Sonderdruck aus

Mathematische Nachrichten

Band 54 (1972)

Heft 1–6

Seiten 259 - 267

THEORIA CUM PRAXI

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

Ein elementarer analytischer Beweis zur Eindeutigkeit des Abbildungsgrades im R^n

Von L. FÜHRER in Berlin [1])

(Eingegangen am 28. 10. 1971)

Es gibt bekanntlich eine Reihe mehr oder minder komplizierter Konstruktionen für den Abbildungsgrad im R^n (s. z. B. [1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10 und 11]. Frei von simplizialen Methoden soll hier gezeigt werden, daß diese Konstruktionen dasselbe liefern, genauer, daß dieser Abbildungsgrad durch die von M. NAGUMO in [8] angegebenen Axiome eindeutig festgelegt ist.

Dieses Ergebnis erlaubt dann beispielsweise, den Zusammenhang zwischen Abbildungsgrad und der in der algebraischen Topologie üblichen Definition des Sphärenindex zu klären. Ebenso ergibt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen Abbildungsgrad im R^2 und der (funktionentheoretischen) Windungszahl (vgl. auch [10]).

Bezeichnungen. Für $n \geqq 1$ bezeichne R^n den n-dimensionalen reellen Zahlenraum mit der natürlichen Basis und dem euklidischen Abstand $|\cdot|$. J^n bezeichne die Menge aller offenen, beschränkten und nichtleeren Teilmengen von R^n, und Z bezeichne den diskreten Raum der ganzen Zahlen. Für jedes $U \in J^n$ sei $D(U)$ der Raum aller Paare (f, p), wo $f: \bar{U} \to R^n$ stetig mit $p \in R^n \setminus f(\partial U)$. Man denke sich $D(U)$ stets mit der Topologie versehen, die von der Metrik μ mit

$$\mu\,((f, p),\ (f', p')) := \max_{x \in \bar{U}} |f(x) - f'(x)| + |p - p'|$$

erzeugt wird. Für jedes $U \in J^n$ bezeichnen $D_2(U)$ den Unterraum von $D(U)$, der aus den Paaren (f, p) mit $f\,|\,U$ von der Klasse C^1, und $D_1(U)$ den Unterraum von $D_2(U)$, der aus den Paaren (f, p) mit $\det f(x) \neq 0$ für alle $x \in f^{-1}(p)$ besteht.

Nach einem Satz von A. SARD (s. [2]) gilt für jedes (f, p) aus $D_2(U)$: Ist K die Menge der kritischen Punkte von f in U, so hat $f(K)$ keine inneren Punkte. Demnach liegt $D_1(U)$ dicht in $D_2(U)$, und dieses liegt nach dem

[1]) Die Ergebnisse sind meiner Dissertation: Theorie des Abbildungsgrades in endlichdimensionalen Räumen, Freie Univ. Berlin, 197?, entnommen.

Satz von STONE und WEIERSTRASS offenbar dicht in $D(U)$. Die folgende Definition entspricht der von M. NAGUMO in [8] gegebenen

Definition. Eine Familie $d = (d_U)_{U \in J^n}$ heißt Abbildungsgrad im R^n wenn für jedes $U \in J^n$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(0) d_U ist eine Abbildung von $D(U)$ in Z.

(i) Sind $F: [0, 1] \times \bar{U} \to R^n$ und $\gamma: [0, 1] \to R^n$ stetige Abbildungen mit $\gamma(t) \in R^n \backslash F(\{t\} \times \partial U)$ für alle $t \in [0, 1]$, so gilt

$$d_U(F(t, \cdot), \gamma(t)) = d_U(F(0, \cdot), \gamma(0)) \quad \text{für alle} \quad t \in [0, 1].$$

(ii) Ist $p \in U$, so gilt $d_U(i\, d_{\bar{U}}, p) = 1$.

(iii) Sind $U_1, U_2 \in J^n$ mit $U_1 \cap U_2 = 0, \bar{U}_1 \cup \bar{U}_2 = \bar{U}$ und ist $(f, p) \in D(U)$ mit $p \in R^n \backslash (f(\partial U_1) \cup f(\partial U_2))$, so gilt

$$d_U(f, p) = d_{U_1}(f | \bar{U}_1, p) + d_{U_2}(f | \bar{U}_2, p).$$

(iv) Ist $(f, p) \in D(U)$ mit $d_U(f, p) \neq 0$, so gibt es mindestens ein $x \in U$ mit $f(x) = p$.

