Variationsrechnung

J. Baumeister[1]

Wintersemester 1999/2000

[1]Dies ist eine überarbeitete Fassung eines Skriptums zu einer gleichnamigen Vorlesung im WS94/95. Vorsicht: Es sind immer noch unvollständige und oberflächlich korrigierte Aufzeichnungen!

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Einführung **2**

1.1 Kürzeste Verbindung zweier Punkte 2
1.2 Das Problem der Dido 4
1.3 Fermatsches Prinzip 6
1.4 Brachistochrone 7
1.5 Rotationsfläche kleinsten Flächeninhalts 10
1.6 Das Widerstandsproblem von Newton 11
1.7 Eulersche Polygonzugmethode 13
1.8 Parametrische Form der Theorie 18
1.9 Übungen 20

2 Die Eulersche Differentialgleichung **23**

2.1 Die Grundaufgabe 23
2.2 Herleitung der Eulerschen Differentialgleichung 26
2.3 Lemma von du Bois–Reymond 29
2.4 Die Eulersche Gleichung für die Grundaufgabe 31
2.5 Variationsprobleme mit Nebenbedingungen 34
2.6 Die notwendige Bedingung 2. Ordnung 38
2.7 Ein quadratisches Problem 42
2.8 Übungen 48

3 Variationsprinzipien in der Mechanik **52**

3.1 Newtonsche Gesetze 52
3.2 Erhaltungssätze in abgeschlossenen Systemen 58
3.3 Lagrange–Mechanik 61
3.4 Hamilton–Mechanik 64
3.5 Übungen 69

4 Hinreichende Bedingungen **71**

4.1 Stückweise differenzierbare Funktionen 71
4.2 Integralfunktionale 74
4.3 Extremalen 76
4.4 Extremalenfelder 80
4.5 Zum Problem der Brachistochrone 88
4.6 Zum Newtonschen Widerstandsproblem 90
4.7 Übungen 92

5 Existenzfragen **95**
5.1 Aufgabenstellung 95
5.2 Existenzaussagen 97
5.3 Unterhalbstetigkeit von Integralfunktionalen 101
5.4 Konvexität von Integralfunktionalen 106
5.5 Anhang: Funktionalanalysis 107
5.6 Anhang: Konvexe Funktionen 110
5.7 Übungen 115

Literatur **v**

Einleitung

Die Bezeichnung „Variationsrechnung“ geht zurück auf **L. Euler** (1764: „Elementa calculi variationum“). Erste Aufgaben, die in der Variationsrechnung behandelt werden, wurden im Altertum (**Zenodorus, Pappus,..**) gestellt. Es sind dies Aufgaben, die mit den kleinsten und größten Werten (geometrischen Inhalts) zusammenhängen.

Eine nicht ins Detail gehende Definition der Variationsrechnung könnte folgendermaßen lauten: Die Variationsrechnung beschäftigt sich mit in besonderer Weise strukturierten Verallgemeinerungen der Aufgabe

> Es ist ein Extremum einer reellen Funktion auf irgendeiner Teilmenge der reellen Zahlen zu finden.

Die Verallgemeinerung besteht darin, daß die Funktion nicht auf einer Teilmenge der reellen Zahlen definiert ist, sondern daß deren Variablen reelle Funktionen sind, die zusätzliche Bedingungen zu erfüllen haben. Die Aufgabe ist damit, ein Problem in einem Funktionenraum unendlicher Dimension.

Nachdem die Brüder **Bernoulli** (Johann und Jakob) die Problemstellung u.a. anhand der Brachistrochrone populär gemacht hatten, entwickelte sich die neue Disziplin „Variationsrechnung“; **Euler, Lagrange, Legendre** waren ihre Begründer. Von ihr gingen starke Impulse für die Weiterentwicklung der Differential– und Integralrechnung aus. Das starke Interesse an der Variationsrechnung ist durch die Physik (Entdeckung der Variationsprinzipien in der Optik und der Mechanik) und im Gefolge durch die Weltanschauung jener Zeit zu erklären, die in verschiedenen philosophisch und theologisch begründeten Extremalprinzipien wie dem Prinzip der kleinsten Wirkung (**Maupertius**) ihren Ausdruck fand. Fortgeführt wurde die stürmische Entwicklung durch **Jakobi, Hamilton, Weierstrass**. Das Beispiel von Weierstrass, mit dem er die Behauptung, daß jedes nach unten beschränkte stetige Funktional auf einer abgeschlossenen, beschränkten Menge sein Minimum annimmt (das sogenannte Dirichletsche Prinzip) widerlegte, führte zu einem eingehenden Studium des Begriffs der Kompaktheit. In diesem Jahrhundert haben Beiträge von **Hilbert, Caratheodory, Bolza**, und **Kneser** einen gewissen Abschluß der Variationsrechnung in ihrer ursprünglichen Intention erbracht. Neue Anstöße für die Beschäftigung mit der Variationsrechnung und ihre Erweiterung gingen aus von der Entdeckung des Maximumprinzips in der Steuerungstheorie (**Pontryagin, Boltyanskij, Gamkrelidze, Mishenko, Hestenes**. Aktuell ist die Entwicklung der Variationsrechnung für periodische Aufgaben (Hamiltonsche Systeme) und für Aufgaben, die auf partielle Differentialgleichungen führen (Minimalflächen, Elastizitätstheorie).

Angestrebte Resultate der Variationsrechnung sind: Existenz von Lösungen (direkte Methoden), notwendige und hinreichende Bedingungen für Lösungen (indirekte Methoden), Regularitätsbetrachtungen für Lösungen. Die Resultate dazu lassen sich mit dem Werkzeug der „klassischen“ Analysis entwickeln, funktionalanalytische Hilfsmittel sind spätestens dann sehr hilfreich, wenn die klassischen Aufgabenstellungen in Richtung periodische Lösungen und Steuerungstheorie erweitert werden.

In dieser Vorlesung zur Variationsrechnung wollen wir uns auf die ursprünglichen Ideen und deren Umsetzung beschränken, „modernere“ und aktuellere Entwicklungen sind vor allem im Umfeld der Steuerungstheorie angesiedelt. Im einführenden Kapitel skizzieren wir die auch vielfach in der Literatur angeführten Beispiele; dabei ergeben sich schon die wesentlichen Fragen der Variationsrechnung. Im zweiten Kapitel leiten wir die Eulersche Differentialgleichung ab. Sie ist das herausragende Hilfsmittel beim Auffinden von Lösungskandidaten. Im Kapitel über Mechanik und Variationsrechnung wollen wir drei grundsätzliche Ansätze der klassischen Mechanik skizzieren: Newtonsche Gesetze, Lagrange–Formalismus, Hamiltonsche Systeme. Das Kapitel über die Wertefunktion ist hier nur von untergeordneter Bedeutung, ist aber als Objekt sehr wichtig in der Steuerungstheorie. Hinreichende Bedingungen werden im 4. Kapitel betrachtet. Sie sind erforderlich, um von Lösungskandidaten nachzuweisen, dass sie wirklich Lösungen der gestellten Aufgabe sind. Das abschliessende Kapitel über Existenzfragen macht u.a. die Bedeutung von funktionalanalytischen Hilfsmitteln deutlich.

Die folgende ziemlich vollständige Aufstellung der Buchliteratur ist aufgeteilt in Literatur zur Variationsrechnung und zur Theorie (optimaler) Steuerung, die hier noch fast gar nicht zur Sprache kommt. Aus dem 1. Teil sind hervorzuheben [Fu], [Go] (historische Bezüge), [C1], [Kn], [Ws] (Vorlesungsausarbeitungen der am Zustandekommen einer vollständigen Theorie Beteiligten) und [Ce], [Ek], [ET], [Tr] (moderne Darstellungen und Weiterführungen der klassischen Variationsrechnung); als einzigen Verweis zur Literatur über geodätische Linien haben wir [Ba] aufgenommen. Dort findet man einen Überblick der Theorie der Variationsrechnung auf Mannigfaltigkeiten und eine ausführliche Aufstellung der dazugehörenden Literatur. Die folgenden Aufzeichnungen versuchen, einen eigenständigen Weg durch die Theorie zu finden.

Kapitel 1

Einführung in die Problemstellung

Wir gehen hier der Begründung der Variationsrechnung anhand von Beispielen nach und leiten auf heuristischem Weg die Eulersche Differentialgleichung, die zentrale Gleichung der Variationsrechnung, ab.

1.1 Kürzeste Verbindung zweier Punkte

Sei $\mathbb{R}^n$ vesehen mit dem euklidischen Abstand $|\cdot|$. Also

$$|x| = \sqrt{< x, x >} \text{ mit } < x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ , falls } x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)\,.$$

$< \cdot, \cdot >$ heisst euklidisches Skalarprodukt.

In der Ebene ist die kürzeste Verbindungskurve zwischen zwei Punkten P_0, P_1 zu finden. Sind die (kartesischen) Koordinaten von P_0 und P_1 gegeben durch (x_0, y_0) bzw. (x_1, y_1) mit $x_0 < x_1$ und ist eine die Punkte P_0, P_1 verbindende Kurve γ gegeben als

$$[0, 1] \ni t \longmapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2,$$

so stellt das Integral

$$\int_0^1 |\gamma'(t)| dt$$

die Länge der verbindenden Kurve dar; hierbei ist $\gamma' = (x', y')$. (Kurven, für die eine Länge existiert, werden rektifizierbar genannt.) Um diese Lösungsformel verwenden zu dürfen, reicht es aus, dass γ stückweise (stetig) differenzierbar ist. Damit schränken wir die Menge der zulässigen Verbindungskurven stark ein:

Wir lassen nur **stückweise stetig differenzierbare Kurven** zu.

