THEORIE DES ABBILDUNGSGRADES IN ENDLICH-DIMENSIONALEN RÄUMEN

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Mathematik
der
Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Lutz Führer

aus Lüneburg

1.Referent: Prof.Dr.H.Pachale

2.Referent: Prof.Dr.W.Wendland

Diese Arbeit entstand in den Jahren 1968 bis 1970 während meiner Tätigkeit an der Technischen Universität Berlin. Für seine Anleitung und Beratung danke ich Herrn Prof.Dr. H.Pachale. Ebenso danke ich Herrn Prof.Dr. W.Wendland für seine fachliche Beratung und Ermutigung.

Datum der mündlichen Prüfung: 11. und 19. Januar 1971

INHALT

EINLEITUNG

Aufgabe dieser Arbeit ist es, eine gemeinsame Theorie für die verschiedenen bekannten Abbildungsgrad-Definitionen zu konstruieren, soweit sich diese Definitionen auf den Fall endlich-dimensionaler Räume beziehen. Ein wesentlicher Schritt bei der Lösung dieses Problems wurde von M. Nagumo ([13]) durch Angabe eines geeigneten Axiomensystems festgelegt: Festlegung eines Axiomensystems für den "Abbildungsgrad".

Das Axiomensystem von Nagumo gibt in knapper Form wesentliche Eigenschaften der meisten bekannten Abbildungsgrad-Konstruktionen an, die nun bei Nagumo zur Definition für den Abbildungsgrad dienen. Wie der Titel seiner Arbeit anzeigt, interessierte sich Nagumo dabei mehr für Verallgemeinerungen des Abbildungsgrad-Konzepts auf Fälle unendlich-dimensionaler Räume, wozu sein Axiomensystem geradezu einlädt. Hier soll aber ein anderer Aspekt untersucht werden, der für eine sinnvolle und umfassende allgemeine Theorie des Abbildungsgrades (einschließlich der verschiedenen unendlich-dimensionalen Fälle) von grundlegender Bedeutung zu sein scheint:

> Ist das Axiomensystem kanonisch in dem Sinne, daß es bis auf Abhängigkeit von der vorgegebenen Orientierung der zugrundegelegten endlich-dimensionalen Vektorräume nur ein Modell zuläßt?

Wie der erste Paragraph zeigen soll, läßt sich diese Frage positiv beantworten.

Die Widerspruchsfreiheit des Systems wird im zweiten Paragraphen durch Angabe einer ersten Konstruktion für den Abbildungsgrad (nach E.Heinz([8])) gezeigt.

Die Eleganz der Nagumoschen Axiomatik erweist sich im dritten Paragraphen, wo einige wichtige Eigenschaften des Abbildungsgrades hergeleitet werden.

In den weiteren Kapiteln soll gezeigt werden, wie sich andere bekannte Konstruktionen des Abbildungsgrades hier einordnen lassen. In diesen Paragraphen wird im allgemeinen auf ausführliche Beweise verzichtet, wenn sie in der passenden Form anderweitig vorliegen. Hier werden gelegentlich auch speziellere mathematische Methoden benötigt (algebraische Topologie, Kategorien), während die ersten Kapitel mit elementaren Methoden auskommen.

Ich hoffe, daß diese Arbeit auf verschiedene Weisen nützlich sein kann:

1. Die vorliegenden Konstruktionen für den Abbildungsgrad sind langwierig und unübersichtlich, eine axiomatische Theorie erscheint daher wünschenswert.
2. Es wird gezeigt, daß die verschiedenen Konstruktionen dasselbe liefern, so daß diese verschiedenen Konstruktionen wechselseitig anwendbar werden.
3. Wie schon erwähnt, scheint mir eine straffe endlich-dimensionale Theorie notwendige Voraussetzung für eine sinnvolle allgemeine Theorie zu sein, die bei der Vielfalt der speziellen Ergebnisse sicher sehr vorteilhaft wäre.
4. Vorlesungen über algebraische Topologie leiden häufig unter dem sehr abstrakten Charakter der modernen Homotopie- bzw. Homologie-Theorie. Vielleicht läßt sich einmal an der speziellen Theorie des Abbildungsgrades die Thematik dieser Disziplinen anreißen und von der Analysis her - wenigstens teilweise - motivieren. Dies ist meines Erachtens ein Weg, der zeitlich erträglicher und geometrisch weniger anspruchsvoll wäre als der Nachvollzug des historischen (d.h. geometrischen) Weges.

Diese vier Punkte sollen die Berechtigung dieser Arbeit begründen, und sie sollen auch zeigen, daß die zugrundegelegte Problemstellung durchaus theoretischer Natur ist. Demzufolge wird hier auch nicht auf Anwendungen des Abbildungsgrades auf andere mathematische Theorien oder Probleme eingegangen, zumal dafür eine umfangreiche Literatur existiert (z.B. [2],[3],[5],[11],[12],[15],[18],[19]).

Um den Verlauf der Darstellung nicht zu stören, habe ich Fußnoten und Erläuterungen zu den Quellenangaben an den Schluß der Arbeit gesetzt. Sie sind durch $^{\text{Zahl}})$ gekennzeichnet.

§ 1 . Definition und Charakterisierungen des Abbildungsgrades im n-dimensionalen reellen Zahlenraum.

Für diesen und die folgenden Paragraphen bezeichne n eine beliebige feste natürliche Zahl (größer als null) und R^n den durch die Wahl einer beliebigen festen Basis orientierten n-dimensionalen reellen Zahlenraum. Wird eine Topologie im R^n benötigt, so denke man sich den R^n stets mit der natürlichen Topologie und dem euklidischen Abstand versehen. J^n bezeichne dann die Menge aller offenen und beschränkten, nichtleeren Teilmengen des R^n. Weiter sei von nun an für jedes $U \in J^n$

$$D(U) := \{ (f,p) \ / \ f \in C(\overline{U}, R^n),\ p \in R^n \setminus f(\partial U) \}$$

definiert und - bei Bedarf - mit der Topologie versehen, die von der folgenden Metrik induziert wird:

$$\mu : D(U) \times D(U) \longrightarrow R \quad \text{vermöge} \quad \mu((f,p),(g,q)) := \|f-g\|_{u,\overline{U}} + \|p-q\| .^{1)}$$

Die folgende Definition stammt von M.Nagumo (Literaturverzeichnis [13]):

(1-1) Definition:

Eine Familie $d = (d_U)_{U \in J^n}$ heißt ein Abbildungsgrad im R^n , wenn für jedes $U \in J^n$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(o) $d_U : D(U) \longrightarrow Z$ ist eine Abbildung von $D(U)$ in die Menge der ganzen Zahlen.

(i) Sind $F : [0,1] \times \overline{U} \longrightarrow R^n$ und $\gamma : [0,1] \longrightarrow R^n$ stetige Abbildungen mit $\gamma(t) \in R^n \setminus F(\{t\} \times \partial U)$ für alle $t \in [0,1]$, so gilt $d_U(F(t,\cdot),\gamma(t)) = d_U(F(0,\cdot),\gamma(0))$ für alle $t \in [0,1]$.

(ii) Ist $p \in U$, so gilt $d_U(id_{\overline{U}}, p) = 1$.

(iii) Sind U_1, U_2 disjunkte offene Teilmengen von U mit $\overline{U_1} \cup \overline{U_2} = \overline{U}$ und ist $(f,p) \in D(U)$ mit $p \in R^n \setminus (f(\partial U_1) \cup f(\partial U_2))$, so gilt

$$d_U(f,p) = d_{U_1}(f|_{\overline{U_1}}, p) + d_{U_2}(f|_{\overline{U_2}}, p) .$$

(iv) Ist $(f,p) \in D(U)$ mit $d_U(f,p) \neq 0$, so gibt es mindestens ein $x \in U$ mit $f(x) = p$. [2)]

(1-2) Bemerkung: Seien $U, V \in J^n, U \subseteq V$ und $(f,p) \in D(V)$, $p \in R^n \setminus f(\partial U)$. Statt $d_U(f|_{\overline{U}}, p)$ schreibt man kurz $d_U(f,p)$, wobei man sich f so eingeschränkt denkt, daß $(f,p) \in D(U)$ einen Sinn hat.

Die Idee einer Theorie des Abbildungsgrades besteht grob gesprochen darin, die Gleichung $f(x) = p$ $((f,p) \in D(U))$ nach der "Größe" ihrer Lösungsmenge in U durch eine ganze Zahl zu klassifizieren (Axiom (o)), wobei "kleine" Änderungen von f und p diese Zahl nicht ändern sollen (Axiom (i)) und die Lage der Lösungsmenge in U zu berücksichtigen ist (Axiome (iii) und (iv)) (vergl. J.Cronin [5]).

(1-5) Satz:

Eine Familie $d = (d_U)_{U \in J^n}$ ist genau dann ein Abbildungsgrad im R^n, wenn für jedes $U \in J^n$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $d_U : D(U) \longrightarrow Z$ ist eine stetige Abbildung in die Menge der ganzen Zahlen mit diskreter Topologie.

(2) Für jeden affinen Isomorphismus $F : R^n \longrightarrow R^n$ und jedes $p \in R^n \setminus F(\partial U)$ ist
$$d_U(F|_{\overline{U}}, p) = \begin{cases} \text{sign det } F & (\text{falls } p \in F(U)) \\ 0 & (\text{falls } p \notin F(U)) \end{cases} .$$

(3) Sind $U_1, \ldots, U_m$ paarweise disjunkte offene Teilmengen von U mit $\overline{U} = \bigcup_{i=1,\ldots,m} \overline{U_i}$ und ist $(f,p) \in D(U)$ mit $p \in R^n \setminus \bigcup_{i=1,\ldots,m} f(\partial U_i)$, so gilt
$$d_U(f,p) = \sum_{i=1,\ldots,m} d_{U_i}(f|_{\overline{U_i}}, p) .$$

(4) Sind U' eine offene Teilmenge von U und $(f,p) \in D(U)$ mit $f^{-1}(\{p\}) \subseteq U'$, so gilt $d_U(f,p) = d_{U'}(f|_{\overline{U'}}, p)$. [3]

Beweis:

(I) Die Bedingungen (1),...,(4) sind hinreichend dafür, daß d ein Abbildungsgrad ist:

(Ia) d erfüllt (o):

Das folgt sofort aus der Bedingung (1).

(Ib) d erfüllt (i):

Seien F und γ wie in der Prämisse von (i) gegeben, dann liegen alle $(F(t,\cdot), \gamma(t))$ $(t \in [0,1])$ in derselben Wegkomponente von $D(U)$. Das sieht man wie folgt ein: Sei $\omega : [0,1] \longrightarrow D(U)$ vermöge $\omega(t) := (F(t,\cdot), \gamma(t))$ definiert und sei $\varepsilon \in R_+$ beliebig und $t_o \in [0,1]$ beliebig [4], dann gibt es ein $\delta \in R_+$ und ein $\delta' \in R_+$ mit den Eigenschaften
$$|F(t,x) - F(s,y)| < \varepsilon/2 , \text{ falls } t,s \in [0,1], x,y \in \overline{U} \text{ mit } |t-s| < \delta, |x-y| < \delta ,$$
$$|\gamma(t) - \gamma(s)| < \varepsilon/2, \text{ falls } t,s \in [0,1] \text{ mit } |t-s| < \delta' .$$
Setzt man $\delta'' := \min(\delta, \delta')$, so folgt für alle $t \in [0,1]$ und alle $x \in \overline{U}$ aus $|t - t_o| < \delta''$ sofort $\mu(\omega(t), \omega(t_o)) = \mu((F(t,\cdot), \gamma(t)), (F(t_o,\cdot), \gamma(t_o))) = \|F(t,\cdot) - F(t_o,\cdot)\|_{u,\overline{U}} + |\gamma(t) - \gamma(t_o)| < \varepsilon$. Da t_o und ε beliebig waren, ist also ω stetig, d.h. ein Weg in $D(U)$.

Da d_U stetig ist, ist d_U auf $D(U)$ lokal konstant und folglich auf den Wegkomponenten von $D(U)$ konstant: Ist $\varkappa : [0,1] \longrightarrow D(U)$ ein beliebiger (stetiger) Weg in $D(U)$, so ist $V := \varkappa^{-1}(d_U^{-1}(\{d_U \circ \varkappa(0)\}))$ eine nichtleere, zugleich offene und abgeschlossene Teilmenge von $[0,1]$, also gleich $[0,1]$. Damit muß $d_U(F(t,\cdot), \gamma(t))$ für alle $t \in [0,1]$ konstant sein, d.h. (i) ist erfüllt.

(Ic) d erfüllt (ii):

Das folgt sofort aus (2), wenn man für F die Identität des R^n setzt.

(Id) d erfüllt (iii):

Das folgt sofort aus (3), wenn man $m=2$ setzt.

(Ie) d erfüllt (iv):

Sei $(f,p) \in D(U)$ mit $d_U(f,p) \neq 0$. Angenommen für jedes $x \in \overline{U}$ gilt $f(x) \neq p$, dann seien

$x_o \in U$ beliebig,

$\delta' \in R_+$ mit $d_U(f,p) = d_U(g,p)$ für alle $g \in C(\overline{U}, R^n)$ mit $\|f-g\|_{u,\overline{U}} < \delta'$,

$r := \min\{\delta', |p, f(\overline{U})|\}$, wobei $|p, f(\overline{U})|$ den Abstand von p und $f(\overline{U})$ bezeichnet,

$\delta \in R_+$ mit $\delta < r/3$ und $f(E_\delta(x_o)) \subseteq E_{r/2}(f(x_o))$, wobei $E_\delta(x_o)$ bzw. $E_{r/2}(f(x_o))$ die offenen Kugeln vom Radius δ bzw. $r/2$ um x_o bzw. $f(x_o)$ bezeichnen,

$$h(x) := \begin{cases} f(x_o) + x - x_o & , \text{ falls } x \in E_{\delta/2}(x_o) \\ f(x) & , \text{ falls } x \in \overline{U} \setminus E_\delta(x_o) \\ (1-\varphi(x))(f(x_o)+x-x_o) + \varphi(x)f(x), & \text{ falls } x \in E_\delta(x_o) \setminus E_{\delta/2}(x_o) , \end{cases}$$

wobei $\varphi(x) := \frac{2}{\delta}(|x - x_o| - \frac{\delta}{2})$ $(x \in \overline{U})$.

Offenbar ist $h : \overline{U} \longrightarrow R^n$ stetig, und es gilt $\|h-f\|_{u,\overline{U}} < \max\{\frac{\delta}{2} + \frac{r}{2}, \delta + \frac{\delta}{2}\} < r \leq \delta'$, so daß $(h,p) \in D(U)$ und $d_U(h,p) = d_U(f,p)$ gelten. Überdies ist $p \notin h(\overline{U})$, denn $|p - (1-\varphi(x))(f(x_o)+x-x_o) - \varphi(x)f(x)| > 0$ für $x \in E_\delta(x_o) \setminus E_{\delta/2}(x_o)$, weil dann $h(x) \in E_{r/2}(f(x_o))$, und $|p - (f(x_o)+x-x_o)| > 0$ für $x \in E_{\delta/2}(x_o)$, weil dann $h(x) \in E_{\delta/2}(f(x_o)) \subseteq E_{r/2}(f(x_o))$ gilt.

Wegen der Eigenschaft (4) gilt $d_U(f,p) = d_U(h,p) = d_{E_{\delta/2}(x_o)}(h,p)$.

Wegen der Eigenschaft (2) ist $d_{E_{\delta/2}(x_o)}(h,p) = d_{E_{\delta/2}(x_o)}(f(x_o) - x_o + id, p) = 0$, so daß schließlich $d_U(f,p) = 0$ folgt, was der Voraussetzung widerspricht. Damit ist (iv) gezeigt.

(II) Ist umgekehrt d ein Abbildungsgrad im R^n, so folgen notwendig die Eigenschaften (1),...,(4) für d:

(IIa) d erfüllt (1):

Seien $(f,p) \in D(U)$ beliebig, $r := |p, f(\partial U)|$ und $E_r^{D(U)}(f,p)$ die offene Kugel um (f,p) in $D(U)$ mit Radius r. Für $(g,q) \in E_r^{D(U)}(f,p)$ beliebig definiere man

$F : [0,1] \times \overline{U} \longrightarrow R^n$ durch $F(t,x) := (1-t)f(x) + tg(x)$,

$\gamma : [0,1] \longrightarrow R^n$ durch $\gamma(t) := (1-t)p + tq$.

Dann sind offenbar F und γ stetig, und für $t\in[0,1], x\in\partial U$ gilt überdies: $|F(t,x)-\gamma(t)| = |(1-t)f(x)+tg(x)-(1-t)p-tq| = |f(x)-p - t(f(x)-g(x)) + t(p-q)| \geq |f(x)-p| - t(|f(x)-g(x)| + |p-q|) > r - tr \geq 0$. Damit erfüllen F und γ die Voraussetzungen von (i), wonach $d_U(f,p)=d_U(F(0,\cdot),\gamma(0))=d_U(F(1,\cdot),\gamma(1))=d_U(g,q)$ folgt. Da (g,q) beliebig aus $\mathcal{E}_r^{D(U)}(f,p)$ war, ist also d_U auf $\mathcal{E}_r^{D(U)}(f,p)$ konstant. Da (f,p) beliebig aus $D(U)$ war, ist also d_U lokal konstant, d.h. stetig bzgl. der diskreten Topologie von Z. Es gilt also (1).

(IIb) d erfüllt (3):

Seien $U_1,\dots,U_m$ paarweise disjunkte offene Teilmengen von U, die die Prämisse von (3) erfüllen, ebenso $(f,p)\in D(U)$.
Für $m=1$ ist die Konklusion von (3) trivial, für $m=2$ folgt sie aus (iii). Angenommen die Behauptung von (3) gilt für je $m'(1<m'<m)$ solcher Teilmengen von U wie sie in (3) vorausgesetzt werden. Dann seien $U_1' := U_1,\dots,U_{m-2}' := U_{m-2}$, $U_{m-1}' := U_{m-1}\cup U_m$. Wegen $\overline{U_{m-1}'} = \overline{U_{m-1}}\cup\overline{U_m}$ und $\partial U_{m-1}' = \overline{U_{m-1}'}\setminus U_{m-1}' = (\overline{U_{m-1}}\setminus U_{m-1})\cup(\overline{U_m}\setminus U_m) = \partial U_{m-1}\cup\partial U_m$ erfüllen $U_1',\dots,U_{m-1}'$ und (f,p) die Voraussetzungen von (3). Nach der Annahme gilt $d_U(f,p) = \sum_{i=1,\dots,m-1} d_{U_i'}(f,p)$. Nach (iii) gilt aber auch $d_{U_{m-1}'}(f,p) = d_{U_{m-1}}(f,p) + d_{U_m}(f,p)$. Damit ist der Induktionsschluß vollständig, es gilt also (3).

(IIc) d erfüllt (4):

Sei $U'\subseteq U$ offen und sei $(f,p)\in D(U)$ mit $f^{-1}(\{p\})\subseteq U'$. Nun setze man $U'' := U\setminus\overline{U'}$, dann ist U'' offen und es gelten:
$U''\cap U' = \emptyset$ und $U = U''\cup(\overline{U'}\cap U) \subseteq \overline{U''}\cup\overline{U'} \subseteq \overline{U}$, d.h. $\overline{U''}\cup\overline{U'} = \overline{U}$.
Wegen $f^{-1}(\{p\})\subseteq U'$ gilt auch $p\in R^n\setminus(f(\partial U')\cup f(\partial U''))$, so daß nach (iii) $d_U(f,p)=d_{U'}(f,p)+d_{U''}(f,p)$ folgt. Wegen $p\notin f(U'')$ folgt aus (iv) $d_{U''}(f,p)=0$ und damit $d_U(f,p) = d_{U'}(f,p)$. Das beweist (4).

(IId) d erfüllt (2):

Sei $G:R^n\longrightarrow R^n$ ein affiner Isomorphismus mit $G(x)=A\cdot x+b$ und sei $p\in R^n\setminus G(\partial U)$. Ist $p\notin G(U)$, so folgt aus (iv) sofort $d_U(G,p)=0$, was in diesem Fall in (2) behauptet wird. Man darf also $p\in G(U)$ annehmen. Sei nun $\gamma:[0,1]\longrightarrow R^n$ bzw. $F:[0,1]\times\overline{U}\longrightarrow R^n$ durch $\gamma(t):=(1-t)p + t(p-b)$ bzw. $F(t,x):=(1-t)G(x)+t(G(x)-b)=(1-t)G(x)+tAx$ definiert. Offenbar sind γ und F stetig. Für $t\in[0,1]$, $x\in\partial U$ gilt $F(t,x)=G(x)-tb \neq p-tb = \gamma(t)$. Die Voraussetzungen von (i) sind erfüllt, also gilt $d_U(G,p) = d_U(A,p-b)$ mit $(p-b)\in A(U)\setminus A(\partial U)$.