I. Eindeutigkeit des Abbildungsgrades

Lemma 1. *Eine Abbildung $d_U: D(U) \to Z$ (mit $U \in J^n$) erfüllt genau dann die obige Bedingung* (i), *wenn sie stetig ist.*

Beweis. Ist d_U stetig und sind F, γ wie in (i) gegeben, so ist offenbar $\hat{F}: [0, 1] \to D(U)$, $\hat{F}: t \mapsto (F(t, \cdot), \gamma(t))$ ein (stetiger) Weg in $D(U)$. Da d_U lokalkonstant, also auf den Wegkomponenten von $D(U)$ konstant ist, muß $d_U(F(t, \cdot), \gamma(t)) = d_U(F(0, \cdot), \gamma(0))$ für alle $t \in [0, 1]$ sein.

Erfüllt umgekehrt d_U die Bedingung (i), so ist d_U offenbar lokalkonstant, also stetig.

Lemma 2. *Ist $d = (d_U)_{U \in J^n}$ ein Abbildungsgrad und sind*

$$U, U' \in J^n, \ (f, p) \in D(U)$$

mit $f^{-1}(p) \subset U' \subset U$, so gilt $d_U(f, p) = d_{U'}(f | \bar{U}', p)$.

Beweis. $U'' := U \backslash \bar{U}'$ ist eine offene Teilmenge von U.

a) Ist $U'' \neq 0$, also $U'' \in J^n$, so folgt mit (iii)

$$d_U(f, p) = d_{U'}(f, p) + d_{U''}(f, p)$$

(wobei $d_{U'}(f, p) := d_{U'}(f | \bar{U}', p)$ usw.). Nach (iv) ist $d_{U''}(f, p) = 0$, so daß $d_U(f, p) = d_{U'}(f, p)$, wie behauptet, gilt.

b) Ist $U'' = 0$, so wähle man $V \in J^n$ mit $f^{-1}(p) \subset V \subset \bar{V} \subset U'$, dann sind $U' \backslash \bar{V}$ und $U \backslash \bar{V}$ nichtleer. Nach Teil a ergibt sich:

$$d_U(f, p) = d_V(f, p) = d_{U'}(f, p).$$

Lemma 3. *Sind* $d = (d_U)_{U \in J^n}$ *ein Abbildungsgrad,* $F\colon R^n \to R^n$ *eine affine Abbildung,* $U \in J^n$ *und* $p \in R^n \setminus F(\partial U)$, *so ist*

$$d_U(F \mid \bar{U}, p) = \begin{cases} \operatorname{sign} \det F, & \textit{falls } p \in F(U), \\ 0, & \textit{falls } p \notin F(U). \end{cases}$$

Beweis. Ist $p \notin F(U)$, so folgt die Behauptung aus (iv). Man darf also annehmen, p liegt im Bild von U unter F. In diesem Fall muß F ein Isomorphismus sein (sonst gäbe es eine Gerade $G \subset R^n$ mit $F(G) = \{p\}$, so daß für ein $x \in G \cap \partial U$ auch $F(x) = p$ gelten würde, was der Voraussetzung über p widerspräche). Hat nun F die Form $F(x) = Ax + b$, so gilt

$$d_U(F, p) = d_U(A, p - b),$$

wobei A den linearen und b den konstanten Anteil von F bezeichnen: Es ist nämlich

$$\omega\colon [0, 1] \to D(U),$$
$$\omega(t) := ((1 - t)\,F + t\,(F - b),\ (1 - t)\,p + t\,(p - b))$$

ein Weg zwischen (F, p) und $(A, p - b)$. Man darf also davon ausgehen, daß F eine lineare Abbildung ist, daß $p \in F(U)$ ist und daß U die Form einer offenen Kugel um $0 \in R^n$ hat (letzteres nach Lemma 2). Da in diesem Fall $F(U)$ konvex ist und die 0 enthält, darf man sogar $p = 0$ und $U = E^n$ annehmen (letzteres wieder nach Lemma 2). Es ist also nur noch zu zeigen, daß für den linearen Isomorphismus F gilt: $d_{E^n}(F, 0) = \operatorname{sign} \det F$.