Eine solche zulässige Kurve ist ein Segment der Geraden durch P_0 und P_1:

$$\gamma_0(t) := (1 - t)(x_0, y_0) + t(x_1, y_1) \quad , t \in \mathbb{R}.$$

Also gilt für die „minimale Länge“ $L_{\min}$ sicherlich

$$L_{\min} \leq \int_0^1 |\gamma_0'(x)| dx = \int_0^1 |(x_0, y_0) - (x_1, y_1)| dx = |P_0 - P_1|\,.$$

Wir wollen natürlich die naheliegende Vermutung

$$L_{\min} = |P_0 - P_1| \tag{1.1}$$

verifizieren. Dazu reicht es aus, zu zeigen, daß für jede zulässige Kurve γ

$$|P_0 - P_1| \le \int_0^1 |\gamma'(t)|dt$$

gilt. Aus dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung folgt

$$P_0 - P_1 = \gamma(1) - \gamma(0) = \int_0^1 \gamma'(t)dt\,,$$

wobei dies koordinatenweise zu verstehen ist. Also

$$|P_0 - P_1| \le \int_0^1 |\gamma'(t)|dt\,.$$

Wir haben nun gesehen, daß die kürzeste Kurve, die zwei Punkte in der Ebene verbindet, Abschnitt einer Geraden ist. Damit wissen wir dies auch für die sogenannten abwickelbaren Flächen wie Kegel und Zylinder; die kürzesten Verbindungskurven sind hier gegeben durch die entsprechenden Geraden auf der abgewickelten Ebene.

Die Kugeloberfläche ist nicht abwickelbar. Trotzdem können wir ähnlich wie in der Ebene vorgehen, allerdings haben wir die ebenen Koordinaten durch die angepassten Kugelkoordinaten zu ersetzen: ein Punkt auf der Oberfläche wird festgelegt durch Längswinkel ϑ und Breitenwikel ϕ; siehe Abbildung 1.1.

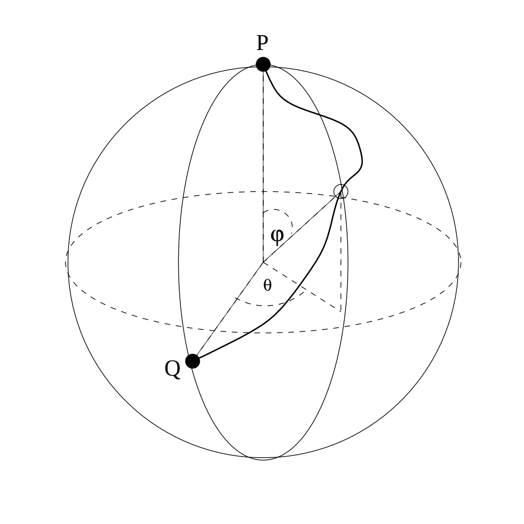

Abbildung 1.1: Grosskreise

Seien P, Q Punkte auf der Kugel mit Radius $R > 0$, sei P o.E. der Nordpol. Dann beschreiben wir eine stückweise stetig differenzierte Kurve, die Punkt P mit Q verbindet durch

$$\gamma(t) := (R\cos\vartheta(t)\sin\varphi(t), R\sin\vartheta(t)\sin\varphi(t), R\cos\varphi(t)), t \in [0,1],$$

wobei die Achse $\vartheta = 0$, so gewählt ist, dass $\vartheta(1) = 0$ gilt. Wir erhalten in Kurzschreibweise

$$\gamma' = R(-\sin\vartheta\;\vartheta'\sin\varphi + \cos\vartheta\cos\varphi\;\varphi', \cos\vartheta\;\vartheta'\sin\varphi + \sin\vartheta\cos\varphi\;\varphi', -\sin\varphi\;\varphi')$$

und damit als Länge der Kurve

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|dt = R\int_0^1 \sqrt{\sin^2\varphi(t)\vartheta'(t)^2 + \varphi'(t)^2}dt\,,$$

woraus die Abschätzung

$$L(\gamma) \geq R \int_0^1 \varphi'(t)dt = R\varphi(1)$$

(mit $\varphi(0) = 0$) folgt. In der Abschätzung besteht Gleichheit genau dann, wenn

$$\varphi'(t) \text{ und } \sin^2\varphi(t)\vartheta'(t)^2 = 0\,, t \in [0,1],$$

gilt. Unter der Bedingung $\varphi(t) \in (0,\pi)$ erhalten wir dann

$$\vartheta'(t) = 0, t \in [0,1], \text{ d.h. } \vartheta(t) = \vartheta(1) = 0\,.$$

Fügt man diese Bedingungen zusammen, sieht man, dass es sich bei der kürzesten verbindenden Kurve, um den kurzen Bogen ($\varphi \in (0,\pi)$!) eines Großkreises handelt.

Ein **Großkreis** entsteht durch den Schnitt einer Ebene durch den Kugelmittelpunkt mit der Kugeloberfläche. Die Großkreise spielen daher auf der Kugeloberfläche die gleiche Rolle wie die Geraden in der Ebene. Allgemein nennt man kürzeste Verbindungen von zwei Punkten einer Fläche **Geodätische**. Die Frage nach der Existenz solcher Objekte wird zweckmäßigerweise im Rahmen Riemannscher Mannigfaltigkeiten behandelt, da dann unterschiedliste geometrische Beispiele erfassbar sind. (Vage: Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum, der lokal wie der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ aussieht und der ein positiv definites inneres Produkt auf dem Raum der Tangentialvektoren besitzt; damit ist die Länge einer Kurve definierbar). Aus einer Theorie über Geodätische in Riemannschen Mannigfaltigkeiten leiten sich Ergebnisse ab zur Strukturtheorie von Mannigfaltigkeiten, zu periodischen Lösungen in der Mechanik und zu Bahnkurven in der allgemeinen Relativitätstheorie. Wir kommen andeutungsweise zu von Zeit zu Zeit darauf zurück. Als einfach zu überschaubarer Spezialfall von Flächen, in denen Geodätische bestimmt werden können, sind die in die Ebene abwickelbaren Flächen zu nennen (Kegel, Zylinder, ...); die Geodätischen sind hier gegeben durch die entsprechenden Geraden auf der abgewickelten Ebene.

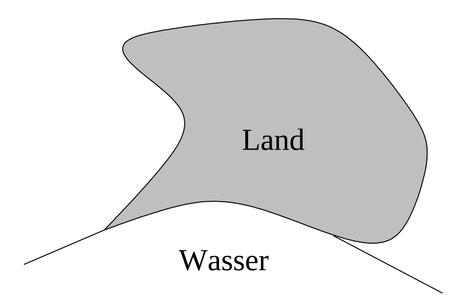

Abbildung 1.2: Das Problem der Dido

1.2 Das Problem der Dido

Vergil berichtet, daß der Königin Dido an der Nordküste von Afrika eine Provinz von der Größe zugesagt wurde, die mit der Haut eines Ochsens „eingeschlossen“ werden könne. Dido ließ die Haut in (dünne) Streifen schneiden, daraus ein „Seil“ mit Länge l fertigen und auslegen. Skizze dazu in Abbildung 1.2

Als beste Lösung wurde bei gerader Küste der Halbkreis angesehen. Das Problem läßt sich mathematisch so umformulieren:

> Unter allen rektifizierbaren geschlossenen Jordankurven mit vorgegebener Länge l ist diejenige zu bestimmen, welche den inhaltsgrößten Bereich umschließt.

(Eine geschlossene Jordankurve in $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$, die auf (a,b) injektiv ist; $[a,b]$ ist das zugehörige Parameterintervall).

Anschaulich drängt sich sofort auf, daß die einzige Lösung des Problems der Kreis mit Radius $\frac{l}{2\pi}$ ist. Diese leicht aufzustellende Vermutung läßt sich jedoch offenbar nicht beweisen, ohne auf tiefliegende Hilfsmittel zurückzugreifen.

Ist die Aufgabe sinnvoll gestellt? Liegt eine geschlossene Jordankurve γ vor, so zerlegt sie nach dem Jordanschen Kurvensatz die Ebene in beschränktes Innengebiet G_1 und ein unbeschränktes Außengebiet G_2; der Graph von γ ist der Rand von G_1. Da G_1 beschränkt und von einer rektifizierbaren Jordankurve berandet ist, ist G_1 Jordan–meßbar. Es ist also in der Tat sinnvoll, nach derjenigen rektifizierbaren geschlossenen Jordankurve vorgegebener Länge zu fragen, die den inhaltsgrößten Bereich umschließt.

Ist G ein Bereich, der von der Jordankurve γ berandet ist, so ist – bei geeigneter Orientierung des Randes ∂G – folgende Formel gültig für den Inhalt $I(G)$ von G:[1]

$$I(G) = \frac{1}{2}\int_{\partial G} x dy - y dx \tag{1.2}$$

Wir verschärfen die Voraussetzung über den Rand von G : Die berandende Kurve γ sei stückweise stetig differenzierbar. Also heisst eine Randkurve **zulässig**, wenn gilt:

$$\gamma : [0,l] \ni t \longmapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2,\ x(0) = x(l),\ y(0) = y(l)\,;$$
x, y sind stückweise stetig differenzierbar.