Da d (4) erfüllt und da A eine bijektive lineare Abbildung ist, gilt

$$d_U(G,p) = d_U(A,p-b) = d_{\mathcal{E}_r(0)}(A,p-b)$$

für ein genügend großes $r\in R_+$ ($\mathcal{E}_r(0)$ bezeichnet wieder die offene Kugel vom Radius r um 0 im R^n). Dabei ist $A(\mathcal{E}_r(0))$ eine konvexe topologische Kugel, die 0 und $(p-b)$ im Innern enthält. Für die stetigen Abbildungen $\gamma':[0,1]\longrightarrow R^n$ und $F':[0,1]\times\overline{\mathcal{E}_r(0)}\longrightarrow R^n$ (vermöge $\gamma'(t):=(1-t)(p-b)$ bzw. $F'(t,x):=Ax$) ist wieder die Prämisse von (i) erfüllt, so daß gilt:

$$d_U(G,p) = d_{\mathcal{E}_r(0)}(A,p-b) = d_{\mathcal{E}_r(0)}(A,0) = d_{\mathcal{E}^n(0)}(A,0)\ ,$$

letzteres nach (4), wobei $\mathcal{E}^n(0)$ die offene Einheitskugel im R^n bezeichnet.

$d_{\mathcal{E}^n(0)}(A,0)$ soll nun berechnet werden. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

<u>1.Fall:</u> det $A > 0$

Sei $(e_1,\dots,e_n)$ die am Anfang dieses Paragraphen festgelegte Basis des R^n. Da A bijektiv ist, muß $(Ae_1,\dots,Ae_n)$ ebenfalls eine Basis des R^n sein. Wegen det $A>0$ existieren nach einem bekannten Satz der Linearen Algebra [5] n stetige Abbildungen $f_1,\dots,f_n:[0,1]\longrightarrow R^n$ mit $f_1(0)=e_1,\dots,f_n(0)=e_n$, $f_1(1)=Ae_1,\dots,f_n(1)=Ae_n$ und $f_1(t),\dots,f_n(t)$ linear unabhängig für alle $t\in[0,1]$.
Seien nun $\gamma'':[0,1]\longrightarrow R^n$ und $F'':[0,1]\times\overline{\mathcal{E}^n(0)}\longrightarrow R^n$ durch $\gamma''(t)=0$ bzw. $F''(t,x):=\sum_{i=1,\dots,n} pr_i(x)\cdot f_i(t)$ definiert, wobei pr_i die Projektion auf die i.Koordinatenachse bezeichnet $(i=1,\dots,n)$. Offenbar sind für γ'' und F'' wieder die Voraussetzungen von (i) erfüllt, so daß folgt:

$$\begin{aligned} d_U(G,p) &= d_{\mathcal{E}^n(0)}(A,0)=d_{\mathcal{E}^n(0)}(F''(1,\cdot),\gamma''(1))= \\ &= d_{\mathcal{E}^n(0)}(F''(0,\cdot),\gamma''(0))=d_{\mathcal{E}^n(0)}(id_{\overline{\mathcal{E}^n(0)}},0) = 1\ . \end{aligned}$$

Letzteres wegen (ii). Im ersten Fall gilt also

$$d_U(G,p)=1=\text{sign det } G\ .$$

<u>2.Fall:</u> det $A < 0$

Sei $(e_1,\dots,e_n)$ wie oben und sei $B:R^n\longrightarrow R^n$ vermöge $B(x):=-pr_1(x)e_1+\sum_{i=2,\dots,n} pr_i(x)e_i$ definiert. Dann ist B wie A ein linearer Automorphismus des R^n mit sign det B = sign det $A = -1$. Sei J der lineare Automorphismus des R^n, der Ae_i in Be_i $(i=1,\dots,n)$ überführt, dann gilt sign det J = sign det $B\cdot$sign det $A^{-1}=1$. Wendet man wieder den oben erwähnten Satz der Linearen Algebra an, so erhält man n stetige Funktionen $g_1,\dots,g_n:[0,1]\longrightarrow R^n$ mit $g_1(0)=Ae_1,\dots,g_n(0)=Ae_n$, $g_1(1)=Be_1,\dots,g_n(1)=Be_n$ und $g_1(t),\dots,g_n(t)$ linear unabhängig für alle $t\in[0,1]$. Sei $F''':[0,1]\times\overline{E^n(0)} \longrightarrow R^n$ durch $F'''(t,x):=\sum_{i=1,\dots,n} pr_i(x)\cdot g_i(t)$ definiert, dann erfüllen wieder γ'' und F''' die Voraussetzungen von (i), so daß gilt:

$$d_U(G,p) = d_{E^n(0)}(A,0) = d_{E^n(0)}(F'''(0,\cdot),\gamma''(0)) =$$
$$= d_{E^n(0)}(F'''(1,\cdot),\gamma''(1)) = d_{E^n(0)}(B,0)$$

Letzteres soll nun berechnet werden:
Seien $\gamma^{(4)}:[0,1] \longrightarrow R^n$ und $F^{(4)}:[0,1]\times\overline{E^n(0)} \longrightarrow R^n$ durch $\gamma^{(4)}(t):=-\frac{t}{2}e_1$ bzw. $F^{(4)}(t,x):=Bx$ definiert, dann schließt man wieder nach (i) auf

$$(*) \qquad d_U(G,p) = d_{E^n(0)}(B,0) = d_{E^n(0)}(B,-\tfrac{1}{2}e_1) \; .$$

Sei nun $q:=\frac{3}{2}e_1$, so daß nach (ii) $d_{E^n(0)}(id,q)=0$ gilt. Schließlich seien $\gamma^{(5)}:[0,1] \longrightarrow R^n$ und $F^{(5)}:[0,1]\times\overline{E^n(0)} \longrightarrow R^n$ durch

$$\gamma^{(5)}(t):= (1-t)q - \tfrac{1}{2}te_1 = (\tfrac{3}{2} - 2t)e_1 \quad \text{bzw.}$$
$$F^{(5)}(t,x):=\sum_{i=1,\dots,n} pr_i(x)e_i - 2t\cdot\varphi(pr_1(x))\cdot e_1 \quad \text{definiert,}$$

wobei $\varphi:R\longrightarrow R$ durch $\varphi(s):=\max\{s,0\}$ gegeben ist.
$\gamma^{(5)}$ und $F^{(5)}$ sind offenbar stetig, und für $t\in[0,1]$, $x\in\partial E^n(0)$ gilt: $F^{(5)}(t,x)=(pr_1(x)-2t\varphi(pr_1(x)))e_1 + \sum_{i=2,\dots,n} pr_i(x)e_i \neq (\frac{3}{2}-2t)e_1$.

Es sind also wieder die Voraussetzungen von (i) erfüllt, so daß folgt:

$$0 = d_{E^n(0)}(id,q) = d_{E^n(0)}(F^{(5)}(0,\cdot),\gamma^{(5)}(\theta)) =$$
$$= d_{E^n(0)}(F^{(5)}(1,\cdot),\gamma^{(5)}(1)) = d_{E^n(0)}(F^{(5)}(1,\cdot),-\tfrac{1}{2}e_1)$$

Offenbar ist $(F^{(5)}(1,\cdot))^{-1}(\{-\frac{1}{2}e_1\}) = \{x \,/\, x\in E^n(0),\ F^{(5)}(1,x)=-\frac{1}{2}e_1\} = \{\frac{1}{2}e_1, -\frac{1}{2}e_1\}$, so daß für $U_1:=\{x/\ x\in E^n(0), pr_1(x)<0\}$ und $U_2:=\{x \,/\, x\in E^n(0), pr_1(x)>0\}$ (iii) anwendbar ist. Es folgt:

$$0 = d_{E^n(0)}(F^{(5)}(1,\cdot),-\tfrac{1}{2}e_1) = d_{U_1}(\dots)+d_{U_2}(\dots) =$$
$$= d_{U_1}(id, -\tfrac{1}{2}e_1) + d_{U_2}(B,-\tfrac{1}{2}e_1) = 1 + d_{U_2}(B,-\tfrac{1}{2}e_1).$$

Letzteres folgt nach (ii). Wegen (4) und weil B ein Automorphismus ist, erhält man mit (*)

$$d_{E^n(0)}(B,0)=d_{E^n(0)}(B,-\tfrac{1}{2}e_1) = d_{U_2}(B,-\tfrac{1}{2}e_1) = -1$$

und $\quad d_U(G,p) = -1 = \text{sign}\det B$.
Damit sind alle Fälle erfaßt, so daß (2) für d nachgewiesen ist.

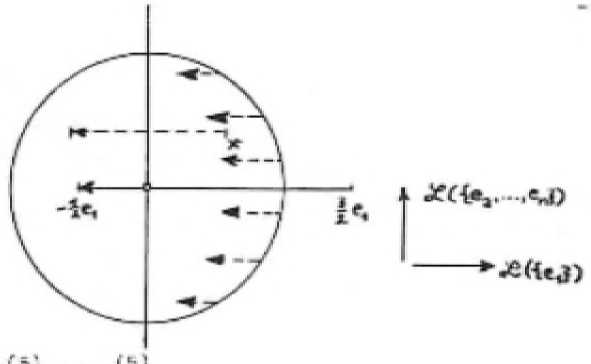

Abb.1: $\gamma^{(5)}$ und $F^{(5)}$

<u>(1-4) Bemerkung:</u>

Der Charakterisierungssatz (1-3) ist in mehrfacher Hinsicht nützlich:
Er zeigt einige Eigenschaften auf, die jeder Abbildungsgrad im R^n hat.
Aus Beweisschritt (Ia) erhält man folgendes Korollar:

Sind d ein Abbildungsgrad im R^n, $U\in\mathcal{U}^n$ und $(f,p)\in D(U)$, so gilt

$$d_U(f,p) = d_U(g,q) \quad \text{für alle } (g,q)\in \mathcal{U}^{D(U)}_{|p,f(\partial U)|}(f,p).$$

Mit der in Beweisschritt (IId) wiederholt benutzten Methode zeigt man sofort:

Sind d ein Abbildungsgrad im R^n, $U\in\mathcal{U}^n$ und $(f,p)\in D(U)$, so gilt:
Für jedes $q\in R^n$ ist $(f-q,p-q)\in D(U)$, und es ist $d_U(f-q,p-q)=d_U(f,p)$.
(Man definiere $\gamma:[0,1]\longrightarrow R^n$ und $F:[0,1]\times\overline{U}\longrightarrow R^n$ durch $\gamma(t):=p-tq$ bzw. $F(t,x):=f(x)-tq$, dann folgt wegen (i) sofort die Behauptung.)

Dem Beweisschritt (Ib) entnimmt man folgendes Korollar:

Seien d ein Abbildungsgrad im R^n, $U\in\mathcal{U}^n$. Da $D(U)$ offenbar lokalwegzusammenhängend ist, stimmen Komponenten und Wegkomponenten von $D(U)$ überein, und d_U ist auf jeder von ihnen konstant.

Schließlich kann man mittels (1-3) für einen beliebigen Abbildungsgrad d im R^n jedes d_U auf einer dichten Teilmenge von $D(U)$ berechnen, woraus einerseits folgt, daß es bei vorgegebener Orientierung des R^n (Basiswahl!) nur einen Abbildungsgrad gibt, und woraus man andererseits einen weiteren Charakterisierungssatz erhält.
Diese Ergebnisse sollen im folgenden abgeleitet werden, wobei zwei Lemmata benötigt werden.

(1-5) Lemma:

Seien $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ beliebig und U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $f:\overline{U}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ eine stetige injektive Abbildung, $f|_U$ ein Diffeomorphismus-in und $\det f(x_o)\neq 0$ für ein $x_o\in U$ ($\det f(x_o)$ bezeichnet die Funktionaldeterminante von f bei x_o).

Dann existiert eine Umgebung V von x_o und eine stetige Abbildung $g:\overline{U}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ mit $\|g-f\|_{u,\overline{U}}<\varepsilon$, $g(x)=J_f(x_o)\cdot(x-x_o)+f(x_o)$ für alle $x\in\overline{V}$ und $g^{-1}(\{f(x_o)\})=\{x_o\}$ ($J_f(x_o)$ bezeichnet die Funktionalmatrix von f bei x_o).

Beweis:

(a) Zunächst soll gezeigt werden, daß es eine Umgebung V' von x_o gibt mit $V'\subseteq U$ und $f(x_o)\notin I_x:=\{tf(x)+(1-t)(J_f(x_o)(x-x_o)+f(x_o))\mid t\in[0,1]\}$ für alle $x\in V'\setminus\{x_o\}$:

Angenommen zu jedem $\delta\in\mathbb{R}_+$ gibt es ein $x\in U_\delta(x_o)$ mit $f(x_o)\in I_x$.
Dann existiert eine Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von x_o verschiedener Vektoren des $\mathbb{R}^n$ mit $x_j\longrightarrow x_o$ und $f(x_o)\in I_{x_j}$ für alle $j\in\mathbb{N}$. Sei dafür $\delta_j:=|x_j-x_o|$ ($j\in\mathbb{N}$) definiert. Da $f|_U$ Diffeomorphismus-in ist, gilt

$$0=\lim_{\substack{x\to x_o\\ \neq}}\frac{|f(x)-f(x_o)-J_f(x_o)(x-x_o)|}{|x-x_o|}=\lim_{j\in\mathbb{N}}\frac{|f(x_j)-f(x_o)-J_f(x_o)(x_j-x_o)|}{\delta_j}$$

$$=\lim_{j\in\mathbb{N}}\frac{1}{\delta_j}|f(x_j)-f(x_o)-J_f(x_o)(x_j-x_o)|=$$

$$=\lim_{j\in\mathbb{N}}\frac{1}{\delta_j}\left|f(x_o)+\frac{t_j-1}{t_j}J_f(x_o)(x_j-x_o)-f(x_o)-J_f(x_o)(x_j-x_o)\right|\overset{*)}{=}$$

$$=\lim_{j\in\mathbb{N}}\frac{1}{\delta_j}\left|\frac{1}{t_j}J_f(x_o)(x_j-x_o)\right|=\lim_{j\in\mathbb{N}}\frac{1}{t_j}\left|J_f(x_o)\left(\frac{x_j-x_o}{\delta_j}\right)\right|\geq$$

$$\geq\min_{|x|=1}|J_f(x_o)x|>0$$

Damit ist die Annahme widerlegt, es muß also ein V' der gewünschten Art geben.

(b) Sei also V' so gewählt, daß (a) gilt. Sei überdies $\delta\in\mathbb{R}_+$ so gewählt, daß $|f(x)-f(x_o)-J_f(x_o)(x-x_o)|<\varepsilon$ für alle $x\in U_\delta(x_o)$ und daß $U_\delta(x_o)\subseteq V'$ sind. Sei $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow[0,1]$ eine stetige Funktion mit $\varphi(t)=0$ falls $t\leq\frac{\delta}{2}$ und $\varphi(t)=1$ falls $t\geq\delta$, dann kann g definiert werden:

$$g:\overline{U}\longrightarrow\mathbb{R}^n \text{ vermöge } g(x):=\varphi(|x-x_o|)f(x)+(1-\varphi(|x-x_o|))(J_f(x-x_o)+f(x_o)).$$

g ist sicherlich stetig. Setzt man $V:=U_{\delta/2}(x_o)$, so haben V und g

---

*) Wegen $f(x_o)=t_jf(x_j)+(1-t_j)(J_f(x_o)(x_j-x_o)+f(x_o))$ mit $t_j\in]0,1[$, $j\in\mathbb{N}$ darf man $f(x_j)$ durch $f(x_o)+\frac{t_j-1}{t_j}J_f(x_o)(x_j-x_o)$ ersetzen.

die folgenden Eigenschaften:

$g(x)=J_f(x_o)(x-x_o)+f(x_o)$ für alle $x\in\overline{V}$,

$\|g-f\|_{u,\overline{U}}<\varepsilon$, denn für $x\in V\cup(\overline{U}\setminus U_\delta(x_o))$ gilt $|g(x)-f(x)|<\varepsilon$ nach Wahl von δ und für $x\in U_\delta(x_o)\setminus V$ gilt $|f(x)-g(x)|=$
$=|f(x)-\varphi(|x-x_o|)f(x)-(1-\varphi(|x-x_o|))(J_f(x_o)(x-x_o)+f(x_o))|=$
$=(1-\varphi(|x-x_o|))\cdot|f(x)-J_f(x_o)(x-x_o)-f(x_o)|<\varepsilon$ nach Wahl von δ.

$g^{-1}(\{f(x_o)\})=\{x_o\}$, denn für alle $x\in U$ ist $g(x)\in I_x$ und außerhalb von V' ist $g(x)=f(x)$ und $g|_V$ ist injektiv, so daß nach Wahl von V' und δ $g(x)=f(x_o)$ genau dann gilt, wenn $x=x_o$ ist.

Damit ist das Lemma bewiesen.

(1-6) Definition:

Sei $U\in\mathcal{J}^n$ beliebig. Mit den Bezeichnungen des vorigen Lemmas seien dann definiert:

$$D_2(U):=\{(f,p)\;/\;(f,p)\in\mathcal{D}(U),\ f\in\mathcal{C}^1(\overline{U},\mathbb{R}^n)\}$$
$$D_1(U):=\{(f,p)\;/\;(f,p)\in D_2(U),\ \det f(x)\neq 0 \text{ für alle } x\in f^{-1}(\{p\})\}.$$

Bei Bedarf denke man sich diese Mengen von $\mathcal{D}(U)$ topologisiert.

(1-7) Lemma:

Sei $U\in\mathcal{J}^n$, dann gelten:

(a) $D_1(U)$ liegt dicht in $D_2(U)$.

(b) $D_2(U)$ liegt dicht in $\mathcal{D}(U)$.

(c) $\mathcal{D}(U)$ liegt offen in $\mathcal{C}(\overline{U},\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$ (bzgl. der Forts. von α).

Beweis:

Zu (c): Da $\mathcal{C}(\overline{U},\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$ die Produkttopologie von Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf $\overline{U}$ und euklidischer Topologie trägt - mit "Forts. von α" ist die wie μ definierte Metrik auf dem Produktraum gemeint - , ist dieser Teil des Lemmas trivial (für jedes $(f,p)\in\mathcal{D}(U)$ ist $U^{\mathcal{D}(U)}_{|p,f(\partial U)|}(f,p)=U^{\mathcal{C}(\overline{U},\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n}_{|p,f(\partial U)|}(f,p)\subseteq\mathcal{D}(U)$).

Zu (b): Da (c) schon gezeigt ist, reicht es nun aus, wenn man beweist, daß $\mathcal{C}^1(\overline{U},\mathbb{R}^n)$ dicht in $\mathcal{C}(\overline{U},\mathbb{R}^n)$. Daraus folgt dann (b) auf triviale Weise.

Sei also $f=(f_1,\dots,f_n)\in\mathcal{C}(\overline{U},\mathbb{R}^n)=\mathcal{C}(\overline{U},\mathbb{R})^n$ und sei $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ beliebig. Dann gibt es nach dem Satz von Stone-Weierstraß n Polynome $p_1,\dots,p_n$ in je n Unbestimmten, so daß $\|f_i-p_i\|_{u,\overline{U}}<\varepsilon/\sqrt{n}$ ($i=1,\dots,n$). Für $g:=(p_1,\dots,p_n)$ gilt dann: $g|_{\overline{U}}\in\mathcal{C}^1(\overline{U},\mathbb{R}^n)$ und $\|f-g\|_{u,\overline{U}}<\varepsilon$, denn für jedes $x\in\overline{U}$ ist $|f(x)-g(x)|=(\sum_{i=1,\dots,n}(f_i(x)-p_i(x))^2)^{1/2}<(\sum_{\dots}\varepsilon^2/n)^{1/2}=\varepsilon$.

Da ε und f beliebig waren, folgt daraus (b).

Zu (a):

1.Schritt: Nach einem Satz von A.Sard gilt:

Seien $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $N := \{ x \,/\, x \in V,\ \det f(x) = 0 \}$, dann gilt $\overset{\circ}{f(N)} = \emptyset$, d.h. $f(N)$ hat keine inneren Punkte.

Beweis (s.Berger/Berger [2]): Ist f speziell eine affine Abbildung, so ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. Sei also f nicht affin und sei - auch diese Einschränkung schließt nur triviale Fälle aus - $V \neq \emptyset$.

Sei $Q \subseteq V$ ein abgeschlossener Quader und sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Da V offen ist, gilt auf Q der Mittelwertsatz in folgender Form:

Zu $x, y \in Q$ gibt es ein $\xi \in \{ tx + (1-t)y \,/\, t \in [0,1] \}$ mit $f(y) - f(x) = J_f(\xi)(y-x)$.

Es folgt dann: $| f(y) - f(x) - J_f(x)(y-x) | = | (J_f(\xi) - J_f(x))(y-x) | \leq$ $\leq \| J_f(\xi) - J_f(x) \|_{\mathbb{R}^{n^2}} \cdot | y-x |$ ($\| \cdot \|_{\mathbb{R}^{n^2}}$ bezeichnet hier die Norm des linearen Operators - sie induziert auf $\mathbb{R}^{n^2}$ die natürliche Topologie und die natürliche uniforme Struktur). Da $J_f(\cdot)$ auf Q gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta_Q \in \mathbb{R}_+$ so, daß aus $|\xi - x| \leq |y-x| < \delta_Q$ stets $| f(y) - f(x) - J_f(x)(y-x) | < \varepsilon \cdot | y-x | < \varepsilon \cdot \delta_Q$ folgt.

Sei nun $\{ Q_k \,/\, k = 1, \ldots, m^n \}$ eine Quaderzerlegung von Q in m^n Quader, deren Durchmesser kleiner als (je) δ_Q ist. Weiter sei für jedes $x \in N$

$$T_x := f(x) + J_f(x)((\cdot) - x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad \text{definiert.}$$

Dann ist für jedes $x \in N \cap Q_k$ $T_x(Q_k)$ in einer affinen Hyperebene des $\mathbb{R}^n$ enthalten, denn T_x ist eine singuläre affine Abbildung.