1. Fall. $\det F > 0$.

Sei $H\colon [0, 1] \to R^{n^2}$ eine Deformation der natürlichen Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ in die Basis $(F(e_1), \ldots, F(e_n))$, wobei für jedes $t \in [0, 1]$ das $H(t)$ linear unabhängige Komponenten habe (eine solche Deformation existiert nach einem bekannten Satz der linearen Algebra). Dann ist

$$\omega\colon [0, 1] \to D(E^n)$$

mit $\omega(t) := (\tilde{F}(t, \cdot), 0)$ und $\tilde{F}(t, x) = \tilde{F}(t, \Sigma\, x_i\, e_i) := \Sigma\, x_i\, H_i(t)$ ein Weg in $D(E^n)$, so daß nach Lemma 1 gilt:

$$d_{E^n}(F, 0) = d_{E^n}(\omega(1)) = d_{E^n}(\omega(0)) = d_{E^n}(i\, d_{\overline{E^n}}, 0)$$
$$= 1 = \operatorname{sign} \det F.$$

(Letzteres nach (ii).)

2. Fall. $\det F < 0$.

Sei $B\colon R^n \to R^n$ die lineare Fortsetzung von

$$e_1 \mapsto -e_1, \quad e_2 \mapsto e_2, \ldots, e_n \mapsto e_n,$$

wobei $(e_1, \ldots, e_n)$ wieder die natürliche Basis des R^n bezeichnet. Wie im 1. Fall zeigt man, daß nun $d_{E^n}(F, 0) = d_{E^n}(B, 0)$ gilt. Es soll nun gezeigt werden, daß $d_{E^n}(B, 0) = -1$ ist, was für die Behauptung hinreicht:

Wegen (i) ist $d_{E^n}(B, 0) = d_{E^n}\left(B, -\frac{1}{2}e_1\right)$ und wegen (iv) ist

$$d_{E^n}\left(i\,d, \frac{3}{2}e_1\right) = 0.$$

Sei nun $\tau: [0, 1] \to D(E^n)$ mittels

$$\tau(t) := (\hat{F}(t, \cdot), \gamma(t)), \quad \gamma(t) := \left(\frac{3}{2} - 2t\right)e_1$$

und $\hat{F}(t, x) = \hat{F}(t, \Sigma x_i e_i) := \Sigma x_i e_i - 2t \cdot \max(x_1, 0) \cdot e_1$ gegeben, dann ist τ offenbar ein Weg in $D(E^n)$, so daß

$$0 = d_{E^n}\left(i\,d, \frac{3}{2}e_1\right) = d_{E^n}(\tau(0)) = d_{E^n}(\tau(1)) = d_{E^n}\left(\hat{F}(1, \cdot), -\frac{1}{2}e_1\right)$$

gilt. Für $x \in E^n$ ist nun $\hat{F}(1, x) = -\frac{1}{2}e_1$ genau dann, wenn $x = \pm\frac{1}{2}e_1$ ist. Wendet man nun (iii) für $U_1 := \{x \in E^n / x_1 < 0\}$ und

$$U_2 := \{x \in E^n / x_1 > 0\}$$

sowie Lemma 2 an, so erhält man

$$0 = d_{E^n}(\tau(1)) = d_{U_1}(\tau(1)) + d_{U_2}(\tau(1)) = d_{U_1}\left(i\,d, -\frac{1}{2}e_1\right)$$
$$+ d_{U_2}\left(B, -\frac{1}{2}e_1\right) = d_{U_1}\left(i\,d, -\frac{1}{2}e_1\right) + d_{E^n}\left(B, -\frac{1}{2}e_1\right).$$

Mit Hilfe von (ii) ergibt das $d_{E^n}\left(B, -\frac{1}{2}e_1\right) = -1$, also auch

$$d_{E^n}(B, 0) = -1.$$

Das war noch zu zeigen. Damit ist Lemma 3 vollständig bewiesen.