O.E. $l = 2\pi$. Dann wird (1.2) zu

$$I(G) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt$$

Da wir uns die Kurve mit der Bogenlänge parametrisiert denken können, gilt bis auf die endlich vielen Punkte $t \in [0, 2\pi]$, in denen γ nicht differenzierbar ist,

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1\,, \text{ also } \int_0^{2\pi} \{x'(t)^2 + y'(t)^2\}dt = 2\pi\,,$$

und es bleibt die **isoperimetrische Ungleichung**[2]

$$\int_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt \le \int_0^{2\pi} (x'(t)^2 + y'(t)^2)dt \tag{1.3}$$

zu zeigen. Dazu nehmen wir an, daß x, y auf $\mathbb{R}$ 2π -periodisch fortgesetzt seien. Wir können dann für x und y die Fourierentwicklung im Sinne von $L_2(0,\pi)$ ($\sim$ soll dies ausdrücken) hinschreiben:

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)\,,\ y(t) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k \cos kt + d_k \sin kt)$$

Da x, y stückweise stetig differenzierbar sind, können wir auch

$$x'(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k(b_k \cos kt - a_k \sin kt)\,,\ y'(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k(d_k \cos kt - c_k \sin kt)$$

[1] Siehe Heuser, H., Analysis 2, S. 498 und dortige Hinweise

[2] ἴσος (griech.) = gleich; περίμετρος (griech.) = Umfang.

verwenden. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}(x(t)y'(t)-y(t)x'(t))dt &= \sum_{n=1}^{\infty} n(a_nd_n-b_nc_n)-\sum_{n=1}^{\infty} n(b_nc_n-a_nd_n)\\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} n(a_nd_n-b_nc_n)\,,\\
\int_0^{2\pi}(x'(t)^2+y'(t)^2)dt &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2)\,.
\end{aligned}$$

Der Rest ergibt sich aus folgender Identität ($n \in \mathbb{N}$):

$$2n(a_nd_n-b_nc_n)-n^2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2) = -(na_n-d_n)^2-(nb_n+c_n)^2-(n^2-1)(c_n^2+d_n^2)\,.$$

Man beachte, daß wir in (1.3) Gleichheit genau dann haben, wenn

$$a_1 = d_1, b_1 = -c_1\,;\; a_n = b_n = c_n = d_n = 0\,,\; n \geq 2\,,$$

gilt. Dies bedeutet, daß

$$x(t) = \frac{a_0}{2}+a_1\cos t+b_1\sin t \quad,\; y(t) = \frac{c_0}{2}-b_1\cos t+a_1\sin t \quad, 0 \leq t \leq 2\pi\,,$$

ist. Dies ist die Parameterdarstellung eines Kreises mit Zentrum $(\frac{a_0}{2},\frac{c_0}{2})$ und Radius $\sqrt{a_1^2+b_1^2}$.

In Abschnitt 2.5 kommen wir auf dieses Problem zurück und behandeln es als Variationsproblem mit Nebenbedingungen.

1.3 Fermatsches Prinzip

Welche Bahn beschreibt ein Lichtstrahl in einem (inhomogenen) Medium? Eine erste Antwort auf diese Frage geht zurück auf **Hero von Alexandrien** (125 v. Chr.). Er zeigt, daß ein Lichtstrahl bei der Reflektion an einem Spiegel den kürzesten Weg vom Objekt zum Auge des Betrachters nimmt. Fermat (1662) stützt seine Antwort auf die physikalische Annahme, daß Licht sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet und diese Geschwindigkeit in dichterem Medium kleiner ist als in einem dünneren Medium (Descartes ging vom Gegenteil aus!). Sein **Extremalprinzip** lautet:

Der Lichtstrahl nimmt die Bahn, die in kürzester Zeit durchlaufen wird.

Für den Fall zweier homogener Medien, die durch eine Ebene getrennt sind, bedeutet dies (siehe Abbildung 1.3): Mache

$$t(x) := \frac{1}{c_1}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{1}{c_2}\sqrt{(d-x)^2+b^2}$$

bezüglich x minimal. Dabei sind c_1, c_2 die Ausbreitungsgeschwindigkeiten im Medium 1 bzw. 2.

Als notwendige Bedingung erhalten wir – Fermat hatte dazu schon die entsprechenden Kenntnisse, wir bedienen uns der Analysis –

$$\frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{d-x}{c_2\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = 0$$

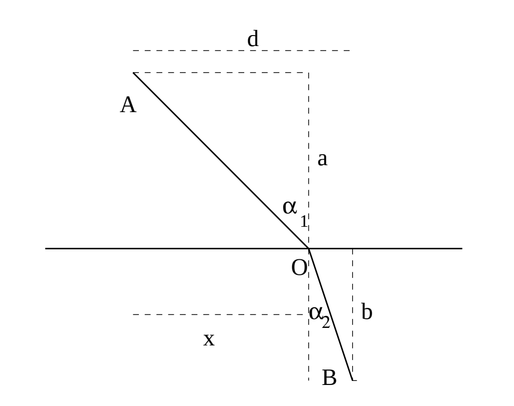

Abbildung 1.3: Brechung von Licht

d.h.

$$\frac{1}{c_1} \cdot \frac{x}{|AO|} = \frac{1}{c_2} \cdot \frac{d-x}{|OB|}.$$

Daher

$$\frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_2}. \tag{1.4}$$

Fermat hat auch gezeigt, daß diese Bedingung hinreichend dafür ist, daß der Weg $\overline{AOB}$ die kürzeste Laufzeit besitzt.

Das Gesetz (1.4) wurde von **Snellius** (1621) am Beispiel der Lichtstrahlen entdeckt.

1.4 Brachistochrone

Den kräftigsten Anstoß zur Entwicklung der Variationsrechnung gab Johann Bernoulli, als er im Jahre 1696 das folgende Problem stellt:

Wenn in einer vertikalen Ebene zwei Punkte A und B gegeben sind, so soll man einem beweglichen Punkt M eine Bahn $\widehat{AB}$ anweisen, auf welcher er von A ausgehend vermöge seiner eigenen Schwere in kürzester Zeit nach B gelangt. Dabei soll die Anfangsgeschwinigkeit v_0 als gegeben betrachtet werden.

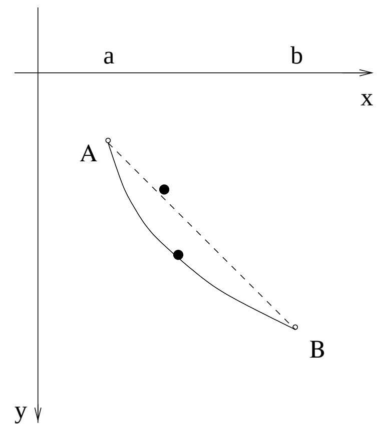

Abbildung 1.4: Brachistochrone

Lösungen zu dieser Aufgabe wurden (im Rahmen eines Art Wettbewerb) in den Jahren 1696/1697 vorgelegt von Johann und Jakob Bernoulli, Newton und Leibniz. Bevor wir sie hier mathematisch analysieren, eine wichtige Vorbemerkung.

Bemerkung 1.1 Um eine einfache mathematische Formulierung zu erreichen, beschränken wir uns oft auf Kurven, die Graph einer Funktion sind. Eine solche Annahme wird in vielen Beispielen hilfreich sein; in der Literatur ist sie oft – meist stillschweigend angenommen – anzutreffen. Die Lösung des ursprünglichen Problems erfordert dann (im allgemeinen nicht einfache) Zusatzüberlegungen. Zwar ist dieses Vorgehen so nicht nötig (wir kommen später darauf zurück), bringt aber sehr schnell Einsichten, die man in speziellen Beispielen gewinnen will; siehe Abschnitt 1.8. □

Seien die Koordinaten von A und B (a, y_A) bzw. (b, y_B) mit $a < b$. Für unser Beispiel der **Brachistochrone**[3] bedeutet die Annahme aus Bemerkung 1.1, daß die Bahn des beweglichen Punktes durch eine Funktion y von x dargestellt werden kann: $y : [a, b] \to \mathbb{R}$. Die Durchlaufzeit sei T, die Bogenlänge von y sei l. Sei $s(t)$ die zur Zeit $t \in [0, T]$ durchlaufene Bogenlänge und sei $V(t)$ der Betrag der Geschwindigkeit zur Zeit t. Wir haben

$$\frac{ds}{dt}(t) = V(t) \ , \quad t \in [0, T].$$

[3] $\beta\rho\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\varsigma$ (griech.) = kürzest , $\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$ (griech.) = Zeit

Also erhalten wir mit Variablensubstitution $r = s(t)$ die folgende Darstellung für T:

$$T = \int_0^T dt = \int_0^l \frac{dr}{W(r)}\,,\; W(r) := V(s^{-1}(r))\,.$$

Mit der Variablensubstitution

$$r := l(x) := \int_a^x \sqrt{1 + y'(q)^2}dq$$

und der Setzung

$$v(x) := W(l(x)), x \in [a,b],$$

folgt

$$T = \int\limits_0^l \frac{dr}{W(r)} = \int\limits_a^b \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{v(x)}dx\,.$$