Für $x, y \in Q_k$ gilt nach Wahl von δ_Q:

$|f(x) - f(y)| = | J_f(\xi)(x-y) | \leq \| J_f(\xi) \|_{\mathbb{R}^{n^2}} \cdot |x-y| \leq \alpha_Q \cdot | x-y | \leq \alpha_Q \delta_Q$, wobei α_Q so gewählt ist, daß für $C \in \mathbb{R}_+$ mit $\| \cdot \|_{\mathbb{R}^{n^2}} \leq C \cdot \| \cdot \|_{\max}$ gilt

$\| J_f(z) \|_{\mathbb{R}^{n^2}} \leq C \cdot \| J_f(z) \|_{\max} \leq C \cdot \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|_{\infty, Q} \leq \alpha_Q$.

Der Durchmesser von $f(Q_k)$ ist also nicht größer als $\alpha_Q \cdot \delta_Q$ für jedes $k = 1, \ldots, m^n$.

Für $x \in N \cap Q_k$ und $y \in Q_k$ gilt stets $| T_x(y) - f(y) | < \varepsilon \cdot \delta_Q$, also ist für jedes $z \in f(Q_k)$ die Ungleichung $| z, T_x(Q_k) | < \varepsilon \cdot \delta_Q$ erfüllt.

Nun kann man den Inhalt von $f(Q_k)$ abschätzen, indem man den Abstand des Bildes von Q_k unter f von einer $T_x(Q_k)$ enthaltenden Hyperebene H_k und dort den Inhalt von $f(Q_k) \cap H_k$ abschätzt, wobei $x \in N \cap Q_k$ beliebig gewählt ist. So erhält man:

$I(f(N \cap Q)) \leq 2 \cdot \varepsilon \cdot \delta_Q \cdot K_{n-1} \cdot (\alpha_Q \cdot \delta_Q)^{n-1} \cdot m^n$, wobei K_{n-1} das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^{n-1}$ bezeichnet.

O.B.d.A. darf man noch annehmen, daß $Q = \{ y \,/\, |pr_i(y) - pr_i(x_0)| \leq B \text{ f.a. } i \}$ für ein $x_0 \in U$ und ein $B \in \mathbb{R}_+$ und daß $\delta_Q = \frac{B}{m}$ gelten. Dann folgt:

$$I(f(N \cap Q)) \leq B' \cdot \varepsilon \quad (B' := 2 \cdot (m \cdot \delta_Q)^n \cdot K_{n-1} \cdot \alpha_Q^{\,n-1} = 2 K_{n-1} \cdot B^n \cdot \alpha_Q^{\,n-1}),$$

wobei B' nur von Q und α_Q, also nicht von m abhängt. Für $\varepsilon \to 0$ bleibt B' konstant, so daß $I(f(N \cap Q)) = 0$ ist. (Da $f(N \cap Q)$ im Durchschnitt von meßbaren Mengen mit beliebig kleinem Maß liegt, deren Durchschnitt meßbar ist, ist der Lebesguesche Inhalt $I(f(N \cap Q))$ definiert.)

Schöpft man nun V von innen durch höchstens abzählbar viele Quader $Q^{(i)}$ aus, so folgt $I(f(N \cap V)) = I(f(N)) \leq \sum\limits_i I(f(N \cap Q^{(i)})) = 0$, also kann $f(N)$ keine inneren Punkte haben.

2.Schritt: Seien $(f,p) \in D_2(U)$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Nach dem 1.Schritt gibt es ein $q \in \mathbb{R}^n$ mit $q \notin f(N)$, $|p-q| < \varepsilon$ und $|p-q| < |p, f(\partial U)|$. Wegen $S_{|p, f(\partial U)|}(f,p) \subseteq D(U)$ ist $(f,q) \in D_2(U)$ mit $\rho((f,p),(f,q)) < \varepsilon$ und $f^{-1}(\{q\}) \cap N = \emptyset$, also $(f,q) \in D_1(U)$. Man kann also $D_2(U)$ aus $D_1(U)$ beliebig nahe approximieren, so daß (a) folgt.

(1-8).Satz:

Eine Familie $d = (d_U)_{U \in J^n}$ ist genau dann ein Abbildungsgrad im $\mathbb{R}^n$, wenn für jedes $U \in J^n$ gelten:

(I) $d_U : D(U) \longrightarrow \mathbb{Z}$ ist eine stetige Abbildung in die diskret topologisierte Menge der ganzen Zahlen.

(II) Für jedes $(f,p) \in D_1(U)$ gilt: $d_U(f,p) = \sum\limits_{x \in f^{-1}(\{p\})} \operatorname{sign} \det f(x)$.

Beweis:

(a) Sei d ein Abbildungsgrad im $\mathbb{R}^n$, dann ist nach Satz (1-3),(1) jedes d_U ($U \in J^n$) stetig, so daß (I) erfüllt ist. Unter dieser Voraussetzung soll nun (II) nachgewiesen werden:

Seien $U \in J^n$ und $(f,p) \in D_1(U)$ beliebig gewählt. Nach dem 'Satz über implizite Funktionen' ist $f^{-1}(\{p\}) \subseteq U$ eine endliche Teilmenge, [20]) denn f ist in einer Umgebung von x diffeomorph, wenn $x \in f^{-1}(\{p\})$, und $\overline{U}$ ist kompakt. Sei also $\{ x_1, \ldots, x_m \} = f^{-1}(\{p\})$ und seien $U_1, \ldots, U_m$ paarweise disjunkte offene Teilmengen von U mit $f^{-1}(\{p\}) \cap U_i = \{x_i\}$ $(i = 1, \ldots, m)$, $f^{-1}(\{p\}) \cap \bigcup\limits_{i=1,\ldots,m} \partial U_i = \emptyset$ und $\overline{U} = \bigcup\limits_{i=1,\ldots,m} \overline{U}_i$. Nach (1-3),(3) gilt dann

$$d_U(f,p) = \sum_{i=1,\ldots,m} d_{U_i}(f,p) .$$

Nach (1-3),(4) gilt für jede Umgebung U_i' von x_i mit $U_i' \subseteq U_i$ auch

$$d_{U_i'}(f,p) = d_{U_i}(f,p) \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Wegen $\det f(x_i) \neq 0$ existiert ein U_i', das eine solche Umgebung von x_i ist, für die $f|_{\overline{U_i'}}$ ein Diffeomorphismus-in ist und für die $\overline{U_i'} \subseteq U_i$ gilt $(i = 1, \ldots, m)$.

Sei nun $\varepsilon_i \in \mathbb{R}_+$ so klein gewählt, daß $\varepsilon_i < |p, f(\partial U_i')|$ gilt. Nach (1-4) gilt dann

$$d_{U_i'}(g,p) = d_{U_i'}(f,p) \quad \text{für alle } g \in C(\overline{U_i'}, \mathbb{R}^n) \text{ mit } \| f-g \|_{u,\overline{U_i'}} \leq \varepsilon .$$

Nach Lemma (1-5) kann man nun eine Umgebung U_i'' von x_i $(i=1,\dots,m)$ und g_i auswählen mit

$$U_i'' \subseteq U_i'$$
$$g_i \in C(\overline{U_i'}, \mathbb{R}^n) \text{ mit } \| g_i - f \|_{u,\overline{U_i'}} < \varepsilon_i \text{ und } g_i(x) = f(x_i) + J_f(x_i)(x-x_i)$$
$$\text{für alle } x \in \overline{U_i''} \text{ und } g_i^{-1}(\{p\}) = \{x_i\}. \quad (i=1,\dots,m)$$

Nach Satz (1-3),(4) und nach Wahl von ε_i $(i=1,\dots,m)$ gilt nun

$$d_{U_i'}(f,p) = d_{U_i'}(g,p) = d_{U_i''}(g,p) = \text{sign det } f(x_i) \quad (i=1,\dots,m)$$

(letzteres nach (1-3),(2)). Insgesamt folgt also mit

$$d_U(f,p) = \sum_{i=1,\dots,m} d_{U_i}(f,p) = \sum_{i=1,\dots,m} d_{U_i'}(g,p) = \sum_i \text{sign det } f(x_i)$$

die Formel (II) für beliebiges $(f,p) \in D_1(U)$ (und beliebiges $U \in J^n$).
Damit ist gezeigt, daß jeder Abbildungsgrad im $\mathbb{R}^n$ die Eigenschaften (I) und (II) hat.

(b) Sei nun umgekehrt d eine Familie, die (I) und (II) erfüllt.
(1) und (2) von Satz (1-3) sind dann trivialerweise erfüllt. Da für $U \in J^n$ dann d_U lokal konstant ist, gibt es zu $(f,p) \in D(U)$ ein $(g,q) \in D_1(U)$ (dicht in $D(U)$!) mit

$$d_U(g,q) = d_U(f,p)$$

und
$$\mu((g,q),(f,p)) < |p, \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1,\dots,m} f(\partial U_i)| \quad \text{, wobei } U_1,\dots,U_m$$

wie in (1-3)(3) beschaffen seien, sowie

$$d_{U_i}(g,q) = d_{U_i}(f,p) \quad .$$

Nach (II) folgt dann sofort

$$d_U(f,p) = d_U(g,q) = \sum_{i=1,\dots,m} d_{U_i}(g,q) = \sum_{i=1,\dots,m} d_{U_i}(f,p), \text{ d.h.}$$

heißt (1-3)(3) ist erfüllt.
(1-4)(4) weist man ähnlich nach: Seien $U', U, (f,p)$ wie in (1-3)(4), dann gibt es wegen Lemma (1-7) ein $(g,q) \in D_1(U)$ mit $d_U(g,q) = d_U(f,p)$ und $d_{U'}(g,q) = d_{U'}(f,q)$ und $\mu((g,q),(f,p)) < |p, f(\partial U) \cup f(\overline{U} \setminus U')|$.
Wegen (II) folgt dann mit

$$d_U(f,p) = d_U(g,q) = d_{U'}(g,q) = d_{U'}(f,p)$$

die Bedingung (1-3)(4). d muß also ein Abbildungsgrad im $\mathbb{R}^n$ sein.
Damit ist der Satz (1-8) bewiesen.

<u>(1-9) Korollar:</u>
Jeder Abbildungsgrad $d = (d_U)_{U \in J^n}$ im $\mathbb{R}^n$ genügt der Bedingung (1-8)(II).

<u>(1-10) Korollar:</u>
Gibt man im $\mathbb{R}^n$ eine Orientierung durch eine feste Basis vor und sind $d = (d_U)_{U \in J^n}$ bzw. $d' = (d_U')_{U \in J^n}$ zwei Abbildungsgrade im $\mathbb{R}^n$ (bzgl. dieser Orientierung), so gilt $d = d'$, d.h. $d_U = d'_U$ für alle $U \in J^n$.

<u>Beweis:</u> Das Korollar folgt mit (1-8) sofort daraus, daß für jedes $U \in J^n$ d_U und d_U' zwei stetige Abbildungen von $D(U)$ sind, die wegen (II) und (1-7) auf der dichten Teilmenge $D_1(U)$ übereinstimmen.

<u>(1-11) Korollar:</u>
Gibt man im $\mathbb{R}^n$ eine Orientierung durch eine feste Basis $(e_1,\dots,e_n)$ vor und ist $d = (d_U)_{U \in J^n}$ ein Abbildungsgrad im $\mathbb{R}^n$, so gilt für jede Basis $(e_1',\dots,e_n')$ des $\mathbb{R}^n$ folgendes:
Ist $A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ der lineare Automorphismus von $\mathbb{R}^n$, der die (geordnete) Basis $(e_1,\dots,e_n)$ in die Basis $(e_1',\dots,e_n')$ überführt, dann gilt für jedes $U \in J^n$ und jedes $(f,p) \in D(U)$ die Formel

$$d_U(A \circ f, A(p)) = (\text{sign det } A) \cdot d_U(f,p) \quad .$$

<u>Beweis:</u> Offenbar gilt die Formel für $(f,p) \in D_1(U)$. Wegen der Lokal-Konstanz von d_U folgt sie daraus sofort für $(f,p) \in D(U)$.

<u>(1-12) Bemerkung:</u>
Die Korollare (1-11) und (1-12) besagen, daß das Axiomensystem (1-1) bei vorgegebener Orientierung des $\mathbb{R}^n$ gewissermaßen "kanonisch" ist, wobei der Wechsel der Orientierung im Bildbereich genau "das Vorzeichen des Abbildungsgrades" ändert. Meines Wissens sind die Ergebnisse (1-3),(1-8),(1-9) und (1-10) neu bzw. erstmals in voller Allgemeinheit bewiesen worden. [5])
Wegen (1-10) werde ich in den folgenden Paragraphen die Formulierung "der Abbildungsgrad (im $\mathbb{R}^n$)" statt "ein ..." benutzen.
In §2 werde ich die Existenz des Abbildungsgrades im $\mathbb{R}^n$ zeigen, indem ich eine analytische Konstruktion - ausgehend von (1-9) - angebe. In §3 wird (1-9) dazu benutzt, weitere Eigenschaften des Abbildungsgrades abzuleiten, während §5 den Satz (1-3) für eine topologische Konstruktion des Abbildungsgrades ausnutzt. Dort wird dann - als Anwendung - schließlich nachgewiesen, daß die d_U $(U \in J^n)$ im allgemeinen surjektiv sind.

§ 2 . Eine analytische Konstruktion für den Abbildungsgrad im n-dimensionalen reellen Zahlenraum.

Seien n, R^n, J^n, $D(U)$, $D_2(U)$, $D_1(U)$, μ, $|\cdot|$, $\|\cdot\|_{u,X}$ etc. wie in § 1 definiert. Ausgehend von Satz (1-8) soll nun ein Abbildungsgrad $d=(d_U)_{U\in J^n}$ im R^n konstruiert werden. Die folgende Konstruktion stützt sich auf die Arbeit von E.Heinz (Literaturverzeichnis [8]) und ähnelt der in [18] angegebenen, wenn sich auch die Einzelheiten unterscheiden.

(2-1) Definition:

Seien $U\in J^n$ und $(f,p)\in D_1(U)$, dann sei $d_U^{(1)}(f,p):=\sum_{x\in f^{-1}(\{p\})}\operatorname{sign}\det f'(x)$.

(2-2) Lemma:

Seien $U\in J^n$ und $(f,p)\in D_1(U)$, dann gibt es ein $\varepsilon\in R_+$ und eine Umgebung V_i von $x_i\in\{x_1,\dots,x_m\}:=f^{-1}(\{p\})$ $(i=1,\dots,m)$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $f|_{V_i}:V_i\longrightarrow E_\varepsilon(p)$ ist für jedes $i=1,\dots,m$ ein Homöomorphismus-auf.

(b) $f^{-1}(E_\varepsilon(p))=\bigcup_{i=1,\dots,m}V_i=\dot{\bigcup}_{i=1,\dots,m}V_i$ (disjunkte Vereinigung).

(c) $\operatorname{sign}\det f'|_{V_i}=\operatorname{sign}\det f'(x_i)$ für alle $i=1,\dots,m$.

Beweis:

Nach dem 'Satz über inverse Funktionen' gibt es zu jedem $x_i\in f^{-1}(\{p\})$ eine in U enthaltene Umgebung U_i mit folgenden Eigenschaften:

(a') $f|_{U_i}:U_i\longrightarrow f(U_i)$ ist ein Homöomorphismus zwischen offenen Meng

(b') $\operatorname{sign}\det f'|_{U_i}=$ konstant.

(c') $U_i\cap U_j=\emptyset$ für $x_i\neq x_j$ mit $x_i,x_j\in f^{-1}(\{p\})$.

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß es ein $\delta\in R_+$ gibt mit $f^{-1}(E_\delta(p))\subseteq\bigcup_i U_i$

Angenommen das ist nicht der Fall, dann gibt es für jedes $\delta\in R_+$ ein $z\in U\setminus\bigcup_i U_i$ mit $f(z)\in E_\delta(p)$. Es gibt also eine Folge (z_i) aus $U\setminus\bigcup_i U_i$ mit $f(z_i)\longrightarrow p$. Da f kompakt ist, gibt es eine Teilfolge (z_{i_k}) von (z_i) , die gegen ein $z_0\in\overline{U}\setminus\bigcup U_i$ konvergiert. Wegen der Stetigkeit von f folgt $f(z_0)=p$ mit $z_0\notin f^{-1}(\{p\})$. Es gibt also ein $\delta\in R_+$ der gewünschten Art. Da jedes $f(U_i)$ Umgebung von p ist, gibt es ein $\varepsilon\in R_+$ mit $E_\varepsilon(p)\subseteq E_\delta(p)\cap\bigcap_i f(U_i)$. Wählt man ε so und setzt man $V_i:=U_i\cap f^{-1}(E_\varepsilon(p))$ $(i=1,\dots,m)$, so gelten dafür offenbar (a),(b) und (c).

(2-3) Satz:

Seien $U\in J^n$ und $(f,p)\in D_1(U)$, dann gibt es ein $\varepsilon\in R_+$ mit folgender Eigenschaft:

Für jedes $\varphi\in C(R,R)$ mit $\operatorname{supp}\varphi:=\overline{\varphi^{-1}(R\setminus\{0\})}\subseteq\,]0,\varepsilon[$ und $\int_{R^n}\varphi(|x|)dx=1$ ist

$$d_U^{(1)}(f,p)=\int_U\varphi(|f(x)-p|)\cdot\det f'(x)\,dx\quad.$$

Bemerkung:

Geometrisch kann man den Satz so interpretieren:
$\det f'(\cdot)$ hat in je einer Umgebung jeder Lösung der Gleichung $f(x)=p$ konstantes und nichtverschwindendes Vorzeichen. Überstreicht nun $f(\cdot)$ eine solche Umgebung einer Lösung, so wird dort ein "Beitrag" von +1 oder -1 zu $d_U^{(1)}(f,p)$ geleistet, je nachdem ob f die Orientierung dieser Umgebung erhält oder nicht. [7])
Solange $(f,p)\in D_1(U)$ ist, hat die Mittelbildung über f mit Hilfe von φ nur rein formalen Charakter - wie der Beweis unten zeigt. Nach Lemma (1-7) kann man aber hoffen, die Integraldarstellung von $d_U^{(1)}(\cdot,\cdot)$ auch für $D_2(U)$ verwenden zu können. Immerhin hat das Integral auch für $D_2(U)$ einen Sinn, wenn man ε geeignet bestimmt.

Beweis des Satzes:

Man setze wieder $\{x_1,\dots,x_m\}:=f^{-1}(\{p\})$ und wähle $\varepsilon\in R_+,V_1,\dots,V_m$ wie in Lemma (2-2), dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_U\varphi(|f(x)-p|)\det f'(x)\,dx&=\sum_{i=1,\dots,m}\int_{V_i}\varphi(|f(x)-p|)\det f'(x)\,dx=\\&=\sum_i\operatorname{sign}\det f'(x_i)\cdot\int_{E_\varepsilon(p)}\varphi(|y-p|)\,dy=\\&=\sum_i\operatorname{sign}\det f'(x_i)\cdot\int_{E_\varepsilon(0)}\varphi(|y|)\,dy=\sum_i\operatorname{sign}\det f'(x_i)\\&=d_U^{(1)}(f,p)\ .\end{aligned}$$

(Letzteres nach Definition (2-1)).

(2-4) Satz:

Seien $U\in J^n$, $(f,p)\in D_2(U)$ und $\varepsilon:=|p,f(\partial U)|$, dann gilt:
Für $\varphi,\tilde{\varphi}\in C(R,R)$ mit $\operatorname{supp}\varphi\subseteq\,]0,\varepsilon[$, $\operatorname{supp}\tilde{\varphi}\subseteq\,]0,\varepsilon[$, $\int_{R^n}\varphi(|x|)dx=1$ und $\int_{R^n}\tilde{\varphi}(|x|)dx=1$ ist

$$\int_U\varphi(|f(x)-p|)\cdot\det f'(x)\,dx=\int_U\tilde{\varphi}(|f(x)-p|)\cdot\det f'(x)\,dx.$$

Beweis (E.Heinz [8]):

(a) Für $\alpha := \varphi - \tilde{\varphi}$ gilt $\int_U \alpha(|f(x)-p|)\cdot \det f(x)\, dx =$

$= \int_U \varphi(|f(x)-p|)\det f(x)dx - \int_U \tilde{\varphi}(|f(x)-p|)\det f(x)dx$ und

$0 = \int_{R^n} \alpha(|x|)dx = c\int_0^{\varepsilon} \alpha(t)\cdot t^{n-1}dt$, wobei c die nötige Kugelkonstante ist.

Seien $g := f(\cdot) - p$ und α wie oben, dann gelten:

$g \in C^1(\bar{U}, R^n)$ mit $|g(x)| > \varepsilon$ für alle $x \in \partial U$,

$\alpha \in C(R,R)$ mit $\operatorname{supp}\alpha \subseteq]0,\varepsilon[$ und $\int_{R^n} \alpha(|x|)dx = 0$.

Es ist also zu zeigen, daß $\int_U \alpha(|g|)\cdot \det g\, dx = 0$ ist.