Satz 1. *Eine Familie $d = (d_U)_{U \in J^n}$ ist genau dann ein Abbildungsgrad, wenn für jedes $U \in J^n$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(1) *$d_U: D(U) \to Z$ ist eine stetige Abbildung.*

(2) *Ist $F: R^n \to R^n$ eine affine Abbildung und ist $(F|\bar{U}, p) \in D(U)$, so gilt*

$$d_U(F|\bar{U}, p) = \begin{cases} \operatorname{sign}\det F & (\textit{falls } p \in F(U)) \\ 0 & (\textit{sonst}). \end{cases}$$

(3) *Sind $U_1, \ldots, U_m \in J^n$ paarweise disjunkt mit $\bar{U} = \cup \bar{U}_i$ und ist $(f, p) \in D(U)$ mit $p \in R^n \setminus \cup f(\partial U_i)$, so gilt $d_U(f, p) = \Sigma d_{U_i}(f|\bar{U}_i, p)$.*

(4) *Sind $U' \in J^n$ und $(f, p) \in D(U)$ mit $f^{-1}(p) \subset U' \subset U$, so gilt*

$$d_U(f, p) = d_{U'}(f|\bar{U}', p).$$

Beweis. Ist d ein Abbildungsgrad, so sind (1) nach Lemma 1, (2) nach Lemma 3, (3) trivialerweise und (4) nach Lemma 2 erfüllt.

Erfüllt d umgekehrt die Bedingungen (1) bis (4), so sind (o), (i) nach Lemma 1 und (ii), (iii) trivialerweise erfüllt. Es ist also nur noch (iv) nachzuweisen.

Seien also $U \in J^n$ und $(f, p) \in D(U)$ mit $f(x) \neq p$ für alle $x \in \bar{U}$. Es ist zu zeigen, daß dann $d_U(f, p) = 0$ gilt:

Sei $x_0 \in U$ beliebig gewählt und sei r eine positive Zahl, die kleiner als der Abstand von p und $f(\bar{U})$ ist, dann ist wegen (4) $d_U(f, p) = d_{f^{-1}(K)}(f, p)$, wobei K die offene Kugel vom Radius r um $f(x_0)$ sei. Offenbar gibt es einen Weg ω in $D(f^{-1}(K))$, der $(f|_{f^{-1}(K)}, p)$ mit (c, p) verbindet, wobei

$$c\colon \overline{f^{-1}(K)} \to R^n$$

die konstante Abbildung $x \mapsto f(x_0)$ bezeichnet. Nach (2) erhält man so

$$d_U(f, p) = d_{f^{-1}(K)}(f, p) = d_{f^{-1}(K)}(c, p) = 0, \quad \text{was zu zeigen war.}$$

Satz 2. *Eine Familie $d = (d_U)_{U \in J^n}$ ist genau dann ein Abbildungsgrad im R^n, wenn für jedes $U \in J^n$ die beiden folgenden Bedingungen gelten:*

(I) *$d_U\colon D(U) \to Z$ ist eine stetige Abbildung.*

(II) *Für jedes $(f, p) \in D_1(U)$ gilt* $d_U(f, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sign} \det f(x)$.

Beweis. (a) $d = (d_U)_{U \in J^n}$ erfülle (I) und (II). Es soll gezeigt werden, daß dann d ein Abbildungsgrad ist:

Die Bedingungen (1) und (2) von Satz 1 sind offensichtlich erfüllt. Sind nun $U_1, \ldots, U_m, U$ wie in (3), Satz 1 gegeben, ebenso (f, p), so gibt es ein $(g, q) \in D_1(U)$, für das $\mu((g, q), (f, p))$ kleiner als der Abstand von p von der Menge $f(\partial U) \cup f(\partial U_1) \cup \cdots \cup f(\partial U_m)$ ist. Es liegen also (g, q) und (f, p) (bzw. deren Einschränkungen) in derselben Wegkomponente von $D(U)$ bzw. $D(U_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$. Wegen (I, II) gilt also:

$$d_U(f, p) = d_U(g, q) = \sum_{i=1,\ldots,m} d_{U_i}(g, q) = \sum_{i=1,\ldots,m} d_{U_i}(f, p).$$

Damit erfüllt d die Bedingung (3) von Satz 1.

