( \sum_{i=1}^3 |x_i - y_i|^{0.5} \right)^2$  ist?

– Deutet man jeden Vektor  $a$  als Koeffizientenschema einer (höchstens) quadratischen Funktion  $A: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $A(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ , so stimmen die linearen Operationen der Vektorrechnung mit denen von Funktionen überein, so daß  $\mathbb{R}^3$  zum brauchbaren Modell des Raumes der quadratischen Funktionen über  $I$  wird. Der euklidischen Metrik zieht man dabei i.a.

$$d(a; b) := \max_{t \in I} |A(t) - B(t)|$$

vor. Eine leichte Rechnung beweist, daß  $d$  wieder translationsinvariant und homogen ist sowie der Dreiecksungleichung gehorcht.

Was läßt sich nun über  $B_d$  aussagen? Man sieht leicht, daß diese „Kugel“ konkav ist. Die genaue Gestalt erhält man, wenn man beachtet, daß bei der Berechnung von  $d(a; o)$  lediglich  $|a(0)|, |a(1)|$  und der Betrag der Scheitelordinate verglichen werden müssen, so daß

$$d(a; o) = \begin{cases} \max(|a_0|; |a_2 + a_1 + a_0|), & \text{wenn } a_2 = 0 \text{ oder } \frac{-a_1}{2a_2} \notin I \\ \max(|a_0|; |a_2 + a_1 + a_0|; |a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}|) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit muß  $B_d$  ein Teil des durch die zu  $a_0 = \pm 1$  bzw.  $a_0 + a_1 + a_2 = \pm 1$  gehörigen Ebenen begrenzten Streifens sein. Einen Teil von  $B_d$  erhält man, wenn man den zu  $\frac{-a_1}{2a_2} \notin I$  gehörigen Bereich aus dem Streifen ausschneidet. (Fig. 12a.) Dieser Teil be-steht offenbar aus zwei zueinander kongruenten unregelmäßigen Tetraedern. Die fehlenden Teile von  $B_d$  sind wiederum zueinander kongruent und werden durch eine Schar von Parabolbögen begrenzt, was sich aus der Untersuchung von  $|a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}| \leq 1$  ergibt. Die vollständige „Bermuda-Kugel“  $B_d$  ist in Figur 12b (S. 58) gezeigt.

– Ein schönes Ergebnis erhält man aus der Übertragung der Überlegungen zu Beginn von 2.1.: Ist  $d$  eine Funktion, die jedem Paar  $(x; y)$  von Vektoren eine nichtnegative Zahl auf translationsinvariante, symmetrische und homogene Weise zuordnet, so gilt für d