(b) Folgender Hilfssatz wird benötigt:

Sei $g^+ \in C^2(\bar{U}, R^n)$ mit $|g^+(x)| > \varepsilon$ für alle $x \in \partial U$, dann gibt es ein $r \in R_+$ und eine $(n-1)$-C^1-Differentialform ω auf $\overline{E_r(0)}$ mit folgenden Eigenschaften:

$\bar{U} \subseteq E_r(0)$,

$d\omega(x) = \alpha(|g^+(x)|)\det g^+(x)\cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ für alle $x \in U$,

$\omega(x) = 0$ für $x \in \partial E_r(0) = S_r^{n-1}(0)$.

Beweis: Zunächst verschafft man sich aus α eine spezielle C^1-Funktion $\beta \in C^1(R,R)$ vermöge

$$\beta(s) := \begin{cases} \frac{1}{s^n}\int_0^s t^{n-1}\alpha(t)dt & \text{, falls } s \in \operatorname{supp}\alpha \\ 0 & \text{, falls } s \in R \setminus \operatorname{supp}\alpha \end{cases}$$

. Offenbar ist β stetig differenzierbar mit $\operatorname{supp}\beta \subseteq]0,\varepsilon[$. Für $s \in \operatorname{supp}\beta$ gilt

$$\beta'(s) = \frac{-n}{s^{n+1}}\int_0^s t^{n-1}\alpha(t)dt + \frac{1}{s^n}s^{n-1}\alpha(s) =$$
$$= -\frac{n}{s}\beta(s) + \frac{1}{s}\alpha(s) .$$

Folglich erfüllt β (auf ganz R) die folgende Differentialgleichung:

(*) $\quad id\cdot\beta' + n\cdot\beta = \alpha$.

Für $h_i : R^n \to R$ vermöge $h_i(x) := \begin{cases} \beta(|g^+(x)|)\cdot pr_i(g^+(x)) & \text{,falls } x \in \bar{U} \\ 0 & \text{,falls } x \in R^n \setminus \bar{U} \end{cases}$

$(i = 1,\ldots,n)$ gilt:

$h_i \in C^1(R^n, R)$,

h_i verschwindet in einer Umgebung a_i von ∂U (,da $|g^+(x)| \notin \operatorname{supp}\beta$ für $x \in \partial U$ und $|g^+(\partial U)|$ kompakt.

Sei $J_g(x) = (a_{ij}(x)) := \left(\frac{\partial g_i^+(x)}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial pr_i \circ g^+(x)}{\partial x_j}\right)$ die Funktionalmatrix von g^+ und sei $A_{ij}(x)$ die Adjunkte (Kofaktor) von $a_{ij}(x)$ $(i,j = 1,\ldots,n)$.

Dann sei definiert:

$$\omega(x) := \sum_{j=1,\ldots,n} (-1)^{j-1}\left(\sum_{i=1,\ldots,n} A_{ij}(x)\cdot h_i(x)\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n ,$$

wobei $\widehat{dx_j}$ anzeigen soll, daß dx_j im äußeren Produkt nicht Faktor ist, und wobei $A_{ij}(x) := 0$ für alle $x \in R^n \setminus \bar{U}$ sei. Offenbar ist ω dann eine $(n-1)$-C^1-Differentialform auf R^n , die in der Umgebung $W := \bigcap_{i=1,\ldots,n} a_i$ von ∂U und außerhalb von U verschwindet. Für $x \in U$ gilt überdies:

$$d\omega(x) = \sum_{j=1,\ldots,n} (-1)^{j-1}\left(\sum_{i=1,\ldots,n} d(A_{ij}\cdot h_i)\right) \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n(x) =$$
$$= \sum_j (-1)^{j-1}\left(\sum_{k,i} \frac{\partial(A_{ij}\cdot h_i)}{\partial x_k} dx_k\right) \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n(x) =$$
$$\underset{8)}{=} \sum_j (-1)^{j-1}\left(\sum_i \frac{\partial(A_{ij}\cdot h_i)}{\partial x_j}(-1)^{j-1}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n(x) =$$
$$= \sum_{i,j} \frac{\partial(A_{ij}\cdot h_i)}{\partial x_j} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n(x) =$$
$$= \left(\sum_{i,j} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} h_i + \sum_{i,j,k} A_{ij}\frac{\partial(\beta(|g^+|)\cdot g_i^+)}{\partial g_k^+}\cdot\frac{\partial g_k^+}{\partial x_j}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n(x) =$$
$$= \left(\sum_i h_i \sum_j \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} + \sum_{i,k} \frac{\partial(\beta(|g^+|)\cdot g_i^+)}{\partial g_k^+}\cdot\sum_j A_{ij}\cdot a_{kj}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n(x) =$$
$$\underset{9)}{=} \left(\sum_i h_i \cdot 0 + \sum_{i,k} \frac{\partial(\beta(|g^+|)\cdot g_i^+)}{\partial g_k^+}\delta_{ik}\cdot \det g^+\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n(x) =$$
$$= (\det g^+)\sum_i \left(\frac{\partial\beta(|g^+|)}{\partial g_i^+} g_i^+ + \beta(|g^+|)\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n(x) =$$
$$= (\det g^+)\sum_i \left(\frac{\partial\beta(|g^+|)}{\partial|g^+|}\frac{g_i^{+2}}{|g^+|} + \beta(|g^+|)\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n(x) =$$
$$= (\det g^+)\left(\frac{\partial\beta(|g^+|)}{\partial|g^+|}|g^+| + n\beta(|g^+|)\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n(x) =$$
$$= \left((\det g^+)\cdot\alpha(|g^+|)\right)(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

(Letzteres wegen (*).)

Setzt man $r \in R_+$ so an, daß $r > |x|$ für alle $x \in \bar{U}$ gilt, so folgt aus obigem der Hilfssatz.

(c) Für $g \in C^2(\bar{U}, R^n)$ (g sonst wie in (a)) folgt die Behauptung des Satzes mit (b) aus dem Divergenz-Theorem [10]).

(d) Sei nun g wie in (a). Dann hängt der Ausdruck $A_\alpha(g) := \int_U \alpha(|g|)\det g\, dx$ stetig von $g \in C^1(\bar{U}, R^n)$ ab, wenn $C^1(\bar{U}, R^n)$ mit der Topologie der 'gleichmäßigen Konvergenz bis zur ersten Ableitung' versehen wird

(etwa durch $\|h\|_{C^1} := \max\{\|h\|_{u,\bar U}, \|\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\|_{u,\bar U} \,/\, i,j=1,\dots,n\}$ für $h \in C^1(\bar U, \mathbb{R}^n)$).
Da $C^2(\bar U, \mathbb{R}^n)$ dann im $C^1(\bar U, \mathbb{R}^n)$ dicht liegt [11] und da $A_\alpha(g')$ für $g' := f'-p$, $f' \in C^2(\bar U, \mathbb{R}^n)$ (beliebig) verschwindet, kann man sofort auf $A_\alpha(g)=0$ und $\int_U (\varphi - \tilde\varphi)(\|f(x)-p\|)\cdot \det f(x)\,dx = 0$ schließen, was zu zeigen war.

Wegen Satz (2-4) ist nun folgende Definition sinnvoll:

<u>(2-5) Definition:</u>

Seien $U \in \mathcal{J}^n$, $(f,p) \in D_2(U)$ und $\varepsilon := |p, f(\partial U)|$, dann sei definiert:

$$d_U^{(2)}(f,p) := \int_U \varphi(\|f(x)-p\|)\cdot \det f(x)\,dx \quad, \text{ wobei } \varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ mit}$$

$$\operatorname{supp}\varphi \subseteq \,]0,\varepsilon[\quad \text{und} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\|x\|)\,dx = 1 \text{ beliebig gewählt sei.}$$

(Nach Satz (2-4) ist der Wert von $d_U^{(2)}(f,p)$ tatsächlich unabhängig von der speziellen Auswahl des φ.)

<u>(2-5) Satz:</u>

Wählt man U und (f,p) wie in (2-5), so ist $d_U^{(2)}(f,p)$ eine ganze Zahl.

<u>Beweis:</u>

Da $C^2(\bar U, \mathbb{R}^n)$ bzgl. $\|\cdot\|_{C^1}$ dicht in $C^1(\bar U, \mathbb{R}^n)$ liegt [11], gibt es eine Folge $(f_i,p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus $D_1(U) \cap (C^2(\bar U, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n)$ mit $(f_i,p_i) \xrightarrow{u} (f,p)$ und $f_i \xrightarrow[\|\cdot\|_{C^1}]{} f$ (vergl. Lemma (1-7), Beweis zu (a)). Dafür sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $\varepsilon < |p, f(\partial U)|$ und $\varepsilon < |p_i, f_i(\partial U)|$ für alle i, die größer als ein geeignet gewähltes $i_0 \in \mathbb{N}$ sind. Dafür sei $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \,]0,\varepsilon[$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\|x\|)\,dx = 1$. Dann folgt:

$$\int_U \varphi(\|\lim_{\|\cdot\|_{C^1}} f_i(x) - \lim_{|\cdot|} p_i\|) \det \lim_{\|\cdot\|_{C^1}} f_i(x)\,dx = \int_U \varphi(\|\lim_{u}(f_i(x)-p_i)\|) \lim_{|\cdot|} \det f_i(\text{[illegible]}$$

$$= \int_U \lim_{\|\cdot\|_u} \varphi(\|f_i(x)-p_i\|)\cdot \det f_i(x)\,dx = \lim_{|\cdot|} \int_U \varphi(\|f_i(x)-p_i\|)\cdot \det f_i(x)\,dx =$$

$$= \lim_{|\cdot|} d_U^{(2)}(f_i,p_i) = \lim_{|\cdot|} d_U^{(1)}(f_i,p_i) \;.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung, denn jedes $d_U^{(1)}(f_i,p_i)$ ist eine ganze Zahl.

<u>Korollar:</u> $d_U^{(2)}$ ist die stetige Fortsetzung von $d_U^{(1)}$ auf ganz $D_2(U)$.

<u>(2-7) Satz:</u>

Seien $U \in \mathcal{J}^n$, $(h,p) \in D(U)$, $(f_i,p) \in D_2(U)$, $(g_i,p) \in D_2(U)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\lim (f_i,p) = \lim (g_i,p) = (h,p)$, dann existieren die Limites $\lim d_U^{(2)}(f_i,p)$, $\lim d_U^{(2)}(g_i,p)$ und sind gleich.

<u>Beweis:</u>

Seien $\delta := |p, h(\partial U)|$ und $i_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $\|f_i - h\|_{u,\bar U} < \delta/2$ und $\|g_i - h\|_{u,\bar U} < \delta/2$ für alle $i \geq i_0$. Seien nun i,k beliebige natürliche Zahlen größer als i_0.
Für $H: [0,1] \times \bar U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vermöge $H(t,x) := t f_i(x) + (1-t) g_k(x)$ ist dann sicher $(H(t,\cdot),p) \in D_2(U)$ für alle $t \in [0,1]$. Die Abbildung $\hat H: [0,1] \longrightarrow D_2(U)$ vermöge $\hat H(t) := (H(t,\cdot),p)$ ist sicher stetig, so daß $\hat H([0,1])$ in einer Wegkomponente von $D_2(U)$ liegt. Da $d_U^{(2)}$ nach dem letzten Korollar auf $D_2(U)$ stetig ist, schließt man analog zu (1-3), Beweisschritt (Ib) auf $d_U^{(2)}(\hat H(t)) = d_U^{(2)}(\hat H(0)) = d_U^{(2)}(\hat H(1))$ für alle $t \in [0,1]$. Damit folgt $d_U^{(2)}(g_k,p) = d_U^{(2)}(f_i,p)$. Da $i,k \geq i_0$ beliebig waren, folgt daraus, daß $d_U^{(2)}(g_k,p)$ und $d_U^{(2)}(f_i,p)$ für fast alle i und fast alle k dieselbe ganze Zahl ergeben. Das beweist den Satz (2-7).

<u>(2-8) Definition:</u>

Seien $U \in \mathcal{J}^n$, $(f,p) \in D(U)$, dann sei definiert:

$$d_U(f,p) := \lim_{i\in\mathbb{N}} d_U^{(2)}(f_i,p) \quad, \text{ wobei } (f_i,p) \in D_2(U) \text{ für } i \in \mathbb{N} \text{ mit } f_i \xrightarrow[\|\cdot\|_{u,\bar U}]{} f \;.$$

<u>(2-9) Bemerkung:</u>

Nach Satz (2-7) ist $d_U(f,p)$ wohldefiniert. Nach Definition ist d_U stetige Fortsetzung von $d_U^{(2)}$ bzw. $d_U^{(1)}$ (für alle $U \in \mathcal{J}^n$).

<u>(2-1o) Satz:</u>

Die Familie $d := (d_U)_{U \in \mathcal{J}^n}$ ist ein Abbildungsgrad im $\mathbb{R}^n$.

<u>Beweis:</u> Dies folgt sofort aus der Stetigkeit von d_U für alle $U \in \mathcal{J}^n$ und aus (2-1) nach Satz (1-8).

<u>(2-11) Korollar:</u>

Für $U \in \mathcal{J}^n$ und $(f,p) \in D(U)$ gilt:

$$d_U(f,p) = \int_U \varphi(\|g(x)-p\|)\cdot \det g(x)\,dx \quad, \text{ wobei}$$

$g \in C^1(\bar U, \mathbb{R}^n)$ mit $\|g-f\| = \varepsilon' < |p, f(\partial U)|$ und $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \,]0, |p, f(\partial U)| - \varepsilon'[$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\|x\|)\,dx = 1$ zu wählen sind.

§ 3. Einige Eigenschaften des Abbildungsgrades im n-dimensionalen reellen Zahlenraum.

Nach den Ergebnissen der beiden ersten Paragraphen sind Existenz und Eindeutigkeit des Abbildungsgrades im $\mathbb{R}^n$ gesichert. Mit $d=(d_U)_{U\in J^n}$ (Bezeichnungen wie in den ersten Paragraphen) bezeichne ich künftig den Abbildungsgrad im $\mathbb{R}^n$ (bzgl. der in Paragraph 1 vorgegebenen Basis). Es soll nun gezeigt werden, wie sich die speziellen Eigenschaften des Abbildungsgrades im $\mathbb{R}^n$ aus dem bisher Bekannten ableiten lassen. Man vergleiche die straffe Form der Beweise mit entsprechenden Beweisen im Rahmen spezieller kombinatorisch-topologischer Theorien des Abbildungsgrades (s. Alexandroff-Hopf [1], Cronin [5], Krasnosel'ski [12]). Einige der hier aufgeführten Sätze und Ergebnisse findet man bei Berger-Berger [2], Heinz [8], Nagumo [14] bzw. Schwartz [18].

<u>(3-1) Satz:</u>

Seien $U\in J^n$, $f:\partial U\longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $p\in \mathbb{R}^n\setminus f(\partial U)$, dann gelten:

(a) Es gibt eine stetige Fortsetzung $F:\overline{U}\longrightarrow \mathbb{R}^n$ von f.

(b) Für je zwei stetige Fortsetzungen $F,\widetilde{F}:\overline{U}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ von f gilt

$d_U(F,p) = d_U(\widetilde{F},p)$.

<u>Beweis:</u>

Da $\overline{U}$ normal ist, folgt (a) sofort aus dem Fortsetzungssatz von Tietze, indem man die Komponenten von f fortsetzt.

Sei $H:[0,1]\times\overline{U}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ vermöge $H(t,x):=tF(x)+(1-t)\widetilde{F}(x)$ und sei $\gamma:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ vermöge $\gamma(t)=p$ definiert, dann folgt (b) sofort aus (1-1)(i).

<u>(3-2) Bemerkung:</u>

Auf Grund des letzten Satzes kann man den Abbildungsgrad auch für Funktionen definieren, die nur auf dem Rand von U stetig sind.

<u>(3-3) Satz:</u>

Seien $U\in J^n$, $(f,p)\in D(U)$ und $\varepsilon:=|p,f(\partial U)|$, dann gelten:

(a) d_U ist auf $K_\varepsilon(f,p)$ konstant.

(b) d_U ist auf den Wegkomponenten von $D(U)$ konstant.

(c) d_U ist auf den Zusammenhangskomponenten von $D(U)$ konstant.

(d) $d_U(f,p) = d_U(f-q,p-q)$ für jedes $q\in\mathbb{R}^n$.

(e) $d_U(f,p) = d_U(g,p)$ für alle $g\in C(\overline{U},\mathbb{R}^n)$ mit $\|f-g\|_{u,\partial U}<|p,f(\partial U)|$.

(f) $d_U(f,p) = d_U(g,p)$ für alle $g\in C^1(\overline{U},\mathbb{R}^n)$ mit " " " .

(g) $d_U(f,p) = \int_U \varphi(\|g(x)-q\|)\cdot\det g(x)\,dx$ für alle $g\in C^1(\overline{U},\mathbb{R}^n)$, $\varphi\in C(\mathbb{R},$ und $q\in\mathbb{R}^n$ mit $\|f-g\|_{u,\partial U}<\varepsilon$, $q\in\mathbb{R}^n\setminus g(\partial U)$, $|q-p|<\varepsilon-\|f-g\|_{u,\partial U}$, $\operatorname{supp}\varphi\subseteq\,]0,|q,g(\partial U)|[$ und $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(|x|)dx=1$.

(h) $d_U(f,p) = d_U(g,q) = \sum_{x\in g^{-1}(\{q\})}$ sign det $g(x)$, falls g und q wie

in (g) mit $\det g(x)\neq 0$ für alle $x\in g^{-1}(\{q\})$.

<u>Beweis:</u>

(a),(b),(c),(d) gelten nach Bemerkung (1-4).

(e) folgt aus (1-1)(i), wenn man F und γ durch $F(t,x):=tf(x)+(1-t)g(x)$ bzw. $\gamma(t)=p$ definiert.

(f) folgt aus (e).

(g) folgt aus (d),(f) und (2-5),(2-9), denn nach (f) ist

$d_U(f,p) = d_U(g,p)$ und nach (d) ist

$d_U(g,p) = d_U(g-(p-q),p-(p-q))=d_U(g-(p-q),q)$, was nach (f)

$d_U(g,p) = d_U(g,q)$ 12) ergibt. Letzteres ergibt

nach (2-9) und (2-5):

$d_U(f,p)=d_U(g,q) = d^{(2)}_U(g,q) =\int_U \varphi(\|g-q\|)\det g\,dx$, also (g).

(h) folgt aus (g) und (2-9) wegen $d_U(f,p)=d_U(g,q)=d^{(2)}_U(g,q)=d^{(1)}_U(g,q)=$

$=\sum_{x\in g^{-1}(\{q\})}$ sign det $g(x)$.

<u>(3-4) Satz:</u>

Seien $m\in\mathbb{N}$, $U\in J^n$, $V\in J^m$, $(f,p)\in D(U)$ und $(g,q)\in D(V)$, dann gelten:

(a) $U\times V\in J^{n+m}$,

(b) $\left(\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix},\begin{pmatrix} p\\ q\end{pmatrix}\right)\in D(U\times V)$,

(c) $d_{U\times V}\left(\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix},\begin{pmatrix} p\\ q\end{pmatrix}\right) = d_U(f,p)\cdot d_V(g,q)$

<u>Beweis:</u>

(a) ist trivial.

(b) gilt, denn $\partial(U\times V) = \overline{U\times V}\setminus U\times V = \overline{U}\times\overline{V}\setminus U\times V = \partial U\times\overline{V}\cup\overline{U}\times\partial V$ und demnach

$$\begin{pmatrix} p\\ q\end{pmatrix}\notin\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}(\partial(U\times V))= f(\partial U)\times g(\overline{V})\cup f(\overline{U})\times g(\partial V)$$ gelten.

(c) Wegen der Stetigkeit des Abbildungsgrades darf man annehmen $(f\times g,(p,q))\in D_1(U\times V)$ gilt mit $(f,p)\in D_1(U)$ und $(g,q)\in D_1(V)$. (Denn es ist $(x,y)\in(f\times g)^{-1}(\{(p,q)\})$ gleichbedeutend mit $(x\in f^{-1}(\{p\})$ und $y\in g^{-1}(\{q\}))$, so daß aus $\det f\times g(x,y)\neq 0$ wegen $\det f\times g(x,y)=\begin{vmatrix} J_f(x) & 0\\ 0 & J_g(y)\end{vmatrix}=$

$=\det f(x)\cdot\det g(y)$ stets folgt $\det f(x)\neq 0$ und $\det g(y)\neq 0$.)

Nun ist

$$d_{U\times V}(f\times g,(p,q))=\sum_{\substack{x\in f^{-1}(\{p\})\\ y\in g^{-1}(\{q\})}}\text{sign det } f\times g(x,y)=\sum_{\vdots}\text{sign det } f(x)\,\text{sign det } g(y)=$$

$$=\sum_{x\in f^{-1}(\{p\})}\text{sign det } f(x)\cdot\sum_{y\in g^{-1}(\{q\})}\text{sign det } g(y) = d_U(f,p)\cdot d_V(g,q).$$

(3-5) Satz:

Seien

$U, V \in J^n$,
$f \in C(\bar{U}, R^n)$,
$f(\bar{U}) \subseteq V$,
$\hat{V}$ die Menge der Zusammenhangskomponenten von $V \setminus f(\partial U)$,
$p_\varkappa \in \varkappa \cap (R^n \setminus f(\partial U))$ für alle $\varkappa \in \hat{V}$,
$(g,q) \in D(V)$ mit $q \in R^n \setminus g\circ f(\partial U)$.

