Gitteralgorithmen zur Faktorisierung ganzer Zahlen

Blatt 6, 23.01.2013, Abgabe 06.02.2013

Aufgabe 1. (7.5) im Beweis von Theorem 4 (neu) liefert eine untere Schranke für $\psi^*(X, \ln^\alpha X)$, welche $(\ln^\alpha X)$–glatte, quadratfreie $p'_1 \cdots p'_z < X$ mit $p'_i \leq \ln^\alpha X$ prim aufzählt, die nicht erweiterbar sind. Sei $\psi^*_\sim(X, \ln X)$ die Anzahl der erweiterbaren solcher $p'_1, \cdots, p'_z$. Zeige $\psi^*_\sim(X, \ln^\alpha X) = o(\psi^*(X, \ln^\alpha_\sim X))$.

Hinweis: Die Anzahl der Teiler $p'_1 \cdots p'_{z-k}$ von $p'_1 \cdots p'_z$ mit festem z, k ist $\binom{z}{k}$. Die Vielfachheit mit der $\tilde{p}_1 \cdots \tilde{p}_{z-k}$ als Teiler verschiedener Erweiterungen $p'_1 \cdots p'_z$ auftritt, ist erheblich grösser als $\binom{z}{k}$.

Sei $f_k(y) = a_k \frac{y^k}{y+b}$ mit $a_k = \frac{1}{k} \frac{1}{(\delta\eta-1)^k b^k}$, $b = \ln X / \ln 2$, $\delta^* = (\delta - 1)b$.

Aufgabe 2. Zeige für $1 \leq \delta, \eta < 2$, $2 \leq \delta\eta \leq 3$ dass
$\int_0^{\delta^*} f_k(y)dy \leq \frac{1}{k} \frac{(\delta-1)^k}{(\delta\eta-1)^k}(1 - 1/\delta) = \delta^* f_k(\delta^*)$.

Hinweis: f_k ist monoton wachsend.

Aufgabe 3. Berechne $\int_0^{\delta^*} f_4(y)dy$.

Hinweis: $\int_0^{\delta^*} f_4(y)dy = a_4 \frac{1}{4}(y+b)^4\Big|_0^{\delta^*} + \sum_{k=1}^{3} c_k \int_0^{\delta^*} f_k(y)dy$ mit geeigneten Konstanten c_k.