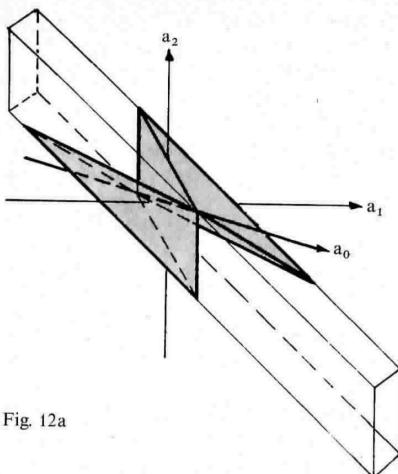


Fig. 12a

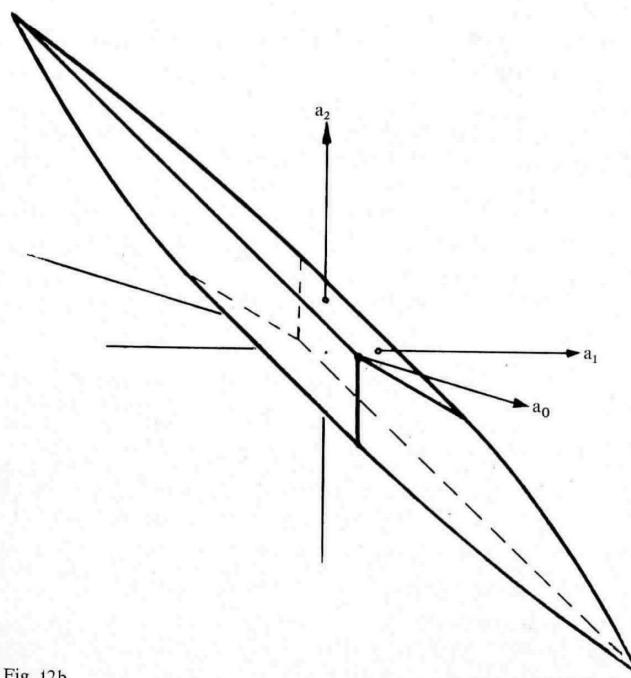


Fig. 12b

genau dann die Dreiecksungleichung  $d(x; y) \leq d(x; z) + d(z; y)$ , wenn  $B_d$  konvex ist.<sup>1</sup> Der einfache Beweis verläuft völlig analog zur Herleitung im euklidischen Fall.

– Wie muß  $B_d$  aussehen, wenn  $d$  von einem (symmetrischen und bilinearen) Produkt kommt? Enthält die Oberfläche von  $B_d$  eine Strecke, so ist  $d$  sicher keine „euklidische“, d.h. Produkt-Metrik: Kommt nämlich  $d$  von einem Inneren Produkt, so kann man ganz analog zum Vorgang in 2.1 zu Punkt und Gerade stets eindeutig den nächsten Punkt auf der Geraden berechnen. Schneidet jedoch die Gerade  $g$  die Oberfläche von  $B_d$  in einer (mehreren) Strecke, so liegen alle Punkte der Strecke „am nächsten“ zu  $o$ . Euklidische  $B_d$  müssen also überall nach außen gewölbt oder geknickt sein. Man kann jedoch noch mehr sagen: Wiederum analog zum Vorgang in 2.1 kann man bei gegebener Produktmetrik  $d$  in  $\mathbb{R}^3$  ein (bzgl.  $d$ ) orthonormales Dreieck auswählen. Ordnet man seine „Beine“ den Vektoren  $e_1, e_2, e_3$  zu, so erhält man durch lineare Fortsetzung eine lineare Isometrie  $J: (\mathbb{R}^3, d) \rightarrow (\mathbb{R}^3, |\cdot|)$ , die  $B_d$  auf  $B$  abbildet. Darum müssen  $B_d$  und  $B$  jedenfalls linear-isomorph sein, d.h.  $B_d$  kann nur ein Ellipsoid darstellen. (Umgekehrt liefert jedes Ellipsoid auf naheliegende Weise eine Produkt-Metrik.) Euklidische Metriken haben also elliptische Eichfiguren.<sup>2</sup>

Mit diesen Beispielen geht es mir nicht darum, eine Theorie aller möglichen Metriken auf  $\mathbb{R}^3$  für den Schulunterricht anzuregen. Ich habe vielmehr erfahren, daß die überraschenden Aspekte einer nichteuklidischen Abstandsmessung auf Schüler äußerst anziehend wirken – anziehend genug, um vom Objekt her geometrische Überlegungen anzustellen, und das ist das Ziel dieses Aufsatzes.

### 3. Aspekte einer objektorientierten Vektorgeometrie

Es gibt eine äußerst fruchtbare Verhaltensweise für Lernende, die jedem Menschen ursprünglich gegeben ist und die ihm nur genommen werden kann, wenn man ihn durch Reizentzug oder auch Informationsüberfüllung abstumpft: Ich meine das Fragen. Geometrie, vom Objekt her, wirft mehr Fragen auf als postwendend beantwortet werden können. Lineare Algebra, theoretisch elegant gelehrt, bietet allzuoft wohlfeile Antworten, wo kein Schüler fragen würde. Es ist, ohne geometrisches Experimentierfeld, eine Lehre (Leere) der Fertigprodukte, nicht selten nur zu künftigem, potentiellen Verbrauch bestimmt. Es ist, als fiele man mit dem Türrahmen ins Haus!