Nun fehlt uns ein Ansatz für $x \longmapsto v(x)$; $v(x)$ ist der betrag der geschwindigkeit, wenn sich die Kugel in der Position $(x, y(x)$ befindet. Aus dem Energieerhaltungssatz, abgeleitet aus dem Newtonschen Gesetz – man könnte sich auch auf Galilei berufen – folgt

$$\frac{m}{2}v(x)^2 - mgy(x) = \frac{m}{2}v_0^2 - mgy_0\,,$$

wobei $y_0 = y(a)$ und g die Gravitationskonstante ist. Beachte, daß wir die y-Achse in die Richtung der Gravitationskraft gelegt haben. Dies führt uns mit $c := v_0^2 - 2gy_0$ auf die Formel

$$T = \int\limits_a^b \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)-c}}dx\,.$$

Es ist also das „Funktional“

$$\int\limits_a^b L(x, y(x), y'(x))dx \quad \text{mit} \quad L(x,y,p) := \sqrt{\frac{1+p^2}{2gy-c}}$$

bezüglich der zur Konkurrenz zugelassenen Kurven $[a,b] \ni x \longmapsto (x, y(x)) \in \mathbb{R}^2$ zu minimieren. Die Lösung ist eine Zykloide; G. Galilei gab 1637 als Lösung einen Kreisbogen an und machte damit schon mal klar, dass eine Gerade nicht als optimale Kurve in Frage kommen sollte. Eine allgemeine Zykloide ist eine Kurve, die folgende Parameterdarstellung zuläßt:

$$\gamma : [\tau_0, \tau_1] \ni \tau \longmapsto (\alpha + \beta(\tau + \sin\tau), \alpha + \beta(1 + \cos\tau)) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Die Parameter α, β bestimmen sich aus $\gamma(\tau_0) = (a, y(a))$, $\gamma(\tau_1) = (b, y(b))$. Eine Zykloide entsteht, wenn man die Bahn beobachtet, die ein Punkt auf dem Rand einer Kreisscheibe beschreibt, wenn diese auf einer Ebene rollt.

Johann Bernoulli stützte seine Argumentation auf das eben bekannt gewordene Fermatsche Prinzip (siehe Abschnitt 1.3). Er schreibt:[4]

[4]Siehe: Struick, D.J., A Source Book in Mathematics, Cambridge, 1969.

Aber nun sehen wir sofort, dass die Brachistochrone diejenige Kurve ist, der ein Lichtstrahl auf seinem Weg durch ein Medium folgen würde, dessen Dichte umgekehrt proportional zu der Geschwindigkeit ist, die ein schwerer Körper während seines Falles erlangt. In der Tat: ob der Geschwindigkeitszuwachs von der Beschaffenheit eines mehr oder weniger widerstehendem Mediums abhängt oder ob wir das Medium beseite lassen und annehmen, dass die Beschleunigung von einer anderen Ursache erzeugt wird – aber entsprechend demselben Gesetz wie dem der Schwere – : in beiden Fällen wird die Kurve in der kürzesten Zeit durchlaufen. Wer verbietet uns, die eine durch die andere zu ersetzen?

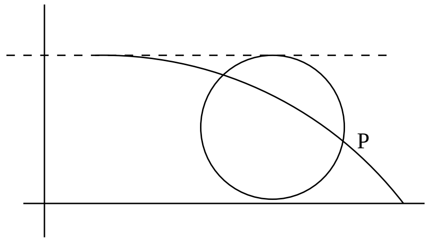

Abbildung 1.5: Die Zykloide

Er dachte sich ein Medium in der Ebene aus einzelnen homogenen dünnen Schichten zusammengesetzt und durch die Ebenen $y = y_\nu$ voneinander getrennt. Für jede einzelne Schicht $(y_\nu, y_{\nu+1})$ nahm er die Geschwindigkeit v_ν proportional zu

$$\sqrt{y_\nu - h}$$

(h Konstante) an. Dies ist abgeleitet aus den Überlegungen von G. Galilei. Nach dem Snelliusschen Berechnungsgesetz ergibt sich für den „Lichtstrahl" ein Polygonzug, bei dem der Sinus des Winkels, den der Lichtstrahl jeweils mit der y–Achse einschließt, proportional zu $\sqrt{y_\nu - h}$ ist. Nun vollzieht er den Grenzübergang zu unendlich dünnen Schichten. Der Sinus des Winkels, den der „Lichtstrahl" mit der Vertikalen einschließt, ist gegeben durch $\dfrac{1}{\sqrt{1+y'(x)^2}}$. Somit erhielt Johann Bernoulli folgende Differentialgleichung für die Brachistochrone

$$\frac{1}{\sqrt{2g(y-h)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = K\,. \tag{1.5}$$

Dabei ist die Proportionalitätskonstante passend gewählt. Mit den Größen

$$\eta := 2gK^2(y-h),\;\; \xi := 2gK^2 x$$

erhalten wir ($\eta = \eta(\xi)!$)

$$(1+\eta'^2)\eta = 1 \tag{1.6}$$

Nun war für J. Bernoulli klar, daß die Lösung eine Zykloide ist. Man löst so: Aus physikalischen Gründen reduziert sich (1.6) auf

$$\eta' = \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}}\,,\;\; \text{d.h.}\;\; \int \sqrt{\frac{v}{1-v}}\,dv = \xi + c\,.$$

Die Substitution $v = \sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t)(0 \le t \le \frac{\pi}{2})$ führt zu

$$\xi + c = 2\int \sin^2 t dt = \frac{1}{2}(2t - \cos 2t)\,.$$

Also haben wir die Parameterdarstellung

$$\eta(t) := \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,,\, \xi(t) := \frac{1}{2}(2t - \sin 2t)\,,\, t \in \mathbb{R}\,,$$

einer Lösung. Also haben wir nun

$$x(\varphi) = r(\varphi - \sin\varphi)\,,\; y(\varphi) = r(1-\cos\varphi)\,,\; \varphi \in \mathbb{R}\,,$$

mit $r := \dfrac{1}{4gK^2}$ und der Festlegung $x(0) = 0, y(0) = 0$; in dieser Schreibweise ist r der Radius des abrollenden Rades, das die Zykloide erzeugt. Wir werden später sehen, daß die Differentialgleichung (1.6) gerade die Eulersche Differentialgleichung zum Variationsproblem „Brachistochrone“ darstellt.

Newton gab als Lösung die Zykloide an, ohne den Weg dahin zu verraten. Zusätzlich gab er auch eine Konstruktion der optimalen Zykloide an. Dies geht so; siehe Abbildung 1.6. Gegeben seien Punkte A, B und die Achse (x–Achse) $\overline{AZ}$. Konstruiere einen Bogen $\widehat{AP}$ irgendeiner Zykloide. Verbinde nun A mit B; es entsteht der Schnittpunkt Q. Konstruiere den Punkt C auf der Strecke AZ, so dass

$$|\overline{AC}| : |\overline{AP}| = |\overline{AB}| : |\overline{AQ}|$$

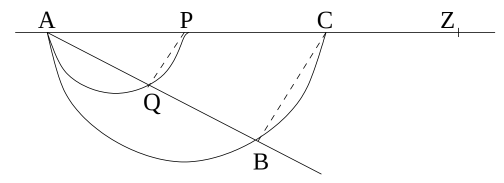

Abbildung 1.6: Zykloidenkonstruktion

gilt. Zeichne nun eine Zykloide als Bogen $\widehat{ABC}$; der Radius des abrollenden Rades ist nun ja bekannt.

Es war im 17. Jahrhundert eine ziemliche Überraschung, dass sich bei der Analyse des Problems der Brachistochrone herausstellte, dass die Lösung eine Zykloide ist, von der man schon wusste, dass sie die **Tautochrone**[5] ist: Von jedem Punkt der (nach oben offenen) Zykloide benötigt ein Massenpunkt unter dem Einfluss der Schwerkraft gleich lange bis zum tiefsten Punkt der Zykloide. Diese Eigenschaft kann man sich beim Bau einer Pendeluhr zu Nutze machen, da dann die Schwingdauer konstant ist: Man hat mit einer variablen Aufhängung dafür zu sorgen, dass das Pendel der Zykloidenkurve folgt. Für ein Pendel, das fest aufgehängt ist und daher einem Kreisbogen folgt, trifft die Konstanz der Schwingdauer nur näherungsweise bei kleinen Ausschlägen zu.

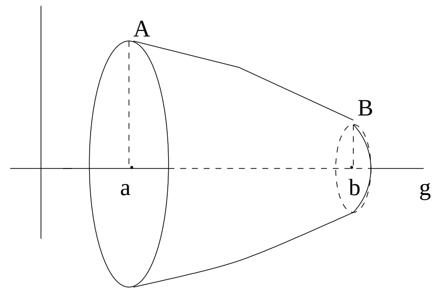

Abbildung 1.7: Rotationsoberfläche

Es ist nachzurechnen, dass die **Evolute**[6] einer Zykloide wieder eine Zykloide ist.

1.5 Rotationsfläche kleinsten Flächeninhalts

In der Ebene seien eine Gerade g und zwei Punkte A, B gegeben. A, B sollen durch eine Kurve γ so verbunden werden, dass die Rotationsoberfläche, die man erhält, wenn man die Kurve

[5] τὸ αὐτόν (griech.) = dasselbe

[6] Die Evolute einer Kurve Γ ist eine Kurve Γ_e, die aus den Krümmungsmittelpunkten von Γ besteht; sie ist zugleich Einhüllende (Enveloppe) der Normalen von Γ.