Gilt dann für alle $\varkappa \in \hat{V}$

(Z) $(f, p_\varkappa) \in D_1(U)$, $(g,q) \in D_1(V)$ und $(g\circ f, q) \in D_1(U)$,

so folgt:

$$d_U(g\circ f, q) = \sum_{\varkappa \in \hat{V}} d_U(f, p_\varkappa)\cdot d_\varkappa(g,q) .$$

Beweis:

Wegen (Z) gilt:

$$d_U(g\circ f, q) = \sum_{x \in (g\circ f)^{-1}(\{q\})} \text{sign det}\,(g\circ f)(x) = \sum_{\dots} \text{sign det}\, f(x)\, \text{sign det}\, g(f(x)) =$$

$$= \sum_{\substack{(x,y) \text{ mit} \\ f(x)=y,\, g(y)=q}} \text{sign det}\, f(x)\cdot \text{sign det}\, g(y) =$$

$$= \sum_{y \in g^{-1}(\{q\}) \cap (R^n \setminus f(\partial U))} d_U(f,y)\cdot \text{sign det}\, g(y)$$

Nach (3-3) ist $d_U(f,\cdot)$ auf jeder Komponente von $R^n \setminus f(\partial U)$ konstant. Da $f(\partial U)$ kompakt (also beschränkt) ist, hat $R^n \setminus f(\partial U)$ genau eine unbeschränkte Komponente $\varkappa_0$ (, diese ist eindeutig bestimmt, weil sie das Äußere jeder Kugel um $f(\partial U)$ enthalten muß). Da $\varkappa_0$ Punkte enthält, die nicht in $f(\bar{U})$ liegen, muß $d_U(f,y)=0$ sein für alle $y \in \varkappa_0$, also speziell auch für alle $y \in \varkappa_1 := V \cap \varkappa_0 \in \hat{V}$. Daraus und aus (1-3)(3) folgt:

$$d_U(g\circ f, q) = \sum_{y \in g^{-1}(\{q\})} d_U(f,y)\cdot \text{sign det}\, g(y) =$$

$$= \sum_{\varkappa \in \hat{V}} d_U(f, p_\varkappa)\cdot \sum_{y \in \varkappa \cap g^{-1}(\{q\})} \text{sign det}\, g(y) =$$

$$= \sum_{\varkappa \in \hat{V}} d_U(f, p_\varkappa)\cdot d_\varkappa(g,q) \quad (q \notin g(\partial\varkappa), \text{ weil } \partial\varkappa = \bar{\varkappa} \setminus \varkappa \subseteq f(\partial U)$$

Damit ist (3-5) bewiesen.

(3-6) Bemerkung:

Der letzte Satz gilt auch ohne die Zusatzvoraussetzung (Z). Dies kann man mit Hilfe entsprechender Approximationen beweisen (vergl. Heinz [8], S.244, Theorem 7 oder Nagumo [14], S.495, Theorem 6). Eleganter läßt sich das mit den Methoden von § 5 beweisen, wie ich ~~dort~~ zeigen werde (s.(6-4)).

Für den Beweis von (4-2) benötigt man noch folgenden Satz:

(3-7) Satz:

Seien $U \in J^n$, $(f,p) \in D(U)$, $x \in R^n$ und $\beta \in R_+$, dann gilt:

$$d_U(f,p) = d_{\frac{1}{\beta}\cdot U - x}(f(\beta(\cdot)+x), p) \quad , \text{wobei } \beta(\cdot): R^n \longrightarrow R^n$$

vermöge $\beta(y) := \beta\cdot y$ definiert sei.

Beweis:

Sei $B: D(U) \longrightarrow D(V)$ $(V := \frac{1}{\beta}U - x)$ durch $B(f,p) := (f(\beta(\cdot)+x), p)$ definiert ($p \in f(\partial U)$ genau dann, wenn $p \in f(\beta(\partial V)+x) = f(\beta(\frac{1}{\beta}\partial U - x + x)) = f(\partial U)$), dann gelten:

(a) B ist surjektiv , $B|_{D_1(U), D_1(V)}: D_1(U) \longrightarrow D_1(V)$ ist surjektiv,

(b) B ist eine Isometrie,

(c) $d' = (d'_W)_{W \in J^n}$ vermöge $d'_W := d_W$ für $W \neq V$ und $d'_V := d_U \circ B^{-1}$ ist ein Abbildungsgrad im R^n.

(Wegen (1-10) folgt aus (c): $d'_V(B(f,p)) = d_V(B(f,p))$, also (3-7).)

Zu (a):

Sei $(g,q) \in D(V)$ beliebig. Für $(f,p) := (g(\frac{1}{\beta}(\cdot)-x), q)$ gelten offenbar $(f,p) \in D(U)$ und $B(f,p) = (g(\frac{1}{\beta}(\beta(\cdot)+\beta x)-x), q) = (g,q)$, also ist B surjektiv. Ist $(g,q) \in D_1(V)$ und ist (f,p) wie zuvor definiert, so gelten offenbar: $(f,p) \in D_2(U)$, $x' \in f^{-1}(\{p\})$ äquivalent $y \in g^{-1}(\{q\})$ $(y := \frac{1}{\beta}x' - x)$ und $\det f(z) = \det g(\frac{1}{\beta}z - x) \neq 0$ für alle $z \in f^{-1}(\{p\})$, also $(f,p) \in D_1(U)$.

Zu (b):

Seien $(f,p), (f',p') \in D(U)$ beliebig, dann gilt:

$$\mu((f,p),(f',p')) = \| f - f' \|_{u,\bar{U}} + |p-p'| = \| (f-f')(\beta(\cdot)+x) \|_{u,\bar{V}} + |p-p'| =$$

$$= \mu(B(f,p), B(f',p')).$$

Zu (c):

Wegen (a) und (b) ist B bijektiv, also existiert B^{-1} als Mengenabbildung. Wegen (b) ist B^{-1} , also auch $d_U \circ B^{-1}$, stetig. d' erfüllt also (I) von (1-8). Nach dem Beweis von (a) folgt für $(g,q) \in D_1(V)$:

$$d'_V(g,q) = d_U(g(\tfrac{(\cdot)}{\beta} - x), q) = \sum_{\substack{y \in U \text{ mit} \\ g((1/\beta)y)-x)=q}} \text{sign det}\, g((1/\beta y)-x) = \sum_{\substack{z \in 1/\beta U - x \\ \text{mit } g(z)=q}} \text{sign det}\, g(z) =$$

$$= d_V(g,q) .$$

Folglich erfüllt d' die Bedingung (1-8)(II).

<u>Bemerkung:</u>
Die Sätze dieses Paragraphen kann man nun ausnutzen, um elegante Beweise für die bekannten Sätze von Poincaré-Bohl, Borsuk, Brouwer, Jordan-Brouwer, Schauder etc. abzuleiten. Man braucht dazu nur die in [2],[8],[16],[9] oder [1] geführten Beweise zu übertragen, was durchweg keine Schwierigkeiten macht, weil dort nur Eigenschaften des Abbildungsgrades benutzt werden, die man in den ersten drei Paragraphen und in § 6 (Produktsatz) findet. Ich möchte darauf hier auch nicht näher eingehen.

§ 4. Zusammenhang des Abbildungsgrades im 2-dimensionalen reellen Zahlenraum mit der Windungszahl.

In diesem Paragraphen soll mit elementaren Mitteln der Zusammenhang zwischen Abbildungsgrad im R^2 und (funktionentheoretischer) Windungszahl untersucht werden. Die Ergebnisse sind im wesentlichen bekannt (vergl. Rado-Reichelderfer [15], Kap. VI, § 1, Alexandroff-Hopf [1], Kap. XII, § 1.7, Bemerkung sowie Krasnosel'skii-Perow-Powolozki-Sabrejko: "Vektorfelder in der Ebene", Berlin, 1966). In den genannten Büchern werden allerdings stets spezielle Abbildungsgrad-Konstruktionen benutzt, während hier gezeigt werden soll, wie sich der Zusammenhang aus Satz (1-5) herleiten läßt.
Es sei noch vermerkt, daß man ebenfalls mit (1-8) für spezielle $d_{U}|_{D_2(U)}$ Darstellungen als Kronecker-Integral (vergl. [1], XII, § 1.7 und [7], III, Abschnitt 28) bei bel. $n \in N$ bzw. als Gauß-Integral (vergl. [1], XII, Anhang) bei $n=3$ herleiten kann. 13)
Mit C werde in diesem Paragraphen die komplexe Zahlenebene mit ihrer natürlichen Topologie (euklidischer Abstand) bezeichnet, sonst sind die Bezeichnungen wie in den früheren Paragraphen gewählt.
Man denke sich R^2 und C mittels der linearen Isometrie $\varphi: R^2 \to C$ ($\varphi(x,y) := x+iy$) identifiziert, wobei R^2 wieder auf die vorgegebene geordnete Basis (e_1, e_2) und C auf die geordnete R-Basis $((1,0),(0,i))$ bezogen sind. Ist $\gamma: [a,b] \to R^2$ ein (stetiger) Weg, so bezeichnen γ^+ bzw. $\gamma^- = -\gamma^+ = -(-\gamma^-)$ die zugehörigen orientierten Kurven im Sinne wachsend bzw. fallend durchlaufener Parameterwerte. Sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ parametrisierte Wege im R^2, so bezeichnet $\bigvee_{i=1,\ldots,m} \alpha_i \gamma_i^+$ die aus diesen Wegen mit Vielfachheiten $\alpha_i \in Z$ gewonnenen orientierten Ketten (vergl. E. Peschl: "Funktionentheorie", Bd. I, Mannheim, 1968, S. 66). Zwei solche Ketten k und k' heißen äquivalent ($k \sim k'$), wenn es Zerlegungen $Z_1(k)$ und $Z_2(k')$ mit $Z_1(k) = Z_2(k')$ gibt.
Im folgenden werden noch einige elementare Tatsachen aus der Funktionentheorie einer Veränderlichen aufgezählt, deren Beweis man in dem schon zitierten Buch von E. Peschl. bzw. in H. Cartan: "Elementare Theorie der analytischen Funktionen...", Mannheim, 1966 findet:

(A) Seien $U \subseteq R^2$ offen, $P, Q: U \to C$ partiell stetig differenzierbare Abbildungen und $\omega := Pdx + Qdy$. Die Differentialform ω ist dann und nur dann geschlossen, wenn $P_y = Q_x$ ist (auf U). (Cartan, S. 58)
Speziell ist die Differentialform $\omega := \frac{dz}{z}$ auf $C \setminus \{0\}$ geschlossen, denn für
$$P := \frac{x-iy}{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad Q := \frac{ix+y}{x^2+y^2} \qquad ((x,y) \in R^2 \setminus \{0\})$$

erhält man

$$P_y = \frac{-i(x^2+y^2)-(x-iy)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{i(x^2+y^2)-(ix+y)2x}{(x^2+y^2)^2} = Q_x$$

und $\frac{dz}{z} = Pdx+Qdy$.

(B) Ist γ ein parametrisierter (stetiger) Weg in $\mathbb{C}$, so sei

$$\int_{\gamma^+} \omega$$

als Integral der geschlossenen Differentialform ω längs γ^+, wobei ω in einer Umgebung von γ^+ geschlossen vorausgesetzt ist, wie in Cartan (loc.cit.) definiert.

(C) Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und ist ω auf U eine geschlossene Differentialform, so hat ω auf U eine Stammfunktion. (Cartan, S.63)

(D) Ist $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{p\}$ offen, so ist $\omega := \frac{dz}{z-p}$ auf U geschlossen, und für jeden orientierten geschlossenen Weg γ^+ in U ist $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} \frac{dz}{z-p}$ eine ganze Zahl. (Cartan, S.60) Diese Zahl ist invariant gegenüber orientierungstreuen Parameterwechseln von γ und heißt Windungszahl

$$w(\gamma, p) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} \frac{dz}{z-p}$$

von γ um p.

(E) Sind γ^+ und $\tilde{\gamma}^+$ in $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ homotope geschlossene Wege, so ist

$$w(\gamma, p) = w(\tilde{\gamma}, p) . \qquad \text{(Cartan, S.64)}$$

(F) Ist γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C} \setminus \{p,q\}$ und gibt es einen Weg in $\mathbb{C}$ von p nach q, der Bild(γ) nicht schneidet, so ist

$$w(\gamma, p) = w(\gamma, q). \qquad \text{(Cartan, S.64)}$$

(G) Ist γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und liegt p in der unbeschränkten Komponente des Komplements von Bild(γ), so ist

$$w(\gamma, p) = 0 \quad . \qquad \text{(Behnke, S.96)}$$

(H) Ist γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und liegt p im Komplement seines Bildes, so gilt

$$w(\gamma, p) = -w(\gamma^-, p). \qquad \text{(Peschl, S.96)}$$

(I) Beschreibt γ^+ in $\mathbb{C}$ einen Kreis derart, daß sich die äußere Flächennormale bzw. die Tangente durch einen affinen Automorphismus in e_1 bzw. e_2 überführen lassen, der positive Determinante hat, und ist p ein Punkt im Innern dieses Kreises, so ist

$$w(\gamma, p) = 1 \quad . \qquad \text{(Peschl, S.65)}$$

Man vergleiche (D) bis (I) mit (1-1), dann bemerkt man das Fehlen eines Analogons zu (1-1)(iii). Es wird sich zeigen, daß das daran liegt, daß die Windungszahl mit einem d_U zusammenhängt, wobei $U \in J^2$ der Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ ist.

Sei nun $\varkappa : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ vermöge $\varkappa(t) := (\cos 2\pi t)e_1 + (\sin 2\pi t)e_2$ definiert und sei $\bar{\varkappa}$ die stetige Fortsetzung von $\varkappa$ auf $[0,1]$. Es ist offenbar $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ genau dann ein geschlossener Weg, wenn $\gamma \circ \varkappa^{-1} : S^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Weg ist. Sei nun γ so ein geschlossener Weg, dann gibt es nach dem Fortsetzungssatz von Tietze eine stetige Fortsetzung $g : E^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ von $\gamma \circ \varkappa^{-1}$. Für $p \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$ ist $d_{E^2}(g,p)$ definiert und konstant für alle solche Fortsetzungen g von $\gamma \circ \varkappa^{-1}$ (s. (3-1)). (E^2 bzw. S^1 bezeichnen Einheitskreisscheibe bzw. -sphäre.)

__(4-1) Satz:__

Seien $\hat{D}(E^2) := \{ (\gamma, p) \,/\, \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ geschlossener Weg, $p \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])\}$ und $G : D(E^2) \longrightarrow \hat{D}(E^2)$ vermöge $G(f,p) := (f \circ \hat{\varkappa}, p) = (\varphi \circ f \circ \hat{\varkappa}, \varphi(p))$ definiert, dann gelten:

(a) $w \circ G : D(E^2) \longrightarrow \mathbb{Z}$ ist stetig.

(b) G ist surjektiv .

(c) Für $(f,p),(g,q) \in D(E^2)$ gilt $G(f,p) = G(g,q)$ genau dann, wenn $p=q$ und $f|_{S^1} = g|_{S^1}$ gelten.

(d) Das folgende Diagramm in der Kategorie aller Mengen ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd} D(E^2) \arrow[r, "G"] \arrow[dr, "d_{E^2}"'] & \hat{D}(E^2) \arrow[d, "w"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

__Bemerkung:__

Die Aussage (d) besagt, daß für jede stetige Abbildung $f : \overline{E^2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ und jedes $p \in \mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ der Abbildungsgrad $d_{E^2}(f,p)$ nichts anderes ist als die Windungszahl von $f|_{S^1}$ bzgl. p.

__Beweis:__

(a) folgt sofort aus (E) und (F), denn danach ist $w \circ G$ lokal-konstant, also nach (IIa) von (1-3) stetig.

(b) und (c) sind trivial. (s. die Bemerkung vor dem Satz)

(d) Nach dem Beweis von (1-8) reicht es aus, für $w \circ G$ die Bedingungen (I) und (II) von (1-8) bzgl. E^2 nachzuweisen. Dabei gilt (I) nach (a), so daß nur noch (II) gezeigt werden muß: [4)]

Sei $(f,p) \in D_1(E^2)$, dann wird behauptet, daß

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{f \circ \hat{\varkappa}^+} \frac{dz}{z-p} = \sum_{x \in f^{-1}(\{p\})} \operatorname{sign} \det f(x) \qquad \text{ist.}$$

Diese Gleichung soll nun bewiesen werden:

Sei $\{z_1,\dots,z_m\} := f^{-1}(\{p\})$ und sei $z_0 \subset E^2$ so gewählt, daß jeder von z_0 zur Peripherie von E^2 gehende Strahl höchstens ein Element von $f^{-1}(\{p\})$ trifft. Dann sei $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+$ so klein gewählt, daß für jedes $i=1,\dots,m$ $f|_{E_{\varepsilon'}(z_i)}$ ein Diffeomorphismus mit nicht verschwindender Determinante ist, daß $\overline{E_{\varepsilon'}(z_i)} \subseteq E^2$ gilt und daß die $\overline{E_{\varepsilon'}(z_i)}$ paarweise disjunkt sind. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $\varepsilon < \varepsilon'$ und jedes $i=1,\dots,m$ seien $\hat{\varkappa}_i : [0,1] \longrightarrow S_\varepsilon(z_i)$ einfach geschlossene Wege, die so parametrisiert sind, daß $\hat{\varkappa}_i^+$ die Eigenschaft von γ^+ in (I) hat, und daß $\hat{\varkappa}_i(0) = \hat{\varkappa}_i(1) = z_i + \varepsilon\frac{z_i - z_0}{|z_i - z_0|}$ für alle $i=1,\dots,m$ gelten (s.Abbildung 2). Seien $\tilde{z}_i$ die Schnittpunkte der Verbindungsstrahlen von z_0 nach z_i mit S^1. ($z_0 \notin f^{-1}(\{p\})$ darf o.B.d.A. angenommen werden, hat $f^{-1}(\{p\})$ mindestens zwei Elemente, so gilt das ohnehin.) Seien weiter $\gamma_i : [0,1] \longrightarrow \overline{E^2}$ solche Parametrisierungen der Verbindungsstrecken von $\tilde{z}_i$ nach $(z_i + \varepsilon\frac{z_i - z_0}{|z_i - z_0|})$, daß $\gamma_i(0) = \tilde{z}_i$ und $\dot{\gamma}_i(t) = \dot{\gamma}_i(s)$ für alle $t,s \in [0,1]$. Es gilt dann offenbar

$$\hat{\varkappa}^+ \sim \gamma := \hat{\varkappa}^+ \vee \Big(\bigvee_{i=1,\dots,m} (\gamma_i^+ \vee \hat{\varkappa}_i^- \vee \gamma_i^-)\Big) \vee \bigvee_{i=1,\dots,m} \hat{\varkappa}_i^+$$

(äquivalent als Ketten).(s.Abb. 2)

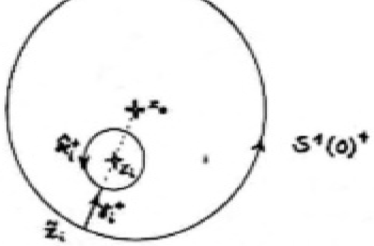

Abbildung 2

Sei nun $\delta := |p, f(\overline{G_1})|$, wobei G_1 das von γ eingeschlossene einfach zusammenhängende Gebiet sei (s.Abb. 3). Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf $\overline{G_1}$ kann man $\overline{G_1}$ von einem Raster aus Quadraten überdecken, wobei die Ränder von deren Durchschnitt mit $\overline{G_1}$ so orientiert sind, daß Tangente und äußere Flächennormale wie in (I) sind, und wobei die Schwankung von f auf den Quadraten mit nichtleerem Durchschnitt mit $\overline{G_1}$ kleiner als δ ist. Wegen dieser letzten Eigenschaft und wegen (J) verschwindet das Integral von $\frac{dz}{z-p}$ auf jedem der Schnitte dieser Quadrate mit $\overline{G_1}$. Nach Wahl der Orientierungen und wegen der Additivität des Wegintegrals (Peschl, S.92) folgt:

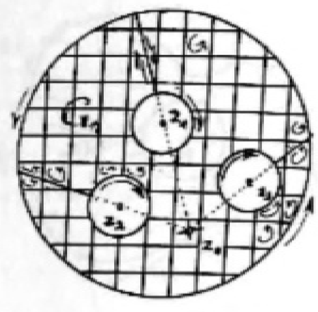

Abbildung 3

$$\int_{f\circ\hat{\varkappa}} \frac{dz}{z-p} = \int_{f\circ\gamma} \frac{dz}{z-p} = \int_{f\circ\partial G_1^+} \frac{dz}{z-p} + \int_{f\circ\bigvee_{i=1,\dots,m}\hat{\varkappa}_i^+} \frac{dz}{z-p} = 0 + \sum_{i=1,\dots,m} \int_{f\circ\hat{\varkappa}_i^+}$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß

$$\int_{f\circ\hat{\varkappa}_i^+} \frac{dz}{z-p} = \operatorname{sign} \det f(z_i) \text{ für alle } i=1,\dots,m$$

gilt. Für beliebiges $i \in \{1,\dots,m\}$ soll das nun gezeigt werden:

Sei nun β ein parametrisierter Kreis vom Radius $\delta' \in \mathbb{R}_+$ um p, der ganz im Innern von $f\circ\hat{\varkappa}_i$ liegt und für den β^+ wieder die Orientierungseigenschaft von γ^+ in (I) hat. Als Anfangs- und Endpunkt möge β den Punkt $p+\binom{\delta'}{0}$ haben. Der Strahl von p durch $p-\binom{\delta'}{0}$ schneidet $f\circ\hat{\varkappa}_i$ zuerst in einem Punkt p_1. Sei β_0 die von p_1 nach $p+\binom{\delta'}{0}$ verlaufende orientierte Verbindungsstrecke, dann sind als Ketten äquivalent:

$$f\circ\hat{\varkappa}_i^+ \sim f\circ\hat{\varkappa}_i^+ \vee \beta_0^+ \vee \beta_0^- \vee \beta^+ \vee \beta^-$$

Ist sign det $f(z_i)$ größer bzw. kleiner als null, so sind $\theta := f\circ\hat{\varkappa}_i^+ \vee \beta_0^+ \vee \beta_0^- \vee \beta^-$ bzw. $\theta' := f\circ\hat{\varkappa}_i^+ \vee \beta_0^+ \vee \beta_0^- \vee \beta^+$ geschlossene Wege in $\mathbb{R}^2 \setminus E_{\delta'}(p)$. In beiden Fällen ist der entsprechende geschlossene Weg homotop in $\mathbb{R}^2 \setminus E_{\delta'}(p)$ zu einem geschlossenen Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus (E_{\delta'}(p) \cup \{p+\binom{\delta'}{0} + (p_1 - p - \binom{\delta'}{0})\cdot t \ / \ t \in \mathbb{R}_+\}) =: V$. V ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet (eine gelochte und aufgeschnittene Ebene), so daß nach (J) und (Δ) folgt:

$$\int_\theta \frac{dz}{z-p} = 0 \quad (\text{falls } \operatorname{sign}\det f(z_i) > 0) \text{ und}$$

$$\int_{\theta'} \frac{dz}{z-p} = 0 \quad (\text{falls } \operatorname{sign}\det f(z_i) < 0)\ .$$

Wegen $\theta \vee \beta^+ = \theta' \vee \beta^- \sim f\circ\hat{\varkappa}_i^+$ und wegen $\beta^- = -\beta^+$ folgt also mit (I)

$$\int_{f\circ\hat{\varkappa}_i^+} \frac{dz}{z-p} = \int_{\theta\vee\beta^+} \dots = \int_{\beta^+} \frac{dz}{z-p} = +1 = \operatorname{sign}\det f(z_i)$$

(falls die letzte Gleichheit gilt)

$$\int_{f\circ\hat{\varkappa}_i^+} \frac{dz}{z-p} = \int_{\theta'\vee\beta^-} \dots = -\int_{\beta^+} \frac{dz}{z-p} = -1 = \operatorname{sign}\det f(z_i) \ (*)$$

Das war nur noch zu zeigen.