Geometrie, mehr noch als andere mathematische Themen, hat ein so herzliches Verhältnis zur Realität, daß man dem Schüler Chancen zur eigenen Entdeckung, Vermutung und Formulierung nicht vorenthalten darf. Das setzt Muße voraus, und die Bereitschaft, Vokabular, Theorie und Eleganz zurückzuhalten. Und das kann gelegentlich auch heißen: Ansprüche säkularisieren! Was ist denn vom Niveau eines Abiturienten zu halten, wenn er ein lineares Gleichungssystem mit einem Parameter qualitativ analysieren kann,

1 Genau dann liefert  $d(x; o)$  eine Norm auf  $\mathbb{R}^3$ ; vgl. [19].

2 Überall nach außen gewölbte „Bermuda-Kugeln“ müssen nicht elliptisch sein: Ein schönes Beispiel ist Piet Heins „Super-Ei“, das M. Gardner in [12] vorstellt. Es entspricht der Eichfigur  $B_d$ , wobei  $d(x; y) := \left[ \left( \frac{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}}{3} \right)^{2,5} + \left| \frac{x_3 - y_3}{4} \right|^{2,5} \right]^{0,4}$  ist. Charakteristisch für euklidische Normen ist die Parallelogramm-Gleichung (vgl. [19] und [32]).

für den aber die Durchdringung eines Würfels mit einer Kugel zum unüberwindlichen Hindernis wird? Man kann Raumanschauung nicht an Geraden und Ebenen gewinnen – sie sind a priori unbegrenzt, also unanschaulich!

Und die fundamentalen Techniken der Linearen Algebra wie erst recht der Abbildungsgeometrie (was soll denn abgebildet werden?) können ja auf ganz natürliche und zwanglose Weise beim Objektstudium geboren werden. So zeitigt die Strecke Geraden, das Dreieck Ebenen, das Viereck Fragen nach der Dimension, das Polyeder die Linearkombinationen und Hüllenerzeugung und Ungleichungssysteme, die Kugel die Dreiecksungleichung, ein analytisch oder durch Komplex-Summe definierter Körper Symmetrie-, Rauminhalt- und Invarianzprobleme... Und welchen Rang erst müßten, von ihrer Bedeutung in Geometrie, Physik und Stochastik her, Untersuchungen zum Schwerpunktsbegriff einnehmen! Lineare Algebra kann doch nur nachhaltig gelernt werden, wenn sie sich auf Problemstellungen bezieht, die dem Lernenden ein- und ansichtig sind.

Ich hoffe, mit den angeführten Beispielen und Aufgaben deutlich gezeigt zu haben, daß Unterricht in vektorieller Geometrie die geometrischen Wurzeln aller möglichen Fragestellungen dieser und verwandter Disziplinen offenlegen kann, ohne deswegen „unmoderne“ oder rückständig wirken zu müssen. Ich bin davon überzeugt, daß abstrakte Fertigprodukte in den meisten Menschen kein intuitives Verständnis erzeugen und daß jede Transferleistung auf eben dieses tiefere Verständnis angewiesen ist. Sicher ist der historische Entwicklungsprozeß der Linearen Algebra vor allem abstrakten qualitativen Fragen verhaftet, und weil der historische immer noch der am besten dokumentierte Lernprozeß ist, tun wir gut daran, Schülern eine zumindest historisch denkbare Entwicklung vorzutragen. Die Schule jedoch, der Raumanschauung, Motivation und intuitives Methodenverständnis am Herzen liegen, muß die geometrischen Aspekte vor den abstrakten behandeln – gerade weil die letzteren glatter sind.

Anschrift des Verfassers: StR. Dr. Lutz Führer, Holtermannstraße 42, 2940 Wilhelmshaven.

Eingangsdatum: 26.4.1978.

