Theoretische Informatik I

Blatt 4, 09.11.2004, Abgabe 16.11.2004 in der Vorlesung

Matrix–Vektor AND/OR Produkt

INPUT $A = [a_{i,j}]_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} \in \{0,1\}^{n\times m}$, $\mathbf{b} = (b_1,\ldots,b_m)^t \in \{0,1\}^m$

#A sei gegeben durch die Listen $S_1(A),...,S_m(A)$ *und* $Z_1(A),...,Z_n(A)$.

 # berechne für $i = 1,...,n$*:* $c_i = \bigvee_{j=1,...,m} (a_{i,j} \wedge b_j)$.

1. $z := 0$, $c_1 := c_2 := \cdots := c_n := 0$, $t := \sum_{i=1}^{m} \#S_i(A)$
2. FOR $j = 1,\ldots,m$ DO

   IF $b_j = 1$ THEN FOR all $i \in S_j(A)$ DO $[c_i := 1,\ z := z+1]$
3. IF $z \ge n\ln(t/n)$ `and` $j < m$ THEN

   FOR all i with $c_i = 0$ DO FOR all $j \in Z_i(A)$ DO

   IF $b_j = 1$ THEN $c_i := 1$

OUTPUT $c_1,\ldots,c_n$.

Aufgabe 13. Die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{WS}(A)$ sei eine Funktion von $(\#S_1(A),...,\#S_m(A))$. Damit sind die $\#S_j(A)$ 1-Einträge von Spalte j zufällig verteilt und unabhängig von den anderen Spalten.

1. Bestimme: $\mathbf{E}[\#Z_i(A)]$ für $i = 1,...,n$
2. Zeige: Die mittlere Laufzeit des Algorithmus ist $O(n\ln(t/n))$.
3. Optimiere die Schranke $n\ln(t/n)$ in Schritt 3 über $n\ln(t/n) - ns$ mit $s \in \mathbb{N}$, so dass die erwartete Schrittzahl minimal wird.

Aufgabe 14. Die Booleschen Matrizen $A \in \{0,1\}^{n \times m}$, $B \in \{0,1\}^{m \times k}$ sind durch die Listen $S_j(A), Z_i(A), S_j(B), Z_i(B)$ gegeben. Zu berechnen ist das AND/OR Produkts $C = AB$, bzw. $C^t = B^t A^t$.

Fall 1: B fest, A Zufallsmatrix (wie in Aufgabe 13),

Fall 2: A fest, B^t Zufallsmatrix,

Fall 3: A und B^t Zufallsmatrizen.

Gebe jeweils Verfahren mit möglichst kleiner erwarteter Schrittzahl an. Begründe !

Aufgabe 15. Beweise durch Induktion die obere Schranke für die Anzahl der Vergleiche über $\mathbb{Z}$ von MERGE–SORT: $M(n) \leq n\lceil \log_2 n \rceil - 2^{\lceil \log_2 n \rceil} + 1$.

Pro Aufgabe 6 Punkte.