Entsprechend weist man für d die Bedingung (4) von Satz 1 nach, indem man wieder ausnutzt, daß $D_1(U)$ dicht in $D(U)$ liegt.

(b) $d = (d_U)_{U \in J^n}$ sei nun umgekehrt ein Abbildungsgrad. Wegen Satz 1 ist dann nur noch die Bedingung (II) nachzuweisen:

Sei nun $(f, p) \in D_1(U)$ gegeben. Nach Satz 1, (3), (4) und wegen des Satzes über inverse Funktionen, gibt es endlich viele, paarweise disjunkte Teilmengen $U_1, \ldots, U_m \in J^n$ von U derart, daß jedes U_i genau ein Element x_i von $f^{-1}(p)$ enthält und $d_U(f, p) = \sum_{i=1,\ldots,m} d_{U_i}(f, p)$ gilt und $f | U_i$ diffeomorph ist. Wir wollen nun zeigen, daß für jedes $i = 1, \ldots, m$ die Formel

$$d_{U_i}(f, p) = \operatorname{sign} \det f(x_i)$$

gilt:

Dafür reicht es nach Satz 1 offenbar aus, ein $(g_i, p) \in D(U_i)$ mit folgenden Eigenschaften zu finden:

A) $\mu\,((g_i, p), (f, p))$ ist kleiner als der Abstand von p und $f(\partial U_i)$.

B) $g_i^{-1}(p) = \{x_i\}$.

C) Es gibt eine Umgebung V_i von x_i, so daß für jedes $x \in V_i$

$$g_i(x) = f(x_i) + J_f(x_i)\,(x - x_i)$$

gilt, wobei $J_f(x_i)$ die Fundamentalmatrix von f bei x_i bezeichnet.

Hat man nämlich die Existenz eines solchen (g_i, p) nachgewiesen, so liegt es wegen A) in derselben Wegkomponente von $D(U_i)$ wie (f, p), so daß nach Satz 1, (1) $d_{U_i}(f, p) = d_{U_i}(g_i, p)$ gilt. Wegen Satz 1, (4) und (2) gilt aber $d_{U_i}(g_i, p) = d_{V_i}(g_i, p) = \operatorname{sign} \det J_f(x_i)$, wobei man B) und C) ausnutzt. Zusammen ergibt sich dann $d_{U_i}(f, p) = \operatorname{sign} \det f(x_i)$, wie behauptet. Wir müssen also nur noch die Existenz von (g_i, p) nachweisen: Für $\beta > 0$ sei $\varphi_\beta \colon R \to [0, 1]$ eine stetige Funktion mit $\varphi_\beta(t) = 0$ für $t \leqq \frac{\beta}{2}$ und $\varphi_\beta(t) = 1$ für $t \geqq \beta$. Dann sei $g^\beta \colon \overline{U}_i \to R^n$ durch

$$\begin{aligned} g^\beta(x) := {} & \varphi_\beta(|x - x_i|) \cdot f(x) \\ & + (1 - \varphi_\beta(|x - x_i|))\,(f(x_i) + J_f(x_i)\,(x - x_i)) \end{aligned}$$

definiert. (g^β ist stetig und aus f und $(f(x_i) + J_f(x_i)\,(\cdot - x_i))$ zusammengesetzt, genauer: $g^\beta(x) = f(x)$ für $|x - x_i| \geqq \beta$ und

$$g^\beta(x) = f(x_i) + J_f(x_i)\,(x - x_i) \qquad \text{für} \qquad |x - x_i| \leqq \frac{\beta}{2}\,.)$$

Ist nun K_β die Kugel um x_i mit Radius β, so gilt es β_0 so zu bestimmen, daß für jedes $x \in \overline{K_{\beta_0}} \backslash \{x_i\}$ einerseits $|f(x) - J_f(x_i)\,(x - x_i) - f(x_i)|$ kleiner als der Abstand von p und $f(\partial U_i)$ und andererseits

$$p \notin \{t\,f(x) + (1 - t)\,(f(x_i) + J_f(x_i)\,(x - x_i)) / t \in [0, 1]\}$$

ist. Da die Determinante von $J_f(x_i)$ nicht null ist, muß es ein solches β_0 geben. Für $g_i := g^{\beta_0}$ sind dann offenbar die Bedingungen A), B) und C) erfüllt.