#### Literatur

- [1] Bachmann, H.: Vektorgeometrie. Frankfurt: Diesterweg 1974.
- [2] Böhm, J., W. Börner u.a.: Geometrie II. Berlin: DVW, 1975.
- [3] Collatz, L. u. W. Wetterling: Optimierungsaufgaben. Berlin: Springer 1966.
- [4] Courant, R. u. H. Robbins: Was ist Mathematik? Berlin: Springer 1967.
- [5] Coxeter, H. S. M.: Unvergängliche Geometrie. Basel: Birkhäuser 1963.
- [6] Dexling, L. u. A. Hochrainer: Analytische Geometrie auf der Grundlage des Tensorkalküls. Frankfurt: Diesterweg, 2 Bde. seit 1975.
- [7] Draaf, R. u. J. Lauter: Analytische Geometrie. Düsseldorf: Schwann 1974.
- [8] Engel, A.: Mathematische Olympiadeaufgaben aus der UdSSR. Stuttgart: Klett 1972.
- [9] Faber, K. u. H. Brixius: Lineare Algebra und Analytische Geometrie. Stuttgart: Klett 2 Bde. seit 1974.
- [10] Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe. Bd. II. Stuttgart: Klett 1973.
- [11] Führer, L.: Zur Methodik des Mittelstufenunterrichts, Teil II. In: DdM 6 (1978), Heft 1.
- [12] Gardner, M.: Mathematischer Karneval. Berlin: Ullstein 1977.
- [13] Grünbaum: Convex Polytopes. Reading: Interscience 1967.
- [14] Hadwiger, H.: Altes und Neues über konvexe Körper. Basel: Birkhäuser 1955.
- [15] IDM-Schriftenreihe Bd. 3/1974.
- [16] Kelly, P. J.: In: Educ. Studies Math., 3 (1970/71), S. 476–481.
- [17] Köhler, J., R. Höwelmann u. H. Krämer: Analytische Geometrie in vektorieller Darstellung. Frankfurt: Diesterweg.

- [18] Kohlmann, W., K. Rudolph u.a.: Lineare Algebra und Analytische Geometrie. Braunschweig: Vieweg 1975.
- [19] Kühner, E. u. P. Lesky: Grundlagen der Funktionalanalysis und Approximationstheorie. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1977.
- [20] Lambacher u. Schweizer: Lineare Algebra und Analytische Geometrie. Stuttgart: Klett 2 Bde. seit 1975.
- [21] Laugwitz, D. In: MNU 27 (1974), Heft 1, S. 1–8.
- [22] Liebscher, D.-E.: Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal. Braunschweig: Vieweg 1977.
- [23] Roman, T.: Reguläre und halbreguläre Polyeder. Berlin: VEB DVW 1968.
- [24] Scheid, H. u. R. Powarzynski: Mathematik f. Lehramtskandidaten, Bd. III: Geometrie. Frankfurt: Akad. Verlagsges. 1975.
- [25] Schröder, E.: Darstellende Geometrie. Berlin: DVW 1974.
- [26] Schröder u. Uchtmann: Gruppen von affinen Abbildungen, Koordinaten- und Abbildungsgeometrie, Lineare Algebra und Analytische Geometrie. Frankfurt: Diesterweg 3 Bde. seit 1973.
- [27] Sieber, H.: Abbildungsgeometrie VI. In: MU 13 (1967), Heft 4.
- [28] Tischel, G.: Lineare Algebra. Frankfurt: Diesterweg 2 Bde. seit 1975.
- [29] Valentine, F.A.: Konvexe Mengen. Mannheim: BI 1968.
- [30] Weyl, H.: Symmetrie. Basel: Birkhäuser 1955.
- [31] Wittig, A.: Vektoren in der analytischen Geometrie, Aufgabensammlung. Braunschweig: Vieweg 1968 bzw. 1967.
- [32] Drumm, V.: Eine einfache Kennzeichnung euklid. Vektorräume. In: DdM 6 (1978), Heft 4.