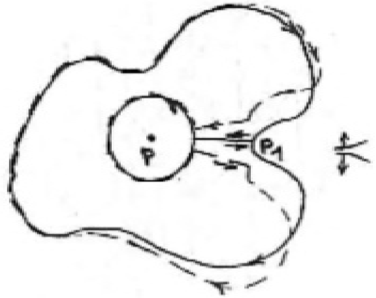

Abbildung 4

(4-2) Korollar:

Sei $U \in J^2$ und sei $(f,p) \in D(U)$ mit folgender Eigenschaft:

(S) U enthält endlich viele offene und sternförmige Mengen $s_1,\dots,s_m$, die paarweise disjunkt sind und deren Vereinigung $f^{-1}(\{p\})$ überdeckt.

Es gibt dann (endlich viele) stetige Abbildungen $f_1,\dots,f_m:\overline{E^2} \longrightarrow R^2$

mit

$$d_J(f,p) = \sum_{i=1,\dots,m} \int_{f_i \circ \hat{\partial E}} \frac{dz}{z-p} = \sum_i w(\partial(f_i,p)) .$$

Beweis:

Seien s_i sternförmig bzgl. $x_i \in s_i$ $(i=1,\dots,m)$ und $E_r(O)$ eine offene Kreisscheibe um O mit Radius $r \in R_+$ und $E_r(O) \supseteq U$.

Für $x \in \overline{E_r(O)}$ seien definiert:

$$\tilde{f}_i(x) := \begin{cases} f(x) \text{ , falls } x \in \overline{s_i} \\ f(y) \text{ , falls } y \in \partial s_i \text{ und } x \in \{x_i - t(y-x_i) / t \in R_+\} \setminus \overline{s_i} \end{cases}$$

$(i=1,\dots,m)$

Dann sind die $\tilde{f}_i : \overline{E_r(O)} \longrightarrow R^2$ offenbar wohldefiniert und stetig.

Außerdem gilt für jedes $i=1,\dots,m$: $p \notin \tilde{f}_i(\partial E_r(O)) \cup \tilde{f}_i(E_r(O) \setminus s_i) \subseteq f(\partial s_i)$.

Wegen (4-3)(j) und (4) folgt daraus:

$$d_J(f,p) = \sum_{i=1,\dots,m} d_{E_r(O)}(\tilde{f}_i,p) .$$

Wegen (3-7) folgt:

$$d_J(f,p) = \sum_{i=1,\dots,m} d_{E^2}(\tilde{f}_i(r\cdot(\cdot)),p) .$$

Setzt man $f_i := \tilde{f}_i(r\cdot(\cdot))$ $(i=1,\dots,m)$, so folgt aus (4-1)(d) die behauptete Gleichung.

Bemerkung:

Ist $U = E_r(O)$, so kann man $s_1 := U$ setzen und $f_1 := f(r\cdot(\cdot))$.

(4-3) Bemerkung:

Im letzten Paragraphen werde ich zeigen, daß (4-2) auch ohne die Bedingung (S) gilt. Dort wird allerdings nur noch die Existenz der Funktionen f_i gezeigt, sie werden nicht mehr konkret berechnet. (s. (6-5)) Für n=2 kann man also jedes d_U $(U \in J^2)$ durch w ausdrücken.[15]

§ 5 . Eine topologische Konstruktion für den Abbildungsgrad im n-dimensionalen reellen Zahlenraum .

In diesem Paragraphen wird eine topologische Konstruktion für den Abbildungsgrad im R^n angegeben, die auf eine Idee von Bers [3] zurückgeht. Im Gegensatz zu [3] werde ich aber ohne simpliziale und kombinatorische Hilfsmittel auskommen.
Die Bezeichnungen der vorigen Paragraphen werden beibehalten. Weiter bezeichne $\mathcal{K}=(H_q,\partial_q,*_q)_{q\in Z}$ eine Homologie-Theorie über Z für die Kategorie aller Paare topologischer Räume PTOP, die den Eilenberg-Steenrod-Axiomen genügt (s.[6],[10]). Nach [6] und [10] ist $\mathcal{K}$ auf der Kategorie aller Paare von triangulierbaren Räumen eindeutig bestimmt. Speziell ist $H_n(S^n)=H_n(S^n,\emptyset)$ zu Z isomorph. (Für die Einzelheiten aus der Homologie-Theorie s.[10],[6] oder [17], für die Bezeichnungen aus der Kategorien-Theorie s.[16].)
Ist e ein Erzeuger von $H_n(S^n)$ und ist $f:S^n\longrightarrow S^n$ stetig, so hat $f_{*n}:H_n(S^n)\longrightarrow H_n(S^n)$ die Form $f_{*n}(q\cdot e)=i_f\cdot q\cdot e$ für alle $q\in Z$ und ein von f, aber nicht von e abhängiges festes $i_f\in Z$. Man definiert (s.z.B. [10],II,8, wo auch die unten aufgezählten Tatsachen bewiesen sind):

(5-1) Definition:
Sei $f:S^n\longrightarrow S^n$ stetig und sei i_f wie oben bestimmt, dann heißt i_f (topologischer) Index von f.

(5-2) Bemerkung:
Aus dem Homotopie-Axiom für Homologie-Theorien folgt sofort, daß zwei homotope Sphärenabbildungen denselben Index haben und nicht surjektive Sphärenabbildungen den Index null (sie sind nämlich zu konstanten Abbildungen homotop). Außerdem ist $i_{id_{S^n}}=1$. Da $(H_q,*_q)$ für jedes q einen kovarianten Funktor von PTOP in die Kategorie aller abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen gibt, gilt für je zwei Selbstabbildungen f,g der S^n : $i_{f\circ g}=i_f\cdot i_g$.

(5-3) Lemma:
Seien V eine offene Teilmenge der S^n, $f:\overline{V}\longrightarrow S^n$ stetig und $p\in S^n\setminus f(\partial V)$, dann gibt es eine stetige Fortsetzung $F:S^n\longrightarrow S^n$ von f mit $p\in S^n\setminus F(S^n\setminus V)$. [16)]

Beweis: Sei $\overline{V}\neq S^n$, sonst ist die Behauptung trivial.
Da ∂V kompakt ist, ist es auch $f(\partial V)$, und p ist innerer Punkt der offenen Menge $S^n\setminus f(\partial V)$. Sei $k:(S^n\setminus\{p\})\longrightarrow H$ die stereographische Projektion von p aus auf die in (-p) an die S^n tangentiale Hyperebene des R^{n+1}. Dann ist k ein Homöomorphismus,

und $k\circ f(\partial V)$ ist eine beschränkte Teilmenge von H, die homöomorphes Bild von $f(\partial V)$ unter k ist. Nach dem Satz von Tietze kann man $k\circ f|_{\partial V}$ stetig und beschränkt zu $K:(S^n\setminus V)\longrightarrow H$ fortsetzen (∂V liegt in $S^n\setminus V$ und $\overline{V}\neq S^n$, nach Annahme). Nun kann man

$$F:S^n\longrightarrow S^n \quad \text{durch} \quad F(x):=\begin{cases} f(x) \text{ , falls } x\in\overline{V} \\ k^{-1}\circ K(x)\text{, falls } x\in S^n\setminus\overline{V} \end{cases}$$

definieren. Auf $\overline{V}\cap\overline{(S^n\setminus\overline{V})}=\partial V$ stimmen $k^{-1}\circ K$ und f überein, so daß F stetig ist und f fortsetzt. Außerdem gilt natürlich $p\notin k^{-1}(H)$, so daß $p\in S^n\setminus F(S^n\setminus V)$ ist.

(5-4) Lemma:
Seien V eine offene Teilmenge der S^n, $f:\overline{V}\longrightarrow S^n$ stetig, $F_1,F_2:S^n\longrightarrow S^n$ stetige Fortsetzungen von f und $p\in\left(S^n\setminus F_1(S^n\setminus V)\right)\cap\left(S^n\setminus F_2(S^n\setminus V)\right)$, dann gilt

$$i_{F_1}=i_{F_2} \quad .$$

Beweis:
Der Fall $\overline{V}=S^n$ ist wieder trivial, so daß $S^n\setminus\overline{V}\neq\emptyset$ angenommen werden darf.
Sei wieder $k:(S^n\setminus\{p\})\longrightarrow H$ die stereographische Projektion (wie im Beweis zu (5-4)). Dann sind $k\circ F_1|_{S^n\setminus V}$ und $k\circ F_2|_{S^n\setminus V}$ auf $S^n\setminus V$ vermöge $F:[0,1]\times(S^n\setminus V)\longrightarrow H$ $(F(t,x):=tk\circ F_1(x)+(1-t)k\circ F_2(x))$ homotop.
Dann ist $k^{-1}\circ F$ eine Homotopie von $F_1|_{S^n\setminus V}$ und $F_2|_{S^n\setminus V}$, wobei für jedes $x\in\partial V=\overline{V}\cap(S^n\setminus V)$ gilt: $k^{-1}\circ F(t,x)=f(x)$ für alle $t\in[0,1]$.
$\tilde{F}:[0,1]\times S^n\longrightarrow S^n$ vermöge $\tilde{F}(t,x):=f(x)$, falls $x\in V$, und $\tilde{F}(t,x):=k^{-1}\circ F(t,x)$, falls $x\in S^n\setminus V$, ist dann eine Homotopie von F_1 und F_2 , so daß nach (5-2) folgt: $i_{F_1}=i_{F_2}$.

(5-5) Definition:
Mit $\hat{R}^n$ werde die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von R^n bezeichnet. Bezüglich der in §1 vorgegebenen geordneten Basis $(e_1,\dots,e_n)$ sei dann

$$h:S^n\longrightarrow\hat{R}^n \quad \text{vermöge} \quad h\Big(\sum_{i=0,\dots,n}\beta_i e_i'\Big):=\begin{cases}\infty \text{ , falls } \beta_0=1 \\ \displaystyle\sum_{i=1,\dots,n}\frac{\beta_i}{1-\beta_0}e_i \text{ , sonst}\end{cases}$$

die spezielle stereographische Projektion, wobei $(e_0',\dots,e_n')$ eine fest im R^{n+1} gewählte geordnete Basis und $\beta_i\in R$ $(i=0,\dots,n)$ sind.

Bemerkung: Die Angabe von h dient nur einer kürzeren Formulierung des folgenden, im Prinzip kann man h durch einen beliebigen Homöomorphismus von S^n auf $\hat{R}^n$ ersetzen. Jedenfalls ist h ein solcher Homöomorphismus (s.Hu [10],IV,5).
Nach den letzten beiden Lemmata ist nun folgende Definition sinnvoll:

<u>(5-6) Definition:</u>

(a) Seien $U \in J^n$, $(f,p) \in D(U)$ und $F: S^n \longrightarrow S^n$ eine Abbildung, dann heißt F "für (f,p) zulässig", wenn F stetige Fortsetzung von $h^{-1} \circ f \circ h|_{h^{-1}(\bar{U})}$ ist mit $h^{-1}(p) \in S^n \setminus F(S^n \setminus h^{-1}(U))$.

(b) Ist $U \in J^n$ und ist $F: S^n \longrightarrow S^n$ eine für $(f,p) \in D(U)$ zulässige Abbildung, dann heißt

$$i_U(f,p) := i_F$$

topologischer Index (kurz: Index) von (f,p).

<u>Bemerkung:</u> Nach Lemma (5-4) ist $i_U(f,p)$ wohldefiniert.

<u>(5-7) Satz:</u>

Für jedes $U \in J^n$ gilt: $i_U = d_U$.

<u>Beweis:</u>

Nach (1-1o) genügt es, zu zeigen, daß $i := (i_U)_{U \in J^n}$ ein Abbildungsgrad im $\mathbb{R}^n$ ist. Man braucht also nur die Axiome (1-1)(o) bis (iv) nachzuweisen:

(O) folgt sofort aus der Definition von i_U und aus Lemma (5-3).

(i) ist gezeigt, wenn man nachweist, daß i_U für jedes U stetig ist (vergl. den Beweisschritt (Ib) von (1-3)). Sei also $U \in J^n$ beliebig und $(f,p) \in D(U)$ beliebig. (Ich werde zeigen, daß dann i_U um (f,p) konstant ist. Da (f,p) und $D(U)$ beliebig waren, folgt daraus dann sofort die Lokal-Konstanz jedes i_U, d.h. die Stetigkeit.)

Seien definiert:

$\varepsilon := |p, f(\partial U)|$,

$\hat{V} := \{ q \,/\, q \in \mathbb{R}^n, |q-p| < \frac{\varepsilon}{2} \}$,

$k: (S^n \setminus \{h^{-1}(p)\}) \longrightarrow H$ die stereographische Projektion von $h^{-1}(p)$ aus auf die in $-h^{-1}(p)$ tangentiale Hyperebene H des $\mathbb{R}^{n+1}$,

$\tilde{V} := h\left(\{h^{-1}(p)\} \cup k^{-1}(H \setminus \overline{E_r^H(0)})\right)$, wobei $r \in \mathbb{R}_+$ so groß gewählt sei, daß $\tilde{V} \subseteq \hat{V}$ ist (da $h^{-1}(\hat{V})$ Umgebung von $h^{-1}(p)$ ist, existiert so ein r),

$V := h\left(\{h^{-1}(p)\} \cup k^{-1}(H \setminus \overline{E^H_{\sqrt{n}\,r}(0)})\right)$,

$W := \{ g \,/\, g \in C(\bar{U}, \mathbb{R}^n), \|g-f\|_{u,\bar{U}} < \frac{\varepsilon}{2} \}$.

Dann ist $V \times W$ sicher eine Umgebung von (f,p) in $D(U)$, denn für $(g,q) \in V \times W$ und $x \in \partial U$ gilt $|g(x)-q| \geq |f(x)-p| - (|f(x)-g(x)| + |q-p|) > 0$ und für $(g,q) \in D(U)$ mit $\omega((f,p),(g,q)) < |p, \partial V| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ist sicher $(g,q) \in V \times W$. ($V \times W$ ist sogar offen in $D(U)$, da V offen in $\hat{\mathbb{R}}^n$ und $\mathbb{R}^n$

Sei nun $(g,q) \in V \times W$ beliebig. Es wird behauptet, daß $i_U(g,q) = i_U(f,p$ gilt:

Es sei $\hat{F}(t,x) := (1-t)f(x) + tg(x)$ für $t \in [0,1]$ und $x \in \bar{U}$, dann ist $\hat{F}: [0,1] \times \bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Homotopie, und für jedes $t \in [0,1]$ und jedes $x \in \partial$ gilt

$$|\hat{F}(t,x) - p| = |f(x) + t(g(x)-f(x)) - p| \geq |f(x)-p| - t|g(x)-f(x)| > \frac{\varepsilon}{2},$$

so daß $\hat{F}(t,x) \notin \hat{V}$ ist. Erst recht ist dann $\hat{F}(t,x) \notin \tilde{V}$ und $k \circ h^{-1}(\hat{F}(t,x)) \in \overline{E_r^H(0)}$. Nach dem Satz von Tietze kann

$$k \circ h^{-1} \circ \hat{F}|_{[0,1] \times \partial U} : [0,1] \times \partial U \longrightarrow \overline{E_r^H(0)}$$

zu

$$G \qquad : [0,1] \times (\hat{\mathbb{R}}^n \setminus U) \longrightarrow \overline{E^H_{\sqrt{n}\,r}(0)}$$

stetig fortgesetzt werden.

Sei

$$F: [0,1] \times S^n \longrightarrow S^n \qquad \text{durch}$$

$$F(t,x) := \begin{cases} h^{-1} \circ \hat{F}(t, h(x)), & \text{falls } x \in h^{-1}(\bar{U}) \\ k^{-1} \circ G(t, h(x)), & \text{falls } x \in h^{-1}(\overline{\hat{\mathbb{R}}^n \setminus \bar{U}}) \end{cases}$$

definiert. Dann ist F eine Homotopie, denn für $h^{-1}(\bar{U}) \cap h^{-1}(\overline{\hat{\mathbb{R}}^n \setminus \bar{U}}) = h^{-1}(\partial U) \ni x$ und beliebiges $t \in [0,1]$ gilt:

$$F(t,x) = h^{-1} \circ \hat{F}(t,h(x)) = k^{-1} \circ k \circ h^{-1} \circ \hat{F}(t,h(x)) = k^{-1} \circ G(t,h(x)).$$

Nach (5-2) folgt $i_{F(t,\cdot)} = i_{F(0,\cdot)} = i_{F(1,\cdot)}$ für jedes $t \in [0,1]$.

Nun sind $F(0,\cdot)$ bzw. $F(1,\cdot)$ zulässige S^n-Abbildungen für (f,p) bzw. (g,q), denn für $x \in h^{-1}(\bar{U})$ gelten

$F(0,x) = h^{-1} \circ \hat{F}(0,h(x)) = h^{-1} \circ f \circ h(x)$ bzw.

$F(1,x) = \ldots \qquad = h^{-1} \circ g \circ h(x)$ und für $x \in S^n \setminus h^{-1}(U) = h^{-1}(\hat{\mathbb{R}}^n \setminus U)$ gelten

$F(0,x) = k^{-1} \circ G(0,h(x)) \in k^{-1}(\overline{E^H_{\sqrt{n}\,r}(0)}) \not\ni h^{-1}(p)$ bzw.

$F(1,x) = k^{-1} \circ G(1,h(x)) \in k^{-1}(\overline{E^H_{\sqrt{n}\,r}(0)}) \subseteq S^n \setminus \{h^{-1}(q)\}$.

Es folgt also:

$$i_U(g,q) = i_{F(1,\cdot)} = i_{F(0,\cdot)} = i_U(f,p).$$

Da (g,q) beliebig aus $V \times W$ war, muß i_U auf $V \times W$, also um (f,p), konstant sein. Daraus folgt (i).

(ii) folgt daraus, daß id_{S^n} für $(id_{\bar{U}}, p)$ zulässig ist, wenn $p \in U$, und daß $(id_{S^n})_{*n} = id_{H_n(S^n)}$ ist (Funktoreigenschaft von H_n!).

(iv) kann man wie folgt einsehen:

Seien $U \in J^n$ und $(f,p) \in D(U)$ mit $p \notin f(\overline{U})$. Nach Lemma (5-3) gibt es eine für (f,p) zulässige Abbildung $F: S^n \longrightarrow S^n$. Speziell ist $h^{-1}(p) \notin F(S^n \setminus h^{-1}(U))$ und $h^{-1}(p) \notin F(h^{-1}(U)) = h^{-1} \circ f(U)$, das heißt nach (5-2) : F ist nicht surjektiv und $i_U(f,p) = i_F = 0$. Indirekt folgt daraus (iv).