Damit ist (II) nachgewiesen.

Korollar. *Es gibt höchstens einen Abbildungsgrad im R^n.*

Beweis. Da jeder Abbildungsgrad im R^n die Bedingung (II) von Satz 2 erfüllt und da $D_1(U)$ für jedes $U \in J^n$ dicht in $D(U)$ liegt, ist jeder Abbildungsgrad im R^n durch (II) eindeutig festgelegt.

Bemerkung. Man könnte den Abbildungsgrad im R^n von vornherein durch (I) und (II) definieren. In der Regel lassen sich aber die Bedingungen (o) bis (iv) leichter verifizieren. Außerdem ist die hier gewählte Definition unabhängig von speziellen Eigenschaften des R^n (vgl. NAGUMO [8]).

Eine analytische Konstruktion des Abbildungsgrades findet man in HEINZ [6].

II. Zusammenhang zwischen Abbildungsgrad und Sphärenindex

In der Topologie wird der Index i_f einer stetigen Selbstabbildung f der Sphäre S^n als die ganze Zahl definiert, für die $H_n(f)\ (e) = i_f e$ gilt, wobei e ein Generator von $H_n(S^n)$ ist. BERS [3] gibt die folgende Konstruktion:

Für $(f, p) \in D(U)$, $U \in J^n$ seien $h: S^n \setminus \{(1, 0, \ldots, 0)\} \to R^n$ die stereographische Projektion und $F: S^n \to S^n$ eine stetige Fortsetzung von

$$h^{-1} \circ f \circ h \,|\, h^{-1}(\overline{U}) \qquad \text{mit} \qquad h^{-1}(p) \notin F(S^n \setminus h^{-1}(U)),$$

dann sei $d_U(f, p) := i_F$. Man zeigt nun, daß d_U wohldefiniert ist und daß $d = (d_U)_{U \in J^n}$ ein Abbildungsgrad im R^n ist.

Man kann auf diese Weise den Abbildungsgrad aus dem topologischen Index bestimmen. Umgekehrt kann man auch den topologischen Index aus dem Abbildungsgrad bestimmen:

Satz 3. *Ist $f: S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung ($n \geqq 1$) und ist $d = (d_U)_{U \in J^n}$ ein Abbildungsgrad im R^{n+1}, so gilt für jede stetige Fortsetzung*

$$F: \overline{E^{n+1}} \to R^{n+1}$$

von f:

$$i_f = d_{E^{n+1}}(F, 0).$$

Beweis. Seien F wie oben gegeben und $F': \overline{E^{n+1}} \to E^{n+1}$ eine stetige Fortsetzung von f ($\overline{E^{n+1}}$ ist AR (normal)!). Für die stetige Abbildung $H: \overline{E^{n+1}} \times [0, 1] \to R^{n+1}$ mit $(x, t) \mapsto tF(x) + (1 - t) F'(x)$ gilt:

Für jedes $t \in [0, 1]$ und jedes $x \in S^n = \partial E^{n+1}$ ist $H(x, t) = f(x) \neq 0$. Da d ein Abbildungsgrad im R^{n+1} ist, gilt $d_{E^{n+1}}(F, 0) = d_{E^{n+1}}(F', 0)$. Sei nun $\Phi: S^{n+1} \to S^{n+1}$ eine stetige Fortsetzung von $h^{-1} \circ F' \circ h \,|\, h^{-1}(\overline{E^{n+1}})$ mit

$\Phi\,(S^{n+1}\backslash h^{-1}(E^{n+1})) \subset S^{n+1}\backslash h^{-1}(E^{n+1})$. Dann ist offenbar

$$d_{E^{n+1}}(F', 0) = i_\Phi.$$

Es bleibt zu zeigen, daß $i_\Phi = i_f$ ist. Das sieht man sofort ein, da die Einhängung $S(f)\colon S^{n+1} \to S^{n+1}$ offenbar homotop ist zu Φ (vgl. S. T. Hu: Homology Theory, San Francisco, 1966, IV, 5.4).