## Nachtrag (April 2015)

1. Der „Objektstudien“-Aufsatz war seinerzeit (1979) auf recht ermutigende Unterrichtserfahrungen in Leistungskursen an niedersächsischen Gymnasien gestützt – durchaus auch in der Breitenbeteiligung. Damals freilich, durften Lehrer bei Aufgabenentwürfen für Abiturprüfungen kreativ sein, was „vor Ort“ erheblich zu neugieriger Spannung und zur sachorientierten Motivation auf Schüler- **und** Lehrerseite beigetragen hatte. Niedersachsen hatte, wie die meisten Bundesländer, damals kein Zentralabitur und nur selten externe Vergleichstests. Bei den unvermeidlich irgendwann bei der Schulaufsicht einzureichenden Vorschlägen zu Abituraufgaben waren lediglich Niveau-, nicht aber Reproduktionsanforderungen zu berücksichtigen, sieht man einmal vom damals sehr dehbaren 4:3:1-Schlüssel für „Reproduktion : Reorganisation : Transfer“ bei den Aufgabenteilen ab. Solche Freiheiten in Unterricht und Lehrbuchnutzung und so viel Vertrauen seitens Dienstherren und Öffentlichkeit gegenüber der Lehrerschaft sind heute natürlich wegen G8, wissenschaftlich-kommerzieller Begleitüberwachung und Zentralabiturdominanz Vergangenheit. Der Gute Glaube der Dienstherr/Innen kam aber dem Arbeitsklima zugute.
2. Im Standardwerk „MU in der Sek. II – Band II“ von U. P. Tietze u. a. wird gelegentlich (1. Aufl. 2000, dort S. 117, 124 bzw. 173) auf Freudenthals Ausführungen zum Thema im 1. Band seiner „Mathematik als pädagogische Aufgabe“ (1973) und auf meinen Objektstudien-Aufsatz (1979) verwiesen. Auf S. 173 heißt es bei Tietze in diesem Zusammenhang: „Wenngleich der Unterricht zur AG und LA inzwischen durch Rücknahme einer übermäßigen Strukturorientierung, durch Rückbesinnung auf nichtlineare Gebilde und den Einsatz des Rechners wieder ‚konkreter‘ geworden ist, so bleiben dennoch erhebliche Defizite.“ Diese „Defizite“ werden zwar nicht genauer beschrieben, aber der vielfache Gebrauch des Stichworts „Objektstudien“ in Tietzes Buch scheint mir immer noch und wohl auch zunehmend aktueller den wunden Punkt zu zeigen, den ich in meinem Aufsatz behandeln wollte:
- Aufgrund der zuerst fachwissenschaftlichen Sozialisation der Lehrer/Innen, insbesondere hinsichtlich fachlicher Wertsetzungen und Geschmacksbildungen, und aufgrund der normativen Zwänge der schulischen Bewertungsbürokratie waren (aus Schülersicht) nichttriviale, z. B. nichtlineare, Objektstudien als Fundamente von Theorieentwicklungen für Lehrer immer riskant, umso risikanter auch für absatzorientierte Schulbuch-Herausgeber. Das ist natürlich durch die grässigsten Trends zu quantitativen „Qualitäts“analysen (!) und Schulvergleichen (mithilfe von Erfüllungsgraden standardisierter Routineaufgaben) und zum Nationalabitur nicht besser geworden. Der Förderung geistiger Eigenleistungen auf Schülerseite kommt das natürlich nicht entgegen, wohl aber der Durchökonomisierung der öffentlichen Erziehungsziele und dem akademisch abgehobenen Forschungsbetrieb. Dass dabei tendenziell Anpassungsleistungen besser gefördert werden als eigenständige Denksversuche und Kreationen, liegt im gymnasialen MU nirgendwo deutlicher offen als im Bereich AG/LA.
3. Im Abschnitt 3.2. von Tietzes Standardwerk wird lang und breit über unterrichtliche Zugänge zum Inneren Produkt (Skalarprodukt) diskutiert. Dabei bleibt – wie m. W. auch sonst in der schulnahen Fachliteratur – ein Fallstrick unerwähnt:

Fragt man Schüler arglos: „Wir haben Vektoren gestreckt und addiert. Wie könnte man sie multiplizieren?“ Dann kommt meistens die Antwort: „... zeilenweise!“ – Warum tut man das nicht???