(iii): Seien U_1, U_2 disjunkte offene Teilmengen von $U \in J^n$ mit $\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2 = \overline{U}$ und sei $(f,p) \in D(U)$ mit $p \in R^n \setminus (f(\partial U_1) \cup f(\partial U_2))$. Dann seien definiert:

$V_i := h^{-1}(U_i) \quad (i=1,2)$,

$V := h^{-1}(U_1 \cup U_2) = V_1 \cup V_2$,

$F: S^n \longrightarrow S^n$ eine für (f,p) zulässige Abbildung,

$F_i: S^n \longrightarrow S^n$ $(i=1,2)$ zwei für $(f|_{\overline{U}_i}, p)$ zulässige Abbildungen,

$\tilde{V}_i \subseteq V_i$ $(i=1,2)$ offene Mengen mit $F^{-1}(\{h^{-1}(p)\}) \cap V_i = h^{-1}(\{f^{-1}(\{p\})\}) \cap V_i$ und $\overline{\tilde{V}_i} \subseteq V_i$.

$\tilde{V} := \tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_2$,

$k: (S^n \setminus \{h^{-1}(p)\}) \longrightarrow H$ wie im Beweis von (i),

$M := \max \{ \sqrt{n} \cdot |k(x)| \ / \ x \in F_1(S^n \setminus \tilde{V}_1) \cup F_2(S^n \setminus \tilde{V}_2) \cup F(S^n \setminus \tilde{V}) \}$,

$\hat{W} \subseteq H$ eine beschränkte offene Menge mit $M+1 \leq |\hat{w}| \leq M+2$ für alle $\hat{w} \in \hat{W}$,

$W := k^{-1}(\hat{W})$,

$K: S^n \longrightarrow H$ stetige Fortsetzung von $k \circ F|_{S^n \setminus \tilde{V}}$ mit $|K(\cdot)| \leq M$,

$X_1 := S^n \setminus \tilde{V}_2$,

$X_2 := S^n \setminus \tilde{V}_1$,

$\tilde{F}_i: S^n \longrightarrow S^n$ vermöge $\tilde{F}_i(x) := \begin{cases} k^{-1} \circ K(x), & \text{falls } x \in S^n \setminus \tilde{V}_i \\ F(x) & \text{, falls } x \in \tilde{V}_i \end{cases}$

$(i=1,2)$,

$Y := S^n \setminus \{y\}$, wobei $y \in W$ beliebig ausgewählt ist.

Dann gelten:

(a) Jedes $\tilde{F}_i$ ist stetig, denn für $x \in \partial \tilde{V}_i = \overline{(S^n \setminus \tilde{V}_i)} \cap \overline{\tilde{V}_i} \subseteq V_i$ ist $\tilde{F}_i(x) = k^{-1} \circ K(x) = k^{-1} \circ k \circ F(x) = F(x)$ $(i=1,2)$.

(b) $h^{-1}(p) \notin \overline{W} \subseteq S^n \setminus (F_1(S^n \setminus \tilde{V}_1) \cup F_2(S^n \setminus \tilde{V}_2) \cup F(S^n \setminus \tilde{V}))$, denn für jedes $x \in \overline{W}$ gelten: $k(x) \in \overline{\hat{W}}$ und $|k(x)| \geq M+1$, und $h^{-1}(p) \notin k^{-1}(H)$.

(c) $F^{-1}(\overline{W}) \subseteq \tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_2$, denn für jedes $x \in F^{-1}(\overline{W})$ gelten $F(x) \in \overline{W}$ und $F(x) \notin F(S^n \setminus \tilde{V})$, also $x \in \tilde{V} = \tilde{V}_1 \; \tilde{V}_2$.

(d) (S^n, X_1, X_2) ist im Sinne von Hu [10],Kap.II,6 ein zulässiges Tripel ("proper triad"), denn X_1 und X_2 sind in S^n abgeschlossen, und es gilt:

$$\overline{(X_1 \setminus (X_1 \cap X_2))} \cap \overline{(X_2 \setminus (X_1 \cap X_2))} = \overline{(V \setminus \tilde{V}_2)} \cap \overline{(V \setminus \tilde{V}_1)} = \overline{\tilde{V}}_1 \cap \overline{\tilde{V}}_2 \subseteq V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

(e) $X_1 \cup X_2 = S^n \setminus (\tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2) = S^n$.

(f) $X_1 \cap X_2 = S^n \setminus (\tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_2) = S^n \setminus \tilde{V}$.

(g) $F, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 \in \mathrm{Mor}_{\underline{PTOP}}((S^n, X_1 \cap X_2), (S^n, Y))$, denn nach (a) sind diese Abbildungen stetig, und nach ihrer Definition gelten: für $x \in X_1 \cap$

$|k \circ F(x)| \leq \sqrt{n} \cdot |k \circ F(x)| \leq M$, $F(x) \notin W$, $F(x) \neq y$ sowie

$|k \circ \tilde{F}_i(x)| = |k \circ k^{-1} \circ K(x)| = |K(x)| \leq M$, $\ldots, \tilde{F}_i(x) \neq y$ $(i=1,2)$.

(h) $\tilde{F}_i|_{X_i} = F|_{X_i}$ $(i=1,2)$, denn für $x \in X_i$ gilt:

$$\tilde{F}_i(x) = \left\{ \begin{array}{ll} k^{-1} \circ K(x), & \text{falls } x \in X_i \cap (S^n \setminus \tilde{V}_i) = X_1 \cap X_2 \\ F(x) & \text{, falls } x \in X_i \cap \tilde{V}_i \end{array} \right\} = F(x).$$

(i) $\tilde{F}_1(X_2) \subseteq Y$ und $\tilde{F}_2(X_1) \subseteq Y$, denn für $i,j = 1,2, i \neq j$ und $x \in X_j$ gelten:

$\tilde{F}_i(x) \in S^n \setminus \{h^{-1}(p)\}$ (nach Konstr. von $\tilde{F}_i$),

$|k \circ \tilde{F}_i(x)| = |k \circ k^{-1} \circ K(x)| = |K(x)| \leq M$,

$\tilde{F}_i(x) \notin W$ und folglich

$\tilde{F}_i(x) \neq y$.

(j) Y ist kontrahierbar.

(k) Die Voraussetzungen von [10],II,7,Theorem 2 sind wegen (d),(e),(f),(g),(h),(i),(j) erfüllt, so daß sich für die reduzierte Homologie - und damit für die gewöhnliche Homologie ($n \geq 1$!) - ergibt:

$$F_{*n} = \tilde{F}_{1*n} + \tilde{F}_{2*n} : \tilde{H}_n(S^n) = H_n(S^n) \longrightarrow \tilde{H}_n(S^n) = H_n(S^n) .$$

(vergl. auch [10],I,4,S.22 und S.24).

(l) Nach (5-1) folgt : $i_F = i_{\tilde{F}_1} + i_{\tilde{F}_2}$.

(m) F_i und $\tilde{F}_i$ $(i=1,2)$ sind homotop:

$$G: [0,1] \times S^n \longrightarrow S^n \text{ mit } G(t,x) := \begin{cases} F(x), & \text{falls } x \in \tilde{V}_i \\ k^{-1}(tK(x) + (1-t) k \circ F_i(x)), & \text{falls } x \in S^n \end{cases}$$

liefert eine Homotopie, weil für $x \in \overline{(S^n \setminus \tilde{V}_i)} \cap \overline{\tilde{V}}_i \subseteq V_i \cap (S^n \setminus \tilde{V})$ und jedes $t \in [0,1]$ gilt:

$$G(t,x) = k^{-1}(tK(x) + (1-t) k \circ F_i(x)) = k^{-1}(tk \circ F(x) + (1-t) k \circ F(x)) = k^{-1} \circ k \circ F(x) = F(x).$$

(n) Aus (l) und (m) folgt wegen (5-2):

$$i_{U_1}(f,p) + i_{U_2}(f,p) = i_{F_1} + i_{F_2} = i_{\tilde{F}_1} + i_{\tilde{F}_2} = i_F = i_U(f,p).$$

Damit ist auch (iii) für i nachgewiesen, da $U \in J^n$ beliebig war.

Damit ist (5-7) bewiesen.

(5-8) Bemerkung:

Im nächsten Paragraphen werde ich (5-7) dazu ausnutzen, weitere Eigenschaften von $d=(d_U)_{U\in J^n}$ nachzuweisen. Sicherlich ist aber die hier gegebene Konstruktion des Abbildungsgrades im R^n auch für sich interessant, da sie sehr kurz und anschaulich ist.
Es sei dazu noch bemerkt, daß diese Konstruktion ohne Hilfsmittel aus der Kombinatorik bzw. aus der simplizialen Theorie auskommt (im Gegensatz zu Bers [3]).
In Rado-Reichelderfer [15],II,2 wird der Abbildungsgrad für solche $U\in J^n$ definiert, die ein Gebiet bilden. Dabei wird eine spezielle Kohomologie-Theorie über Z benutzt. Für beliebiges $U\in J^n$ kann man den Abbildungsgrad von $(f,p)\in D(U)$ als Summe der Grade von $(f|_{\overline{U_i}},p)$ definieren, wobei U_i die Zusammenhangskomponenten von U durchläuft. In [15],II,2.3 findet man dann die nötigen Beweise, um leicht zeigen zu können, daß so wieder der Abbildungsgrad erhalten wird. Die Einzelheiten möchte ich hier nicht ausführen.
Die Rado-Reichelderfer-Konstruktion unterscheidet sich wesentlich von der hier gegebenen, ist aber auch frei von simplizialen Methoden.
Die klassischen Konstruktionen des Abbildungsgrades über die singuläre Homologie-Theorie über Z findet man in [1],Kap.XII, [5] und [12],Kap.II.
Eine Übersicht über die tiefliegenden topologischen Sätze, die mit der Theorie des Abbildungsgrades zusammenhängen (insbesondere der Fixpunktsatz von Lefschetz), findet man in [19]. Anwendungen in der Analysis sind in [1],[2],[3],[5],[7],[15] und [18] beschrieben. Anwendungen in der Funktionalanalysis (insbes. Differential- und Integralgleichungen) findet man in [5],[2],[12] und [18].

§ 6 . Weitere Eigenschaften des Abbildungsgrades im n-dimensionalen reellen Zahlenraum.

In diesem Paragraphen soll Satz (5-7) dazu ausgenutzt werden, drei weitere Ergebnisse über den Abbildungsgrad abzuleiten:

1. Bestimmung der "Größe" von $d_U(D(U))$ für jedes $U\in J^n$.
2. Beweis des in (3-6) angekündigten allgemeinen Produktsatzes von J.Leray.
3. Beweis des in (4-3) angekündigten Darstellungssatzes für den Abbildungsgrad im R^2 mit Hilfe der Windungszahl.

Dabei sind die allgemeinen Sätze über die "Größe" des Bildbereichs (6-3) bzw. über die Darstellbarkeit für n=2 (6-5) und der Beweis des wichtigen Produktsatzes (6-4) nach meiner Kenntnis neu.

Die Bezeichnungen werden aus den vorigen Paragraphen übernommen.

(6-1) Lemma (Hu [10],IV,5.4):

Seien $U\in J^n$, $(f,p)\in D(U)$, $F:S^n\longrightarrow S^n$ für (f,p) zulässig und $G:\hat{R}^n\longrightarrow\hat{R}^n$ vermöge $G:=h\circ F\circ h^{-1}$, dann gilt:
Ist $G(\overline{E^n})\subseteq\overline{E^n}$ und ist $G(\hat{R}^n\setminus E^n)\subseteq\hat{R}^n\setminus E^n$, so ist $i_U(f,p)=i_F=i_{G|_{S^{n-1}}}$

Beweis:

Es ist $i_U(f,p)=i_F=i_{h^{-1}\circ G\circ h}$ nach Definition (5-6). Sei $g:=G|_{S^{n-1}}$, dann ist $g:S^{n-1}\longrightarrow S^{n-1}$ stetig, da $G(S^{n-1})\subseteq\overline{E^n}\cap(\hat{R}^n\setminus E^n)=S^{n-1}$ nach Voraussetzung gilt.
Die Einhängung $\mathrm{susp}(g):\mathrm{susp}(S^{n-1})\hat{=}S^n\longrightarrow\mathrm{susp}(S^{n-1})\hat{=}S^n$ ($\hat{=}$: gleich bis auf einen natürlichen Homöomorphismus) von g ist sicherlich homotop zu $h^{-1}\circ G\circ h=F$, so daß $i_{G|_{S^{n-1}}}=i_g=i_F=i_U(f,p)$ folgt.[17],[18]

(6-2) Satz: Sei $n\geq 2$.

Sei $\varphi:S^{n-1}\longrightarrow S^{n-1}$ eine stetige Abbildung, dann gilt für jede stetige Fortsetzung $f:\overline{E^n}\longrightarrow R^n$ von φ und für jedes $p\in\overline{E^n}\setminus f(S^{n-1})=\overline{E^n}\setminus\varphi(S^{n-1})$:

$$d_{E^n}(f,p) = i_{E^n}(f,p) = i_\varphi .$$

Beweis:

Sei $f':\overline{E^n}\longrightarrow\overline{E^n}$ eine stetige Fortsetzung von φ (so eine Fortsetzung existiert nach dem Satz von Tietze), dann gilt nach (3-1):

$$d_{E^n}(f,p)=d_{E^n}(f',p).$$

Es gibt nun sicher eine für (f',p) zulässige Abbildung $F:S^n\longrightarrow S^n$ mit $F(S^n\setminus h^{-1}(\overline{E^n}))\subseteq S^n\setminus h^{-1}(E^n)$. Definiert man G wie in (6-1), so folgt wegen $G|_{S^{n-1}}=\varphi$ die Behauptung.[19]

Bemerkung:

Satz (6-2) besagt, daß für $n \geq 2$ der Abbildungsgrad $d = (d_U)_{U \in J^n}$ eine "Fortsetzung" von $i : C(S^{n-1}, S^{n-1}) = C(S^{n-1}, S^{n-1}) \times \{0\} \longrightarrow Z$ $(U \in R^n \cap S^n)$ ist. Man beachte die Ähnlichkeit dieses Ergebnisses mit Satz (4-1).

(6-3) Satz:

Sei $U \in J^n$, dann gelten:

(a) Ist $n=1$, so ist $d_U(D(U)) = \{ k \,/\, k \in Z \text{ und } |k| \leq k_U \}$, wobei k_U die Kardinalzahl der Menge aller Zusammenhangskomponenten vom $\overline{U}$ bezeichnet.

(b) Ist $n > 1$, so ist d_U surjektiv.

Beweis:

(a) Daß d_U die Menge $\{k / k \in Z, |k| \leq k_U\}$ umfaßt, sieht man mit Hilfe von (3-3)(h) sofort ein, wenn man $p = 0 \in R$ setzt und f auf jeder Zusammenhangskomponente von $\overline{U}$ als Gerade durch 0 mit positiver (bzw. negativer) Steigung wählt. Umgekehrt kann man nach dem Beweis von (1-7) zu jedem $(f,p) \in D(U)$ ein $(P', p') \in D_1(U)$ finden, so daß P' ein Polynom ist und $d_U(f,p) = d_U(P', p') = d_U(P'-p', 0)$ gilt (Letzteres nach (3-3)(d)). Dann ist natürlich $P := P' - p'$ auch ein Polynom. Aus (3-3)(h) und der Abschätzung der Anzahl der Nullstellen von P, bei denen P positive bzw. negative Ableitung hat, folgt dann auch $|d_U(f,p)| = |d_U(P,0)| \leq k_U$.

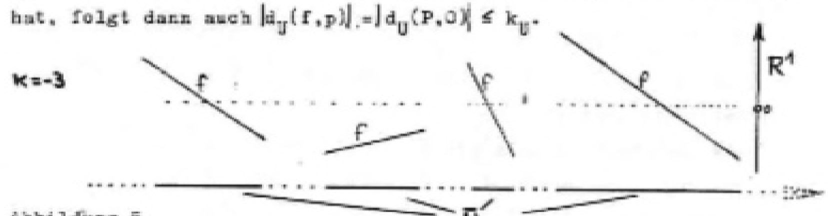

Abbildung 5

(b) Sei nun also $n \geq 2$. Dann gibt es nach einem bekannten Satz der algebraischen Topologie ([10], II, 8.4) zu jedem $k \in Z$ eine stetige Abbildung $g : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ mit $i_g = k$. Nach dem Satz von Tietze gibt es eine stetige Fortsetzung $G : E^n \longrightarrow E^n$ von g, so daß folgt: $d_{E^n}(G,0) = i_{E^n}(G,0) = i_g = k$. Sei $x \in U$ und $r \in R_+$ mit $E_r(x) \subseteq U$, dann folgt für $f : \overline{U} \longrightarrow R^n$ vermöge

$$f(y) := \begin{cases} G(\frac{1}{r}(y-x)) , & \text{falls } y \in \overline{E_r(x)} = r \cdot \overline{E^n} + x \\ G(\frac{1}{r}(r \frac{y-x}{|y-x|})) = G(\frac{y-x}{|y-x|}) , & \text{falls } y \in \overline{U} \setminus \overline{E_r(x)} \end{cases}$$

wegen $(f,0) \in D(U)$ nach (3-7) die Behauptung, nämlich $d_U(f,0) = k$. –
(Es ist für $x' \in \partial U \subseteq \overline{U} \setminus \overline{E_r(x)}$ $f(x') = g(\frac{x'-x}{|x'-x|}) \in S^{n-1}$, also $f(x') \neq 0$.)

(6-4) Satz:

Seien

$U, V \in J^n$,

$F \in C(\overline{U}, R^n)$,

$F(U) \subseteq V$,

$\widetilde{V}$ die Menge der Komponenten von $V \setminus F(\partial U)$,

$(G,Q) \in D(V)$ mit $Q \in R^n \setminus G \circ F(\partial U)$, dann gilt:

Wählt man für jedes $B \in \widetilde{V}$ ein $P_B \in B$ aus, so ist

$$d_U(G \circ F, Q) = \sum_{B \in \widetilde{V}} d_U(F, P_B) \cdot d_B(G,Q) .$$

Beweis:

(a) $d_B(G,Q)$ ist wegen $\partial B \subseteq F(\partial U) \cup \partial V$ definiert.
$d_U(F, P_B)$ ist für jedes $P_B \in B \subseteq R^n \setminus F(\partial U)$ definiert.
Die Menge $\widetilde{V}''$ aller $B \in \widetilde{V}$ mit $Q \in G(B)$ ist endlich ($G^{-1}(\{Q\})$ ist kompakt, $\widetilde{V}$ ist eine offene Überdeckung von $G^{-1}(\{Q\})$), also ist $d_B(G,Q) = 0$ für fast alle $B \in \widetilde{V}$ (nach (1-1)(iv)). Die rechte Seite der behaupteten Gleichung ist also definiert.

(b) Ist $B \in \widetilde{V}$ mit $B \cap (R^n \setminus F(\overline{U})) \neq \emptyset$, so ist $d_U(F, P_B) = 0$ (nach (1-1)(iv) und (3-3)(c)).
Sei $\widetilde{V}'$ die Menge aller $B \in \widetilde{V}''$ mit $B \cap (R^n \setminus F(\overline{U})) = \emptyset$, d.h. $B \subseteq F(U)$, dann gilt:

$$\sum_{B \in \widetilde{V}} d_U(F,P_B) \cdot d_B(G,Q) = \sum_{B \in \widetilde{V}''} \ldots = \sum_{B \in \widetilde{V}'} d_U(F,P_B) \cdot d_B(G,Q) .$$

(c) Es ist $(G \circ F)^{-1}(\{Q\}) = F^{-1}(G^{-1}(\{Q\})) \subseteq \bigcup_{B \in \widetilde{V}'} F^{-1}(B)$, so daß nach (1-1)(iv), (1-3)(3) und (1-3)(4) folgt:

$$d_U(G \circ F, Q) = \sum_{B \in \widetilde{V}'} d_{F^{-1}(B)}(G \circ F, Q)$$, wobei jedes $d_{F^{-1}(B)}(G \circ F, Q)$

wegen $Q \notin G \circ F(\partial B) \subseteq G \circ F(\overline{U} \setminus \bigcup_{B \in \widetilde{V}'} F^{-1}(B))$ definiert ist.

(d) Für jedes $B \in \widetilde{V}'$ und $P_B \in B$ ist $d_U(F, P_B) = d_{F^{-1}(B)}$, weil
$P_B \notin \partial B \supseteq F(\partial F^{-1}(B))$ gilt (nach (1-3)(4)).

Die behauptete Gleichung ist also bewiesen, wenn man

$$\sum_{B \in \widetilde{V}'} d_{F^{-1}(B)}(G \circ F, Q) = \sum_{B \in \widetilde{V}'} d_{F^{-1}(B)}(F, P_B) \cdot d_B(G,Q)$$

oder die Gleichheit entsprechender Summanden für jedes $B \in \widetilde{V}'$ bewiesen hat.

Sei also nun $B \in \widetilde{V}'$ beliebig. Es ist zu zeigen, daß dann

$$d_{F^{-1}(B)}(G \circ F, Q) = d_{F^{-1}(B)}(F, P_B) \cdot d_B(G,Q)$$

gilt.

