

Diskrete Mathematik

Blatt 7, 07.06.2010, Abgabe 17.06.2010, 12.10 Uhr

Aufgabe 1.

1. Zeige: Ein Polynom $g \in K[x]$ vom Grad 2 oder 3 über einem Körper K ist genau dann irreduzibel über K , wenn es keine Nullstelle in K hat. Warum gilt das nicht für Polynome vom Grad ≥ 4 ?
2. Zähle alle irreduzible, normierte Polynome vom Grad ≤ 4 in $\mathbb{Z}_3[x]$ auf.

Die Ableitung f' von $f = \sum_i f_i x^i \in K[x]$ ist $f' = \sum_i i f_i x^{i-1}$.

Aufgabe 2. Sei K Körper $\mathbf{0} \neq f \in K[x]$, $a \in K$. Zeige:

1. $(x - a)^m \mid f \Leftrightarrow f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0$ für $m \geq 1$
2. $f \mid x^{p^m} - x$ und $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ irreduzibel impliziert $f^2 \nmid x^{p^m} - x$.

Aufgabe 3. Das Polynom $f = x^3 - x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ ist irreduzibel. Konstruiere mit f den Körper \mathbb{F}_{27} mit Basis über \mathbb{Z}_3 und ein primitives Element $\alpha \in \mathbb{F}_{27}^*$.

6 Punkte pro Aufgabe