Diskrete Mathematik

Blatt 2, 22.04.2010, Abgabe 29.04.2010, 12.10 Uhr

Aufgabe 1. Sei $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_p$ genau dann ein Körper ist, wenn p prim ist. **6 Punkte**

Aufgabe 2. Sei K ein Körper.

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach grad(g), dass zu $g, h \in K[x] \setminus \{0\}$ Polynome $r, s \in K[x]$ existieren, so dass $g = s \cdot h + r$ und grad $r <$ grad h.
2. Zeigen Sie, dass die Zerlegung aus a) eindeutig ist.
3. Folgern Sie, dass $K[x]$ ein Euklidischer Ring ist.
4. Bestimme ggT von $x^4 + x^3 + x^2 + 1$, $x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$. **6 Punkte**

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[i]$ der ganzen Gauß'schen Zahl mit der Abbildung $\text{grad}(a + ib) := |a + ib|^2 = a^2 + b^2$ euklidisch ist. **6 Punkte**
Hinweis: Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ existiert ein $\delta \in \mathbb{Z}[i]$ mit $|z - \delta|^2 \leq \frac{1}{2} < 1$.

Aufgabe 4. Sei $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z} / 3\mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$.
Löse zu $f = x^5 + 1$, $g = x^3 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ die Gleichung $fu + gv = \text{ggT}(f, g)$ für $u, v \in \mathbb{Z}_3[x]$ mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus für Polynome. Beschreibe den Algorithmus. **6 Punkte**

Übungsblätter im Internet http: //mi.informatik.uni-frankfurt.de
bei "Diskrete Mathematik" SS 2010