(e) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $\varepsilon < |Q, G\circ F(\partial F^{-1}(B))|$ und $\varepsilon < |Q, G(\partial B)|$, dann gibt es wegen (1-7) ein $(\tilde{G},\tilde{Q}) \in D_1(B)$ mit $\mu((\tilde{G},\tilde{Q}),(G,Q)) < \varepsilon$. Wegen (3-3)(a) folgt:

$$d_B(\tilde{G},\tilde{Q}) = d_B(G,Q)$$

$$d_{F^{-1}(B)}(\tilde{G}\circ F,\tilde{Q}) = d_{F^{-1}(B)}(G\circ F,Q) \quad .$$

Man darf also o.B.d.A. annehmen, daß $(G,Q) \in D_1(B)$ ist (sonst ersetze man im folgenden G durch $\tilde{G}$, Q durch $\tilde{Q}$).

(f) Seien $\{g_1,\ldots,g_m\} := G^{-1}(\{Q\})$ und $B_j \subset B$ offene Umgebungen von g_j, $j=1,\ldots,m$, die paarweise disjunkt sind. Wegen (1-3)(3) und (4) folgen:

(f₁) $\quad d_{F^{-1}(B)}(G\circ F,\tilde{Q}) = \sum_{j=1,\ldots,m} d_{F^{-1}(B_j)}(G\circ F,Q)$,

(f₂) $\quad d_B(G,Q) = \sum_{j=1,\ldots,m} d_{B_j}(G,Q) \quad ,$

(f₃) $\quad d_{F^{-1}(B)}(F,P_B) = d_{F^{-1}(B)}(F,g_j) = d_{F^{-1}(B_j)}(F,g_j) . (j=1,\ldots,m)$

(g) Für jedes $j=1,\ldots,m$ seien:

$$B_j' := F^{-1}(B_j),$$

$$\hat{G}_j : S^n \longrightarrow S^n \text{ zulässig für } (G|_{\overline{B_j}}, Q),$$

$$\hat{F}_j : S^n \longrightarrow S^n \text{ zulässig für } (F|_{\overline{B_j'}}, g_j).$$

(h) Es ist $h^{-1}(Q) \notin \hat{G}_j \circ \hat{F}_j(S^n \setminus h^{-1}(B_j'))$ für jedes $j=1,\ldots,m$; denn $\hat{G}_j^{-1}(\{h^{-1}(Q)\}) = \{h^{-1}(g_j)\}$ und folglich $(\hat{G}_j \circ \hat{F}_j)^{-1}(\{h^{-1}(Q)\}) = \hat{F}_j^{-1}(\{h^{-1}(g_j)\}) \subseteq h^{-1}(B_j')$ gelten.

(i) $\hat{G}_j \circ \hat{F}_j$ ist stetige Fortsetzung von $h^{-1}\circ G\circ F\circ h|_{h^{-1}(\overline{B_j'})}$:
Für $x \in h^{-1}(\overline{B_j'})$ gelten:

$$\hat{G}_j \circ \hat{F}_j(x) = \hat{G}_j \circ h^{-1}\circ F\circ h(x),$$

$$F\circ h(x) \in F(\overline{B_j'}) \subseteq \overline{F(B_j')} = \overline{F(F^{-1}(B_j))} = \overline{B_j} \quad \text{und folglich}$$

$$\hat{G}_j \circ \hat{F}_j(x) = \hat{G}_j \circ h^{-1}\circ F\circ h(x) = h^{-1}\circ G\circ h\circ h^{-1}\circ F\circ h(x) = h^{-1}\circ (G\circ F)\circ h(x).$$

(j) Nach (h) und (i) ist also $\hat{G}_j \circ \hat{F}_j$ zulässig für $(G\circ F|_{\overline{B_j'}}, Q)$ $(j=1,\ldots,m)$.
Für jedes $j=1,\ldots,m$ gilt also

$$d_{F^{-1}(B_j)}(G\circ F,Q) = i_{\hat{G}_j \circ \hat{F}_j} = i_{\hat{G}_j} \cdot i_{\hat{F}_j} \quad . \text{ (Letzteres weil}$$

$(\hat{G}_j \circ \hat{F}_j)_{*n} = \hat{G}_{j*n} \circ \hat{F}_{j*n}$, denn $(H_n, *_n)$ ist ein kovarianter Funktor in die Kategorie der abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen.)

(k) Schließlich folgt zusammenfassend:

$$d_{F^{-1}(B)}(G\circ F,Q) \underset{(f_1)}{=} \sum_{j=1,\ldots,m} d_{F^{-1}(B_j)}(G\circ F,Q) =$$

$$\underset{(j)}{=} \sum_{j=1,\ldots,m} i_{\hat{G}_j} \cdot i_{\hat{F}_j} =$$

$$\underset{(g)}{=} \sum_j d_{F^{-1}(B_j)}(F,g_j) \cdot d_{B_j}(G,Q) =$$

$$\underset{(f_3)}{=} d_{F^{-1}(B)}(F,P_B) \cdot \sum_j d_{B_j}(G,Q) =$$

$$\underset{(f_2)}{=} d_{F^{-1}(B)}(F,P_B) \cdot d_B(G,Q) \quad .$$

Nach (e) und (d) folgt daraus Satz (6-4).

<u>(6-5) Satz:</u>

Seien
$U \in J^2$
$(f,p) \in D(U)$,
$\tilde{V}$ die (endliche) Menge der Zusammenhangskomponenten von $\overline{U}$, deren Durchschnitt mit $f^{-1}(\{p\})$ nicht leer ist,
dann gibt es zu jedem $B \in \tilde{V}$ ein $f_B : \overline{E^2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(f_B,p) \in D(E^2)$
und

$$d_U(f,p) = \sum_{B \in \tilde{V}} d_{E^2}(f_B,p) = \sum_{B \in \tilde{V}} \int_{f_B \circ \hat{\varkappa}} \frac{dz}{z-p} \quad .$$

<u>Beweis:</u>

Nach (1-3)(3) und (1-3)(4) gilt:

$$d_U(f,p) = \sum_{B \in \tilde{V}} d_B(f,p) \quad .$$

Für jedes $B \in \tilde{V}$ sei $F_B : S^2 \longrightarrow S^2$ stetige Fortsetzung von $h^{-1}\circ f\circ h|_{h^{-1}(\overline{B})}$, die für $(f|_{\overline{B}},p)$ zulässig ist. Sei $r \in \mathbb{R}_+$ so, daß $U \subset E_r^2(0)$.
Für jedes $B \in \tilde{V}$ sei dann

$$\tilde{F}_B : \overline{E_r(0)} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \text{vermöge } \tilde{F}_B(x) := h\circ F_B \circ h^{-1}(x) \text{ definiert.}$$

Für $x \in \overline{E_r(0)} \setminus B$ ist dann $h^{-1}(x) \in S^2 \setminus (h^{-1}(B) \cup h^{-1}(\partial B))$ und $\tilde{F}_B(h^{-1}(x)) \neq h^{-1}(p)$.
Folglich ist dann $h\circ F_B \circ h^{-1}(x) \neq p$. Andererseits ist für $x \in \overline{B}$

$$\tilde{F}_B(x) = h\circ F_B \circ h^{-1}(x) = h\circ h^{-1}\circ f\circ h\circ h^{-1}(x) = f(x).$$

Nach (1-3)(4) folgt:

$$d_B(f,p) = d_B(\tilde{F}_B,p) = d_{E_r(0)}(\tilde{F}_B,p) \quad .$$

Setzt man $f_B := \tilde{F}_B(r\cdot(\cdot))$ für jedes $B \in \tilde{V}$, so folgt aus der Bemerkung im Anschluß an (4-2) die Behauptung.

Ergänzungen und Bemerkungen

Verwendete Zeichen:

R^n, R	n-dimensionaler bzw. 1-dimensionaler reeller Zahlenraum mit natürlicher Topologie und euklidischem Abstand
$N, Z, C (, N_0)$	Mengen der natürlichen, ganzen, komplexen Zahlen mit natürlicher Topologie $(, N_0 := N \cup \{0\})$
J^n	Menge der beschränkten, offenen und nichtleeren Teilmengen von R^n
$\overline{U}, \partial U$	topologische abgeschlossene Hülle bzw. topologischer Rand von U
$\|\cdot\|_{u,X}$	Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf X (max-Norm)
$\|p-q\|, \|p, X\|$	euklidischer Abstand zwischen p und q bzw. p und X
id_X	identische Abbildung von X in sich
$[0,1],]0,1[$	abgeschlossenes bzw. offenes Einheitsintervall von R
$\det f(x)$	Funktionaldeterminante von f an der Stelle x
$J_f(x)$	Funktionalmatrix von f an der Stelle x
R_+	Menge der positiven reellen Zahlen
$E_r^M(x)$	offene Kugel vom Radius r um x im metrischen Raum M
$E^n = E^n(0)$	offene Einheitskugel im R^n
$S^n = S^n(0)$	Einheitssphäre im R^{n+1}
$D(U), D_1(U), D_2(U)$	siehe §1 (1-1) bzw. (1-6)
$C(\overline{U}, R^n)$ $(C^1(\overline{U}, R^n))$	Raum der auf (einer Umgebung von) $\overline{U}$ stetigen (stetig differenzierbaren) Abbildungen in R^n mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf $\overline{U}$
...für (f,p) zulässig ...	siehe § 5 (5-6)
h	siehe § 5 (5-5)
$\mathcal{K} = (E_q, \partial_q, *_q)_{q \in Z}$	siehe Anfang von §5
PTOP	Kategorie der Paare topologischer Räume

Fußnoten

[1], [2]) siehe Zeichenschlüssel oben. Mit $F: [0,1] \times \overline{U} \longrightarrow R^n$ ist auch jede der Abbildungen $F_t := F \circ j_t : \overline{U} \longrightarrow R^n$ stetig, wobei $j_t : \overline{U} \longrightarrow [0,1] \times \overline{U}$ vermöge $j_t(x) := (t, x)$ $(t \in [0,1])$ definiert ist.

[3]) Ein affiner Isomorphismus $F: R^n \longrightarrow R^n$ hat die Form $F(x) = \hat{F} \cdot x + \tilde{F}$, wobei $\hat{F}$ eine nichtsinguläre (n,n)-Matrix und $\tilde{F} \in R^n$ sind. Dabei ist dann $\det F = \det \hat{F}$.

[4]) R_+ bezeichnet die Menge der positiven reellen Zahlen

[5]) Satz über Basisdeformationen: Siehe z.B. Greub, W.: "Linear Algebra", Berlin, 1963, S.76.

[6]) Nagumo [13], S.498: "The existence and uniqueness of ... satisfying the above conditions can be verified, if we use simplicial mappings for approximations of f (...). But I may refer to [5] (entspricht hier [14]) in which the existence of ... is given, based on infinitesimal analysis but free from the notion of simplicial mapping."

Berger-Berger [2], Theorem 2-5: "Let f be a continuous mapping of the bounded domain $D \subset R^n$ into R^n. Suppose $f(x) \neq p$ for $x \in \partial D$, where p is a point in R^n, and let $\tilde{d}(f,p,D)$ be the degree defined by homology groups and $d(f,p,D)$ be the degree determined by the analytic definition (...). Then $d(f,p,D) = \tilde{d}(f,p,D)$.

The proof of this result requires a certain amount of algebraic topology and will be omitted here as it will not be used in the sequel. (See [6].)"

(Die hier zitierte Quelle [6] entspricht der Quelle [5] im Literaturverzeichnis und enthält - meines Wissens - keinen solchen Satz.)

Ich habe in der Literatur weder für die Behauptung von Nagumo noch für die von Berger-Berger einen Beweis gefunden. Beide Behauptungen ergeben sich aber aus Satz (1-8), wobei simpliziale Methoden völlig vermieden sind.

Die völlige Abwesenheit simplizialer oder kombinatorischer Methoden trägt unbedingt zur Kürze und Übersichtlichkeit der in dieser Arbeit entwickelten Theorie bei; man vergleiche die Arbeiten von Krasnosel'skii [12], Alexandroff-Hopf [1] oder Cronin [5]. Außerdem konnte ich so vielleicht eher 'Plausibilitätsbetrachtungen' vermeiden (vergl. die Beweise in Bers, [3], Kap. XIV).

Im Gegensatz zu den in (1-3) und (1-8) gegebenen Charakterisierungen des Abbildungsgrades hat die in (1-1) gegebene den Vorzug, auch in lokal-konvexen Räumen sinnvoll zu sein, wenn man dort noch geeignete Definitionsbereiche bestimmt (das tut Nagumo in [13] i.a. leider nicht). Anhaltspunkte für eine - noch zu entwickelnde - allgemeine "unendlichdimensionale" Theorie findet man in [2], [3], [12], [14], [18] und [19] (insbes. Seite 24!) sowie in:

F.E. Browder - W.V. Petryshin: "The Topological Degree and Galerkin Approximations for Noncompact Operators in Banach Spaces"

Die größte Schwierigkeit bei einem solchen Versuch wäre es vermutlich, geeignete Topologien auf den Definitionsbereichen zu finden, um einen ähnlichen Satz wie (1-5) zu erhalten.

Eine Klärung der Tragweite der Nagumo-Axiomatik dürfte in jedem Falle dazu nützlich sein. Diese Klärung ist wohl das wesentliche Ergebnis meiner Untersuchungen.

7) vergl. Hwa-Teplitz:"Homology and Feynman Integrals",New York, 1966, Kap III,3-5.

8) $dx_k \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n = 0$ für $k \neq j$.

9) Es gilt der folgende Satz von Jacobi:
Sei $f \in C^2(U, R^n)$, U offeneund nichtleere Teilmenge des R^n, dann gilt für jedes $i=1,\ldots,n$:

$$\sum_{j=1,\ldots,n} \frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x^j} = 0 \quad \text{auf } U \text{, wobei } A_{ij}(x) \text{ die Adjunkte}$$

von $a_{ij}(x) := \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x^j}\right)$ in $J_f(x)$ ist.

Man kann diesen Satz einfach nachrechnen, indem man die linke Seite der Gleichung mit Hilfe der Formel

$$A_{ij}(x) = (-1)^{i+j} \sum_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\hat{\alpha}_i=\hat{j},\ldots,\alpha_n) \\ \in \mathrm{Perm}(1,\ldots,\hat{j},\ldots,n)}} \mathrm{sign}(\alpha_1,\ldots,\hat{\alpha}_i,\ldots,\alpha_n) a_{1\alpha_1}(x) \cdots \widehat{a_{i\alpha_i}(x)} \cdots a_{n\alpha_n}(x)$$

berechnet(und dabei die Schwarz'sche Vertauschungsregel für die zeiten Ableitungen beachtet).

10) Divergenztheorem: Siehe W.H.Fleming:"Functions of Several Variables",Reading, 1965,Kap.VII,5.

11) Dichtheitssatz: Siehe E.Berz:"Verallgemeinerte Funktionen und Operatoren", Mannheim, 1967, S.19.

12) $d_U(g,q)$ ist hier definiert, weil für jedes $x \in \partial U$ gilt:
$|g(x)-q| \geq |f(x)-p| - (|g(x)-f(x)| + |p-q|) > \varepsilon - (\|g-f\|_{u,\partial U} + \varepsilon - \|g-f\|) = 0$.

13) Interessante Anwendungen dieser Darstellungsweisen findet man in [1],Kap.XII ,[7] und dem schon zitierten Buch von Hwa-Teplitz (siehe 7)).

14) Es stimmen dann nämlich die stetigen Abbildungen d_{E^2} und $w \circ G$ auf der dichten Teilmenge $D_1(E^2)$ von $D(E^2)$ überein, sind also gleich.

15) Verfahren, w auszurechnen, findet man in dem schon zitierten Buch "Vektorfelder in der Ebene" (s.Anfang § 4). Die Sätze (4-2) und (5-5) sind - meines Wissens - neu.

16) Aus der Beweisskizze auf S.224 von [3] entnimmt man, daß Berz mit dem Lemma auf S.223 das Lemma (5-3) meinte und entsprechend die Definition auf S.224 verstanden wissen wollte.
Die Berz'schen Beweisskizzen benutzen wesentlich die simpliziale Theorie und sind häufig mehr "Plausibilitätsbetrachtungen". Ich habe mich in § 5 und § 6 bemüht, beides zu vermeiden.

17) $\mathrm{susp}(S^{n-1}) := (S^{n-1} \times [-1,1])/\sim$, wobei $(x,t) \sim (y,s)$ genau dann gelten soll, wenn $t=s=-1$ oder $t=s=1$ oder $(x,t)=(y,s)$ gilt. $\mathrm{susp}(g)$ ist dann durch $\mathrm{susp}(g)([(x,t)]) := [(g(x),t)]$ definiert (s. Hu [10],I,5).
Sei $\hat{h}: S^n \longrightarrow \mathrm{susp}(S^{n-1})$ vermöge $\hat{h} := pr \circ h' \circ h$ definiert, wobei $h': \hat{R}^n \longrightarrow S^{n-1} \times [-1,1]$ vermöge $h'(x) := \begin{cases} (e_1, 1), & \text{falls } x=0 \\ (e_1, -1), & \text{falls } x=\infty \\ \left(\frac{x}{|x|}, \frac{2}{\pi} \arctan|x|\right), & \text{sonst} \end{cases}$

und $pr(y) := [y]_\sim$ definiert sind. $\hat{h}$ ist dann offenbar ein solcher Homöomorphismus zwischen S^n und $\mathrm{susp}(S^{n-1})$.
Daß $\hat{h}^{-1} \circ \mathrm{susp}(g) \circ \hat{h}$ homotop zu F ist, sieht man ein, indem man stereographische Projektionen der "oberen" bzw. "unteren Hälfte" ($h^{-1}(\infty)$ zugewandte bzw. abgewandte abgeschl. Halbsphäre) von S^n vornimmt, im $\hat{R}^n$ deren Bildräumen deformiert und die zurückprojizierten Homotopien "zusammenklebt".

18) Nach Hu [10],II,8.3 haben g und susp(g) gleichen topologischen Index.

19) Man vergl. die Definition des Kronecker-Index bei Hwa-Teplitz (s.Fußnote 7)).

20) Da f stetig ist, muß $f^{-1}(\{p\})$ eine kompakte Teilmenge von U sein. Diese Teilmenge ist aber nach dem Satz über implizite Funktionen diskret, also endlich.

LITERATURVERZEICHNIS

1 P.Alexandroff-H.Hopf: Topologie, 1.Bd., New York, 1965 (Chelsea)

2 M.Berger-M.Berger: Perspectives in Nonlinearity, New York, 1968 (Benjamin)

3 L.Bers: Topology, New York, 1957 (New York University)

4 L.E.J.Brouwer: Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Math.Ann. 71 (1912), 97-115

5 J.Cronin: Fixed Points and Topological Degree in Nonlinear Analysis, 1964 (Amer.Math.Soc.)

6 S.Eilenberg-N.Steenrod: Foundations of Algebraic Topology, Princeton, 1952 (Princeton University Press)

7 J.Hadamard: Sur quelques applications de l'indice de Kronecker Appendix in Tannery: Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, Bd.II, 2.Aufl., Paris, 1910

8 E.Heinz: An elementary analytic theory of degree, J.Math.Mech. 8 (1959), 231-247

9 S.T.Hu: Elements of General Topology, San Francisco, 1965 (Holden-Day)

10 S.T.Hu: Homology Theory, San Francisco, 1966 (Holden-Day)

11 S.T.Hu: Homotopy Theory, New York, 1959 (Academic Press)

12 M.A.Krasnosel'skii: Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations, Oxford, 1964 (Pergamon Press)

13 M. Nagumo: Degree of mappings in convex linear topological spaces, Amer.J.Math. 73 (1951), 497-511

14 M.Nagumo: A theory of degree of mapping based on infinitesimal analysis, Amer.J.Math. 73(1951), 485-496

15 T.Rado-P.V.Reichelderfer: Continuous Transformations in Analysis, Berlin, 1955 (Springer-Verlag)

16 H.Schubert: Kategorien I,II, Berlin 1970 (Springer-Verlag)

17 H.Schubert: Topologie, Stuttgart, 1964 (Teubner Verl'ges.)

18 J.T.Schwartz: Nonlinear Functional Analysis, New York, 1964 (New York University)

19 T.van der Walt: Fixed and almost fixed points, Amsterdam, 1967 (Mathematisch Centrum Amsterdam)

Lebenslauf

Lutz Führer, Berlin 51, Letteallee 54

28.3. 1945	Geburt in Lüneburg
seit 1946	in Berlin ansässig
1951-1957	Besuch der Grundschule in Berlin-Wedding
1957-1959	Besuch der Oberschule Technischen Zweiges in Berlin-Wedding
1959-1964	Besuch der Oberschule Wissenschaftlichen Zweiges "Lessing-Schule" in Berlin-Wedding (Abitur 1964)
1964-1968	Studium der Mathematik an der Freien Universität Berlin
1966	Abschluß des Vordiploms in Mathematik an der Freien Universität Berlin
1968	Abschluß des Diplomexamens in Mathematik an der Freien Universität Berlin
1968-1969	wiss. Mitarbeiter am Lehrstuhl für Mathematik und Geometrie der Technischen Universität Berlin
seit 1969	wiss. Assistent am Mathematischen Institut der Technischen Universität Berlin.

Während meines Studiums an der Freien Universität Berlin waren meine Lehrer: Prof. Dinghas, Prof. Grotemeyer, Prof. Pachale, Prof. Ringel, Prof. Stöhr und Prof. Münzner (Fakultät für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften). Während meiner Tätigkeit an der Technischen Universität Berlin habe ich vor allem von den Professoren Leichtweiß und Wendland profitiert.

Druck: Dissertationsdruckstelle, 1 Berlin 33, Garystr. 45