γ um die Gerade g dreht, kleinsten Flächeninhalt hat. Offenbar können wir o.E. annehmen, daß g die x–Achse ist.

Seien die Koordinaten von A, B gegeben als (a, y_a) bzw. (b, y_b) mit $y_a > 0, y_b > 0$. Sei $y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit

$$y(a) = y_a, y(b) = y_b \text{ und } y(x) > 0, x \in [a, b].$$

Dann beschreibt

$$\gamma_y : [a, b] \ni x \longmapsto (x, y(x)) \in \mathbb{R}^2$$

eine Kurve, die A mit B verbindet. Durch Rotation von γ_y um die x–Achse entsteht ein Rotationskörper, dessen Oberfläche (ohne die „Deckelbegrenzung") bekanntlich

$$I(y) := 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}dx$$

ist. Wir interessieren uns für die Kurve γ_y, für die der Flächeninhalt $I(y)$ minimal ist. Auf die Lösung müssen wir hier noch verzichten.

Nun ist natürlich einzuwenden, daß es Kurven γ von A nach B gibt, die nicht als γ_y darstellbar sind, oder die nicht von einem y, das stetig differenzierbar ist, erzeugt werden. Abgesehen davon, daß das obige Problem für sich ein interessantes Problem ist, verliert man nichts an Allgemeinheit: Man kann sich nämlich überlegen, daß die ausgeschlossenen Kurven nicht als Lösungen in Frage kommen (siehe Bemerkung 1.1).

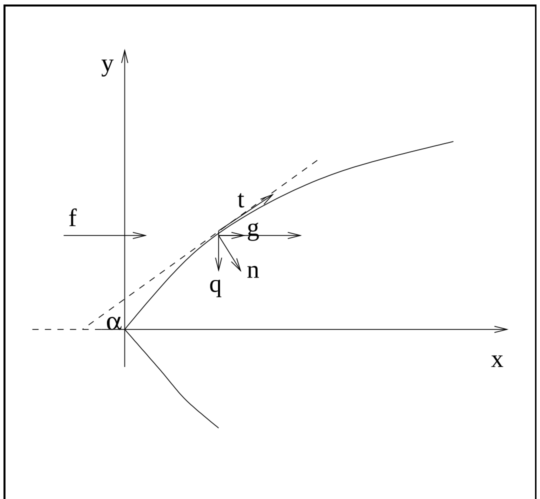

Abbildung 1.8: Widerstandsproblem

Ist $b - a$ nicht allzu groß, so kann man der Aufgabe folgendes **Plateausches Experiment** zuordnen: Wir montieren zwei kreisförmige Drahtringe so auf eine Achse, daß die Achse durch die Mittelpunkte der beiden Kreise hindurchgeht und auf den Ebenen der beiden Kreise senkrecht steht. Tauchen wie dieses Gerüst in eine Seifenlösung, so wird eine Rotationsfläche entstehen, wie wir sie in der obigen Aufgabenstellung wünschen, da eine aus Seifenlösung hergestellte Haut auf Grund der Oberflächenspannung das Bestreben hat, eine minimale Oberfläche zu bilden.[7]

1.6 Das Widerstandsproblem von Newton

Das Problem der Brachistochrone hat auf die Entstehung der Variationsrechnung entscheidendenden Einfluss ausgeübt, aber älter ist Newtons Problem eines axial angeströmten Rotationskörpers minimalen Widerstands. Newton hat es in seinen „Prinzipien" (1687) dargelegt und dafür eine Lösung ohne Beweis angegeben.

Ein Körper, entstanden durch Rotation des „Graphen" von y um die x–Achse, wird durch ein Medium bewegt, das Widerstand auf den Körper ausübt. Entsprechend seines Gesetzes „actio

[7]Siehe: Polthier, K., Diskrete Minimalflächen im Computerexperiment, Spektrum der Wissenschaften 2/99, 16 – 17.

= reactio“ studierte Newton das Problem, dass der Körper durch das Medium angeströmt werde. Sei f die Kraft, die ein Partikel des Mediums auf eine Flächeneinheit senkrecht zur Rotationsachse ausübt. Newton zerlegt folgendermaßen:

t : tangentiale Komponente; nicht wirksam;

n : normale Komponente;

g : Komponente längs der Rotationsachse;

q : Komponente senkrecht zur Rotationsachse; nicht wirksam.

(t ist nicht wirksam, da Reibungskräfte vernachlässigt werden, q ist nicht wirksam, da diese Kraft aus Symmetriegründen kompensiert wird.) Man liest aus der Abbildung 1.8 ab:

$$n = f \sin \alpha(x)\,,\; g = f \sin^2 \alpha(x)\,,\; \sin^2 \alpha(x) = \frac{y'(x)^2}{1+y'(x)^2}\,,$$

und für den infinitesimalen Widerstand erhalten wir $2\pi y(x) dy(x) f \sin^2 \alpha(x)$. Dies ergibt für den Gesamtwiderstand bei Realisierung der Rotationskurve $x \longmapsto y(x)$

$$R(y) := \int_0^b \frac{y(x)y'(x)^3}{1+y'(x)^2}\,dx\,.$$

Wir unterstellen, dass für den Winkel $\alpha(x)$ (siehe Abbildung 1.8) stets $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ gilt. Vernachlässigt man dies, dann stösst man auf die Tatsache, die schon Legendre aufgefallen war, dass man dann das Widerstandsintegral beliebig klein machen kann. Wir gehen hier noch nicht darauf ein, ebenso lösen wir hier noch nicht das Problem, für einige Spezialfälle von Rotationskörper berechnen wir das Widerstandsintegral. Bechte, dasswir eine Normierung der Konstanten vorgenommen haben ($2\pi := 1$).

Zylinderkörper $y(x) := b\,,\; 0 \le x \le b\,.$

$$R(y) = \frac{b^2}{2} + \int_0^b 0\,dx = \frac{b^2}{2}\,.$$

Kegel $y(x) := x\,,\; 0 \le x \le b\,.$

$$R(y) = \int_0^b \frac{x}{1+1}\,dx = \frac{b^2}{4}\,.$$

Halbkugel $y(x) := \sqrt{b^2 - (x-b)^2}\,,\; 0 \le x \le b\,.$

$$R(y) = \int_0^b \frac{-(x-b)^3}{b^2}\,dx = \frac{b^2}{4}\,.$$

Parabel $y(x) := \sqrt{bx}\,,\; 0 \le x \le b\,.$

$$R(y) = \int_0^b \frac{b^2 x}{4x^2+b^2} dx = \frac{b^2}{8} \ln 5 \sim 0.201\, b^2\,.$$

Kegelstumpf $y(x) := p + x(1 - \frac{p}{b})\,,\ 0 \le x \le b\,.$

$$R(y) = \frac{1}{2}(p^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha) = \frac{1}{4}p^2(3 - \sqrt{5}\sin(2\alpha+\beta)) \text{ mit } \tan\alpha = 1 - \frac{p}{b}\,,\ \tan\beta = \frac{1}{2}\,.$$

Also wird der Widerstand R minimal für den Kegelstumpf, der mit dem Winkel α mit $\tan 2\alpha = 2$, d.h. $\alpha \sim 32^o$ aufgebaut ist; er ist dann $\sim 0.191\,b^2$.

Ohne Beweis – wir liefern ihn im Kapitel 4 nach – geben wir den Widerstand des optimalen Rotationskörpers an. Er beträgt etwa $0.187\,b^2$. Der optimale Kegelstumpf kommt dem optimalen Rotationskörper schon sehr nahe!

Newton ist so von der Richtigkeit seiner Theorie überzeugt, dass er glaubt, „ ... *dass dieser Satz für die Konstruktion von Schiffen nicht ohne Nutzen sein werde.*“ Die Newtonschen Hypothesen und die daraus gezogenen Folgerungen werden aber durch Experimente nicht bestätigt. Die damit zusammenhängende Frage nach der näherungsweisen Gültigkeit des Newtonschen Widerstandsgesetzes im Unterschall– bzw. Überschallbereich wollen wir hier nicht diskutieren, es ist vielfach geschehen; siehe etwa [Fu].

1.7 Eulersche Polygonzugmethode

In den Beispielen, die wir in den Abschnitten 1.4,1.5, 1.6 vorgestellt haben, handelt es sich darum, eine Funktion y zu finden, die unter den Nebenbedingungen, **Randbedingungen** genannt,

$$y(t_0) = y_0 \;\;, y(t_1) = y_1$$

einem Integral

$$I(y) := \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), y'(t))dt$$

einen minimalen Wert zuweist. Also haben wir folgende Aufgabe:

$$P_L \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiere } \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), y'(t))dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1\,. \end{array} \right.$$

Bezüglich des Integranden $L : [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ setzen wir hier in diesem einführenden Teil soviel Glattheit voraus, wie wir für unsere Manipulationen gerade benötigen. So ist die Aufgabenstellung aber immer noch unvollständig, da wir noch nicht festgelegt haben, welche Funktionen y wir zur Konkurrenz zulassen. Hier lassen wir dies noch offen, jedenfalls sollten diese Funktionen (fast überall) differenzierbar sein.

Die Idee, mit der Euler eine notwendige Bedingung für eine Lösung ableitete, stützt sich auf die Kenntnis, wie bei Funktionen mehrerer Veränderlicher die notwendige Bedingung für ein Minimum (ohne Nebenbedingungen) aussieht: Der Gradient hat zu verschwinden! Dazu diskretisiert Euler das Problem. Wir vollziehen dies nach.