Eine gute Antwort habe ich nicht einmal bei einer Umfrage unter Fachmathematikern an

einer großen dt. Universität erhalten. Die beste Antwort war noch: „Natürlich kann man das machen. Ich glaube Frobenius hat das um 1900 in der Zahlentheorie ausführlich untersucht. Aber dann bekommt man halt Nullteiler!“ Mein Einwand, Inneres und Vektorprodukt hätten doch auch Nullteiler, führt zu plötzlicher Zeitnot bei meinem Gesprächspartner und gerade noch zu ein paar – am Ende – fruchtlosen Empfehlungen, mich mit Mitarbeitern zu „dieser sehr interessanten Frage“ zu besprechen...

Irgendwo las ich dann – ich glaube – in einem Physikbuch die Aufgabe „Zeigen Sie, dass das zeilenweise definierte Produkt von Vektoren nicht invariant gegenüber Drehungen ist.“ Seither glaube ich, dass dieses naive Produkt von Vektoren deshalb unwichtig ist, weil es physikalisch nutzlos ist. – Was lernt sich daraus für die (Stoff-) Didaktik der AG/LA?

4. In Tietzes Buch werden sehr schöne Objektstudien aus der Literatur berichtet, und es wird (im Jahre 2000) immer wieder vermutet, solche Studien würden mithilfe der sich rasant entwickelnden 3d-, Analysis- und Bildbearbeitungs-Programme attraktiver und leichter werden. Ich glaube, das ist durchaus so gekommen. Und ich glaube, es hat den schulischen Unterricht in AG/LA nicht wirklich verändert. Überraschend finde ich das gar nicht: Gleichschaltung auf Minimalniveau (mittels empiUFO-Geschäftsidee und Zentralabitur) und Trend zum Bild und Anfassen hin (Visualisierung; Zugmodus) und vom Text und selber Durchdenken weg (analytische Darstellungen; Programmierung). Die heute verfügbare 3D-Software für die Schule oder für Computeranimationen verliert offenbar rasch an Attraktivität, wenn zu untersuchende Objekte erst noch erstellt werden müssen, wobei dann oft auch technische Hindernisse eher den Blick auf Zusammenhänge verstellen als eröffnen.

Tatsächlich hatte mir meine Arbeit am Aufsatz von 1979 auch gezeigt, dass die 3-dimensionalen Objekte, die sich auf dem Niveau schulischer Algebra und Analysis einigermaßen einfach darstellen und händisch berechnen lassen, nicht allzu häufig und nicht allzu theoriefreundlich sind. (Einen sehr gut lesbaren Einblick in Auswege aus dieser Problematik fand ich später in Gerald Farin's „Kurven und Flächen im Computer Aided Geometric Design“.)

Ein sehr einfaches, m. W. bisher aber im MU kaum benutztes Mittel, den schulisch sehr unangenehmen Gegensatz „analytische Darstellung  $\leftrightarrow$  dynamische Visualisierung“ mit erträglichem formalistischen Aufwand zu überbrücken, könnten „Zufallsskizzen“ hergeben, für die einfachste Programmierkenntnisse ausreichen:

*Man beschreibe ein 2d- oder 3d-Objekt durch eine (Rand-) Ungleichung oder durch ein System solcher Randbedingungen und lasse nach grober Schätzung der minimal/maximal in Frage kommenden Lösungskoordinaten einen Zufallsregen von Testpunkten aus dem abgeschätzten Quader niedergehen. Nur die Punkte, die alle Randbedingungen erfüllen, werden dann (perspektivisch und evtl. nach ihrer perspektivischen Tiefe immer heller) gezeichnet...*

Früher hätte man das bequem und ohne große Vorkenntnisse, Formalitäten und Bedienungshindernisse mit Basic programmieren können. Heute wären vielleicht die Grafik-Hilfsmittel der gängigen Tabellen-Kalkulations-Programme am einfachsten zugänglich. Allerdings verunstalten sie regelmäßig das logische und iterative Programmregelwerk – und genau an dessen Einübung sollte ein MU, der zu hypothetischem und folgerichtigem Denken anleiten will, gelegen sein. Ich denke, dieses Hindernis könnte mit Hilfe computerbegeisterter Kollegen leicht überwunden werden, z. B. für den Schülergebrauch in Vektorgeometrie vereinfacht nach dem Vorbild des Programmierteils von Cinderella.

L. Führer