Korollar. *Für $n \geqq 2$ und $U \in J^n$ ist $d_U\colon D(U) \to Z$ surjektiv.*

III. Zusammenhang zwischen Abbildungsgrad und Windungszahl

Ist $\gamma\colon S^1 \to C$ ein geschlossener Weg in der komplexen Ebene und ist $p \in C\backslash\gamma(S^1)$, so definiert man die Windungszahl $w(\gamma, p)$ von γ um p durch

$$w(\gamma, p) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-p}.$$

Sei $\widehat{D}(E^2) := \{(\gamma, p) \,/\, \gamma\colon S^1 \to C \text{ stetig}, \; p \in C\backslash\gamma(S^1)\}$ und sei

$$G\colon D(E^2) \to \widehat{D}(E^2) \quad \text{durch} \quad (f, p) \mapsto (f\,|\,S^1, p)$$

definiert (man denke sich R^2 und C wie üblich identifiziert). Es gilt dann der folgende

Satz 4. *G ist surjektiv, und das folgende Diagramm ist kommutativ:*

$$\begin{tikzcd} D(E^2) \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "d_{E^2}"'] & & \widehat{D}(E^2) \arrow[dl, "w"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Beweis. Daß G surjektiv ist, folgt sofort aus dem Fortsetzungssatz von Tietze. Um die Kommutativität des Diagramms einzusehen, braucht man nur nachzuprüfen, daß die Familie $(d_U)_{U\in J^2\backslash\{E^2\}} \cup \{w \circ G\}$ ein Abbildungsgrad im R^2 ist, bzw. die Bedingungen (I) und (II) von Satz 2 erfüllt: Daß $w \circ G$ lokalkonstant, also stetig ist, wird in der Funktionentheorie gezeigt. Es bleibt also noch zu zeigen, daß für $(f, p) \in D_1(E^2)$ die Formel

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{f|S^1}\frac{dz}{z-p} = \sum_{z\in f^{-1}(p)} \operatorname{sign}\det f(z)$$

gilt:

Es sei $\{z_1, \ldots, z_m\} = f^{-1}(p)$. Um jedes z_i $(i = 1, \ldots, m)$ lege man einen (geeignet parametrisierten) kleinen Kreis γ_i derart, daß jedes γ_i in E^2 liegt und daß sich die γ_i paarweise weder schneiden noch enthalten. Bei geeigneter Parametrisierung ergibt sich $\int_{f|S^1} \frac{dz}{z-p} = \sum_{i=1,\dots,m} \int_{f\circ\gamma_i} \frac{dz}{z-p}$ und daraus die behauptete Formel.

Damit ist gezeigt, daß sich d_{E^2} mit Hilfe von w berechnen läßt. Umgekehrt läßt sich w mit Hilfe von d_{E^2} berechnen: $w(\gamma, p) = d_{E^2}(g, p)$, wobei g irgendeine stetige Fortsetzung von γ auf $\overline{E^2}$ ist.

Man kann übrigens zeigen, daß sich prinzipiell für jedes $U \in J^2$ das d_U mit Hilfe von w berechnen läßt.

Literatur

[1] P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie, 1. Bd. New York 1965.

[2] M. Berger und M. Berger, Perspectives in Nonlinearity. New York 1968.

[3] L. Bers, Topology. New York 1957.

[4] L. E. J. Brouwer, Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **71**, 97–115 (1912).

[5] J. Cronin, Fixed Points and Topological Degree in Nonlinear Analysis. AMS, 1964.

[6] E. Heinz, An elementary analytic theory of degree. J. Math. Mech. **8**, 231–247 (1959).

[7] M. A. Krasnosel'skii, Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations. Oxford 1964.

[8] M. Nagumo, Degree of mappings in convex linear topological spaces. Amer. J. Math. **73**, 497–511 (1951).

[9] —, A theory of degree of mappings based on infinitesimal analysis. Amer. J. Math. **73**, 485–496 (1951).

[10] T. Rado und P. V. Reichelderfer, Continuous Transformations in Analysis. Berlin, 1955.

[11] J. T. Schwartz, Nonlinear Functional Analysis. New York 1964.