Sei $t_0 = s_0 < s_1 < ... < s_N = t_1$ eine äquidistante Zerlegung von $[t_0, t_1]$ mit Schrittweite $h := (t_1 - t_0)N^{-1}$. Setze die die Punkte $(t_0, y_0), (t_1, y_1)$ verbindende Kurve als Polygonzug durch die Punkte $(s_i, y_i), 0 \le i \le N$, an und verwende als Steigung $y'(t)$ in $[s_i, s_{i+1}]$ den Wert

$h^{-1}(y_{i+1}-y_i), 0 \le i \le N-1$. Als naheliegenden Approximation für das Integral schreiben wir dann

$$s(y_1,...,y_{N-1}) = h\sum_{i=0}^{N-1} L(s_i, y_i, h^{-1}(y_{i+1}-y_i))$$

auf. Hierbei sind durch y_0 und y_1 die Nebenbedingungen bereits eingearbeitet, die Funktion s hängt nur von $y_1,...,y_{N-1}$ ab.

Ein extremaler Polygonzug wird durch die notwendige Bedingung

$$\frac{1}{h}\frac{\partial s}{\partial y_i}(y_1,...,y_{N-1}) = 0 \quad , 1 \le i \le N-1\,,$$

definiert. Dies führt zum Gleichungssystem

$$\frac{\partial L}{\partial y}(.)_i - h^{-1}(\frac{\partial L}{\partial y'}(.)_i - \frac{\partial L}{\partial y'}(.)_{i-1}) = 0 \ \ , 1 \le i \le N-1,$$

wobei wir die Abkürzung

$$(.)_i = (s_i, y_i, h^{-1}(y_{i+1}-y_i))\ ,\ 0 \le i \le N-1\,.$$

verwenden. Durch Grenzübergang wird als notwendige Bedingung folgende Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial y}(t,y,y') - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y'}(t,y,y') = 0$$

oder kurz

$$L_y - \frac{d}{dt}L_{y'} = 0 \tag{1.7}$$

nahegelegt. Eine Lösung der Variationsaufgabe P_L sollte also eine Lösung der Differentialgleichung (1.7) sein. Diese Differentialgleichung wird **Eulersche Differentialgleichung** genannt; ihre Lösungen werden als **Extremalen** bezeichnet. Wir können noch nicht von **Lösungen** sprechen, da nur die notwendige Bedingung gelöst wird; siehe das vergleichbare Problem in der Analysis.

Die Herleitung ist natürlich nicht rigoros – Euler war sich dessen sehr wohl bewußt. Wir werden sie später exakt unter Angabe der dazu nötigen Voraussetzungen auf anderem Weg nachrechnen. Ausführlich geschrieben bedeutet sie, falls die Differentiation durchführbar ist:

$$L_{y'y'}y'' + L_{y'y}y' + L_{y't} - L_y = 0\,. \tag{1.8}$$

Sie ist von zweiter Ordnung, wenn stets $L_{y'y'} \ne 0$. Trifft dies zu, so haben wir für das Vorzeichen von $L_{y'y'}$ zwei Möglichkeiten. Da wir die Probleme als Minimumprobleme schreiben, ist $L_{y'y'} > 0$ die im allgemeinen passende Forderung, da dann L bezüglich y' konvex ist; diese Eigenschaft wird uns noch häufiger begegnen. Dass die Gleichung (1.8) von zweiter Ordnung ist, sollte nicht überraschen, denn wir haben ja noch die zwei Randbedingungen $y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1$ zu erfüllen. Dazu ist i.a. eine Schar von Lösungen von (1.8) mit zwei freien Parametern nötig. Verschwindet $L_{y'y'}$ in einem Argument, so hat man im allgemeinen Sonderbetrachtungen anzustellen, auf die wir hier noch nicht eingehen wollen.

Es ist im allgemeinen nicht leicht, die Eulersche Differentialgleichung zu integrieren, d.h. einen vollständigen Satz von Lösungen anzugeben. In einigen Spezialfällen läßt sich dies jedoch bewerkstelligen.

1. Fall: L hängt nicht von y ab, d.h. $L_y = 0$.

Die Eulersche Differentialgleichung reduziert sich auf

$$\frac{d}{dt} L_{y'} = 0$$

entlang einer Lösung. Kann man daher die Gleichung

$$L_{y'} = c_1 \;\; (c_1 \text{ Konstante}) \tag{1.9}$$

nach y' durch $y' = g(t; c_1)$ auflösen, so lassen sich die Lösungen der Eulerschen Differentialgleichung durch Integration bestimmen:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} g(s; c_1)\, ds \; + \; c_2 \;\; (c_2 \text{ Konstante}) \,.$$

Beachte: Der Satz über implizite Funktionen hält für die (lokale) Auflösung von (1.9) nach y' die hinreichende Bedingung $L_{y'y'} > 0$ bereit; siehe oben.

2. Fall: L hängt nicht von t ab, d.h. $L_t = 0$.

Aus der Tatsache, daß die (vollständige) Ableitung von

$$H(y, y') := y' L_{y'} - L$$

nach der „Zeit“ t verschwindet – man rechnet dies mit (1.8) nach – folgt, daß die Eulersche Differentialgleichung sich hier auf die Gleichung

$$y' L_{y'} - L = c_1 \;\; (c_1 \text{ Konstante}) \tag{1.10}$$

reduziert. Wenn man (1.10) nach y' durch $y' = g(y; c_1)$ auflösen kann, so erhält man eine Differentialgleichung

$$y' = g(y; c_1) \,,$$

die man oft durch Trennung der Variablen lösen kann.

Beachte: Der Satz über implizite Funktionen hält für die (lokale) Auflösung von (1.10) nach y' die hinreichende Bedingung $y' \neq 0$ und $L_{y'y'} > 0$ bereit.

Betrachten wir nun die Eulersche Differentialgleichung bei den in den Abschnitten 1.4 und 1.5 diskutierten Beispielen. Im Fall der **Brachistochrone** liegt der zweite Fall vor, denn

$$L(t, y, y') := \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy - c}}$$

hängt nicht von t ab. Die Gleichung (1.10) führt auf

$$\frac{1}{\sqrt{2gy - c}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = k \;\; (k \text{ Konstante}) \,,$$

eine uns schon bekannte Identität. Die Integration dieser Differentialgleichung wurde bereits in Abschnitt 1.4 durchgeführt.

Im Fall der minimalen **Rotationsoberfläche** liegt ebenfalls der zweite Fall vor, denn

$$L(t,y,y') := 2\pi y\sqrt{1+y'^2}$$

hängt ebenfalls nicht von t ab. Die Gleichung (1.10) entspricht hier

$$y\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = k \quad (k \text{ Konstante})\,.$$

Quadrieren ergibt

$$y^2 - k^2y'^2 = k^2$$

und wir sehen sofort (siehe Tabellenwerke), dass

$$y(t;k,d) = k\cosh(\frac{1}{k}t + d)$$

oder

$$y(t;c,d) = \frac{1}{c}\cosh(ct+d) \qquad (1.11)$$

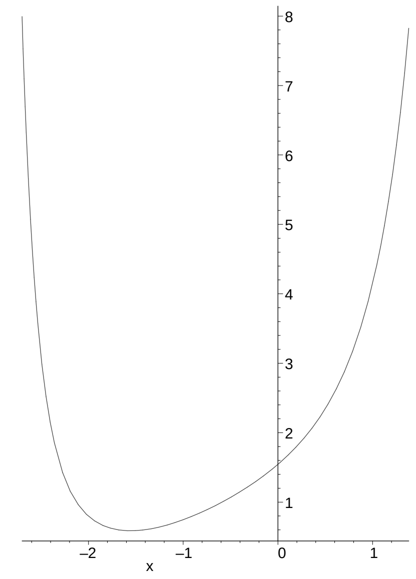

Abbildung 1.9: Auffinden einer Kettenlinie

eine zweiparametrische Schar von Lösungen der Eulerschen Differentialgleichungdarstellt; c,d sind (die noch benötigten) Integrationskonstanten. Jede durch (1.11) induzierte Kurve wird eine **Kettenlinie** genannt, da solche Kurven bei auf Grund der Schwerkraft durchhängenden Ketten auftreten; Galilei skizzierte diese Anwendung schon. Ein weiteres Beispiel stellen Hochspannungsleitungen dar. Legen wir nun die Koordinaten von A,B durch $(0,1)$ bzw. $(1,b)$ fest, so können wir die Existenz einer Kurve der Gestalt (1.11), definiert als Graph einer Funktion, für verschiedene b studieren. Für eine Extremale, gegeben durch (1.11), muß dann

$$1 = \frac{1}{c}\cosh(d) \ \ ,b = \frac{1}{c}\cosh(c+d) \ \text{ d.h. } \ b = \varphi(d) := \frac{\cosh(\cosh(d)+d)}{\cosh(d)} \qquad (1.12)$$

gelten. Die Gleichung (1.12) ist nicht in einfacher Weise nach d auflösbar; siehe Abbildung 1.9 (mit d ersetzt durch x). Wegen

$$\varphi(d) > 0 \ \text{ für alle } d\in\mathbb{R} \ \ , \lim_{d\to\infty}\varphi(d) = \lim_{d\to-\infty}\varphi(d) = \infty\,,$$

ist

$$\overline{\varphi} := \inf_{d\in\mathbb{R}}\varphi(d) > 0.$$

Eine etwas mühsame Rechnung zeigt, daß φ' streng monoton ist. Wir schließen nun:

- Ist $b = \overline{\varphi}$, so gibt es genau eine Extremale durch A und B; die Lösung sollte gefunden sein.
- Ist $b > \overline{\varphi}$, so gibt es genau zwei Extremalen durch A und B; eine davon sollte jedenfalls eine Lösung sein.

- Ist $b < \overline{\varphi}$, so gibt es keine Extremale durch A und B; es existiert keine Lösung im gewählten Rahmen. Dies ist die Situation, in der die Fläche der Kreise um 0 mit Radius 1 bzw. um 1 mit Radius b kleiner ist als jene Rotationsoberfläche, die in der obigen Weise mit einer durch eine stetig differenzierbare Funktion y parametrisierte Kurve entsteht. Rein formal kann man auch sagen, der Lösungskandidat wird durch

$$y(t) := \begin{cases} y_a & \text{, falls } t = a \\ 0 & \text{, falls } a < t < b \\ y_b & \text{, falls } t = b \end{cases}$$

beschrieben. Diese Lösung heisst **Goldschmidtsche Lösung (1831).** Sie ist natürlich keine eigentliche Lösung, da sie nicht glatt genug ist.

Man beachte, dass die Goldschmidtsche Lösung auch bei $b \geq \varphi$ präsent ist. Wir werden später sehen, dass beide Extremalen, die glatte Kurve und die Goldschmidtsche Lösung, starke lokale Minima sind; welche Kurven dem Integral den kleineren Wert zuweist, muss gesondert überprüft werden.

Die Lösung(en) der Gleichung (1.12) kann man mit einem Nullstellenverfahren, etwa dem Newtonverfahren, suchen.

Beispiel 1.2 Als letztes Beispiel in dieser Einführung betrachten wir ein Variationsproblem mit $L(t, y, y') := y^2(1 - y')^2$. Die Eulersche Gleichung führt, da L nicht von t abhängt, auf die implizite Gleichung

$$y^2(1-y')^2 - y' \cdot 2y^2(1-y')(-1) = c \;\; (c \text{ eine Konstante}) \;\; \text{oder } {y'}^2 + \frac{c}{y^2} = 1\,,$$

was auf die implizit gegebene Extremalenschar

$$y^2 - (t+d)^2 = c$$

führt; d ist hier eine weitere Konstante. Wenn wir nun die Randbedingungen $y(0) = 0, y(2) = 1$ fordern, ergibt sich $d = -\frac{3}{4}, c = -\frac{9}{16}$. Die Extremale ist also

$$(t - \frac{3}{4})^2 - y^2 = \frac{9}{16}\,.$$

Dies ist eine Hyperbel, und wenn wir die Randbedingungen anschauen, liegen die Randpunkte auf verschiedenen Ästen der Hyperbel. Also ist die gefundene Extremale keine Lösung, und man kann schliessen, dass es keine zweimal stetig differenzierbare Lösung der vorgelegten Variationsaufgabe geben kann. Gibt es möglicherweise noch eine andere „Lösung“? Wenn wir das Variationsintegral anschauen, sehen wir sofort, dass es stets nichtnegativ ist und als untere Schranke den Wert Null hat. Diesen Wert können wir durch

$$y : [0,2] \ni t \;\longmapsto\; \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq 1 \\ t-1 & , 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

realisieren; die Lösung hat eine „Ecke“. Beachte, dass die Situation sich sofort verändert, wenn wir statt $y(2) = 1$ die Bedingung $y(1) = 2$ verlangen. Dann enthält ein Ast der extremalen Hyperbel beide Randpunkte. $\square$

1.8 Parametrische Form der Theorie

Bei vielen Problemen ist die bisher gewählte Formulierung der zulässigen Kurven in der Parametrisierung

$$[t_0, t_1] \ni t \longmapsto (t, y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

unzweckmäßig (siehe Bemerkung 1.1). Wir betrachten nun Parameterdarstellungen

$$[s_0, s_1] \ni s \longmapsto (x(s), y(s)) \in \mathbb{R}^2$$

für die zur Konkurrenz zugelassenen Kurven und **setzen voraus**:

$$x, y \text{ stetig differenzierbar, } \dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2 \neq 0 \text{ für alle } s \in [s_0, s_1]\,.$$

Hier haben wir von der Notation der Physiker Anleihe gemacht: Ableitung bezüglich eines „beliebigen“ Parameters bezeichnen wir mit “ $\cdot$ “. (Die zweite Voraussetzung besagt, dass die Kurve mit positiver „Geschwindigkeit“ durchlaufen wird, was, wenn s der Längenparameter ist, auch zutrifft.) Dies führt dann zu einer P_L entsprechenden Aufgabe:

$$P_G \begin{cases} \text{Minimiere } \int\limits_{s_0}^{s_1} G(x(s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s))ds \\ \text{unter den Nebenbedingungen } (x(s_0), y(s_0)) = (t_0, y_0)\ ,\ (x(s_1), y(s_1)) = (t_1, y_1)\,. \end{cases}$$

Den zulässigen Kurven ist eine Orientierung aufgeprägt. Will man zu einer anderen Parameterdarstellung übergehen, ohne den Orientierungssinn zu ändern, so kann dies durch eine (hier) differenzierbare „Zeittransformation“ geschehen. Transformiere etwa so:

$$s = k\tau\ ,\ s_0 = k\tau_0\ ,\ s_1 = k\tau_1\,.$$

Setzt man dann

$$\overline{x}(\tau) := x(k\tau)\ ,\ \overline{y}(\tau) := y(k\tau)\ ,$$

so erhält man

$$\int\limits_{s_0}^{s_1} G(x(s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s))ds = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} G(\overline{x}(\tau), \overline{y}(\tau), \dot{x}(k\tau), \dot{y}(k\tau))kd\tau$$

und wir verlangen

$$\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} G(\overline{x}(\tau), \overline{y}(\tau), \dot{x}(k\tau), \dot{y}(k\tau))kd\tau = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} G(\overline{x}(\tau), \overline{y}(\tau), \dot{\overline{x}}(\tau), \dot{\overline{y}}(\tau))d\tau\,.$$

Dies wird sichergestellt durch

$$G(u, v, kp, kq) = k\, G(u, v, p, q) \text{ für alle } k > 0 \tag{1.13}$$

und für alle (u, v, p, q) im Definitionsbereich von G. Ist (1.13) erfüllt, so sagt man **G ist positiv homogen vom Grad 1**. Transformieren wir mit der Zeittransformation

$$s = g(\tau) \text{ mit } g'(\tau) > 0 \text{ für alle } \tau\ ,$$

dann erhalten wir mit der Substitutionsregel im Falle der Homogenität auch

$$\int_{s_0}^{s_1} G(x(s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s))ds \;=\; \int_{g^{-1}(s_0)}^{g^{-1}(s_1)} G(\overline{x}(\tau), \overline{y}(\tau), \dot{\overline{x}}(\tau), \dot{\overline{y}}(\tau))d\tau\,, \tag{1.14}$$

wobei $\overline{x}(\tau) := x(g(\tau))$, $\overline{y}(\tau) := y(g(\tau))$ gesetzt wurde.

Also wollen wir in der Problemformulierung P_G vorauszusetzen, daß G positiv homogen vom Grad 1 ist; wir sprechen dann von einem homogenen Problem im Gegensatz zur inhomogenen Formulierung P_L . Gilt etwa für die Komponente x der zulässigen Kurve $s \longmapsto (x(s), y(s))$,

$$\dot{x}(s) > 0 \text{ für alle } s \in [s_0, s_1]\ ,$$

so können wir die Transformation g so wählen, daß $g'(\tau) = \dfrac{1}{\dot{x}(\tau)}$ gilt und wir erhalten

$$\int_{s_0}^{s_1} G(x(s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s))ds = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))dt \tag{1.15}$$

wobei

$$L(t, \overline{y}, \overline{y}') := G(t, \overline{y}, 1, \overline{y}')$$

ist. Wir kommen so also zu einem inhomogenen Problem zurück.

Zum Problem P_G kann man nun auch (wie oben) Eulersche Gleichungen ableiten. Sie lauten

$$G_x - \frac{d}{ds}G_{\dot{x}} = 0\ ,\ G_y - \frac{d}{ds}G_{\dot{y}} = 0\,. \tag{1.16}$$

Man beachte, daß diese zwei Gleichungen nicht unabhängig voneinander sind, da die Homogenitätsforderung besteht. Diese bedeutet

$$G(u, v, p, q) = p\ G_p(u, v, p, q) + q\ G_q(u, v, p, q)\ . \tag{1.17}$$

Man erhält (1.17) aus der Ableitung von

$$k \longmapsto G(u, v, kp, kq) = kG(u, v, p, q)$$

an der Stelle $k = 1$. Aus (1.17) folgen die Identitäten

$$\begin{aligned} G_p &= G_p + pG_{pp} + qG_{qp}\,,\ G_q = G_q + pG_{pq} + qG_{qq}\,, \\ p\,G_{pp} + q\,G_{qp} &= 0\,,\ p\,G_{pq} + q\,G_{qq} = 0\,, \\ q^{-2}\,G_{pp} + q^{-1}p^{-1}\,G_{qp} &= 0\,,\ q^{-1}p^{-1}\,G_{qp} + p^{-2}G_{qq} = 0\,, \end{aligned}$$

und

$$q^{-2}G_{pp} = p^{-2}\ G_{qq} = -p^{-1}q^{-1}\ G_{qp} =: \overline{G}\,. \tag{1.18}$$

Hierbei haben wir die Argumente weggelassen und zweimalige stetige Differenzierbarkeit von G unterstellt. Kombinieren wir nun diese Identitäten mit (1.16), so erhalten wir mittels Differentiation

$$G_{x\dot{y}}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) - G_{y\dot{x}}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) - \overline{G}(x, y, \dot{x}, \dot{y})(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}) = 0\,. \tag{1.19}$$

Dies ist nun **eine** Gleichung, wie auch aus der Tatsache heraus, daß wir zu einem inhomogenen Problem zurückkehren können, welches ja nur **eine** Eulersche Differentialgleichung besitzt, zu erwarten war.

Die Lösung einer der beiden Gleichungen in (1.17) liefert im allgemeinen die Extremalen, aber nicht die vollständige Parameterdarstellung, was kein Nachteil ist, weil man sie sich nachträglich verschaffen kann. Will man nun also ein Problem P_G lösen, so wird man die einfachere der beiden Gleichungen lösen.

Beispiel 1.3 Greifen wir das Problem der minimalen Oberfläche wieder auf. Wir haben ein Problem P_G mit

$$G(s,x,y,\dot{x},\dot{y}) := 2\pi y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

und die Eulerschen Gleichungen sind

$$G_{\dot{x}} = k \ \ (k \text{ Konstante})\,,\; G_y - \frac{d}{ds}G_{\dot{y}} = 0\,.$$

Also lösen wir die erste Gleichung und stellen

$$\frac{y\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = k \ \text{ d.h. } \ \frac{y}{\sqrt{1+\dfrac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}}} = k\,.$$

fest. Ist $k \neq 0$, so erhalten wir die Lösungen der Kettenlinie (wie früher). Ist $k=0$, dann ist entweder $y=0$ oder $\dot{x}=0$, und wir erhalten wieder die Goldschmidtsche Lösung.
Beachte: Es liegt Homogenität vom Grad 1 vor! □

Bemerkung 1.4 Fordert man auch noch, dass das Integral nur von der Bahn selbst und nicht von der Orientierung abhängen soll, so hat man die Forderung (1.13) auch für $k=-1$ sicherzustellen. □

1.9 Übungen

1.) Seien die Punkte A und B in $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten $(0,0)$ bzw. $(1,1)$ gegeben. Beim Problem der Brachistochrone ist das Integral

$$T(y) := \int_0^1 \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}}dx$$

für verschiedene Kurven $x \longmapsto (x,y(x))$, die A mit B verbinden, zu betrachten. Vergleiche die Gerade und den Viertelkreisbogen (Gravitationskonstante: $g=10$).
(Das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}$ ist ein elliptisches Integral; es hat den Näherungswert 2.62.)

2.) a) Stelle die Eulersche Diferentialgleichung zu $L(t,y,p) := f(t,y)\sqrt{1+p^2}$ auf.
b) Löse die Eulersche Differentialgleichung zu $L(t,y,p) := \frac{1}{t}\sqrt{1+p^2}$ mit den Randbedingungen $y(1)=0, y(2)=1$.

3.) Finde die Extremalen zu $L(t,y,p) := y^2+p^2+2ye^{-t}$.

4.) Finde die Extremalen zu $L(t,y,p) := \sqrt{y}\sqrt{1+p^2}$

5.) Finde die Eulersche Differentialgleichung für die Geodätischen auf einer Zylinderoberfläche.
Hinweis: Verwende Zylinderkoordinaten $(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$.

6.) Betrachte das Problem der Dido und zeige: Ist γ eine optimale Randkurve, also insbesondere eine geschlossene Jordankurve, dann ist γ konvex, d.h. zu je zwei Punkten von γ gehört kein Punkt der Verbindungsstrecke zum Inneren des Aussengebiets (bezüglich γ).

7.) Betrachte das Problem der Dido. Vergleiche bei gegebenem Umfang l die Fläche von Kreis, Quadrat und Sechseck.

8.) Betrachte ein Variationsproblem mit $L(t,y,y') := t^2 y'^2$ und den Randbedingungen $y(-1) = -1, y(1) = 1$. Gibt es eine Lösung in $C^1[-1,1]$?

9.) (a) Betrachte den Rotationskörper für den Graphen von $[0,b] \ni x \longmapsto y(x) \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$, $y(x) > 0$ für alle $x \in [0,b]$, y stetig differenzierbar. Zeige für die resultierende Rotationsoberfläche $F(y)$ (ohne „Deckel“) die Abschätzung $F(y) \geq \pi b^2$.

(b) Formuliere das Problem des **Zenodorus** mathematisch. Finde einen Rotationskörper maximalen Volumens bei gegebener Rotationsoberfläche.

10.) **Ramseysches Wachstummodell**: Zur Produktion eines Gutes wird Kapital investiert. Von der Produktion Y wird ein Teil C (Konsum) verbraucht, der Rest $I := Y - C$ wird investiert, wodurch sich das Kapital K ändert. Die Fragestellung, die optimal geklärt werden soll, lautet: Wie soll die Aufteilung in Konsum und Investition geregelt sein, dass ein Gesamtnutzen N über den Planungshorizont $[0,T]$ maximal ist.
Annahmen: $Y = \psi(K)\,,\, C \geq 0\,,\, I = \frac{dK}{dt}\,,\, N = \int_0^T L(C(t))dt$.
Formuliere die Aufgabe und stelle die Eulersche Differentialgleichung auf.

11.) Gegeben sei die Zykloide

$$x(\phi) = r(\phi - \sin\phi)\,,\; x(\phi) = -r(1-\cos\phi)\,,\; \phi \in [0,\pi]\,.$$

Zeige, dass die Laufzeit auf der Zykloide unter dem Einfluss der Schwerkraft von jedem Anfangspunkt $(x(\phi_0), y(\phi_0))$ bis zum Punkt $(x(\pi), y(\pi))$ gleich ist: Die Brachistochrone ist auch eine Tautochrone.

12.) Ein Rotationskörper, entstanden durch Rotation des Graphen der Funktion $[a,b] \ni x \longmapsto y(x) \in \mathbb{R}$ um die x–Achse, erfahre bei der Bewegung durch ein (zähes, widerstrebendes) Medium einen „Widerstand“, beschrieben durch

$$\int_a^b \frac{y(x)y'(x)^3}{1+y'(x)^2}dx\,.$$

(Ansatz von Newton (1886)). Stelle die Eulersche Differentialgleichung auf und untersuche, wie gut in den Spezialfällen Kegel, Zylinder diese Gleichung erfüllt wird.

13.) Betrachte den Fall, dass $L = L(t,y,y')$ nicht von t und y abhängt. Wie sieht die Eulersche Differentialgleichung aus und wie lassen sich die Extremalen beschreiben.

14.) Betrachte ein Variationsproblem mit $L(t,y,y') := e^t\sqrt{1+y'^2}$.

(a) Stelle die Eulersche Differentialgleichung auf und bestimme die Extremalen.

(b) Wie müssen die Randbedingungen gegeben sein, damit eine verbindende Extremale möglich ist?

15.) Betrachte ein Variationsproblem mit $L(t,y,y') := {y'}^2 y^2$.

(a) Stelle die Eulersche Differentialgleichung auf und zeige, dass Parabelfunktionen die Extremalen sind.

(b) Man bestimme die spezielle Extremale für die Randbedingungen $(a, y_a), (b, y_b)$ und vergleiche den Wert des Variationsintegrals mit dem Wert für die verbindende Gerade.

16.) Betrachte ein Variationsproblem mit $L(t,y,y') := y\sqrt{1-{y'}^2}$.

(a) Stelle die Eulersche Differentialgleichung auf.

(b) Diskutiere die Extremalen für den Fall der Randbedingungen $(0,0), (b, y_b)$ mit $y_b \neq 0$.

(c) Diskutiere die Extremalen für den Fall der Randbedingungen $(0,0), (b,0)$; vergleiche die Werte des Variationsintegrals für die erhaltenen Extremalen.

17.) Betrachte ein Variationsproblem mit $L(t,y,y') := y^2(2t-y')^2$ und den Randbedingungen $y(-1) = 0, y(1) = 1$.

(a) Stelle die Eulersche Differentialgleichung auf.

(b) Zeige: Ist y definiert durch

$$y(t) := \begin{cases} 0 & ,1 \le t \le 0 \\ t^2 & ,0 \le t \le 1 \end{cases},$$

so ist y eine Extremale.

(c) Was bedeutet das Ergebnis aus b), wenn man beachtet, dass y nicht zweimal differenzierbar ist.

18.) Finde die Extremalen für das Variationsproblem

$$\begin{cases} \text{Minimiere } \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2xy)(s)ds \\ \text{unter den Nebenbedingungen } y, x \in C^1[a,b],\, x(0) = y(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 1, y(\frac{\pi}{2}) = 1\,. \end{cases}$$

19.) Für eine senkrecht aufsteigende Rakete gelten bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes die Bewegungsgleichungen

$$\dot{h} = v\,,\ \dot{v} = \frac{bv_A}{m} - g\,,\ \dot{m} = -b\,.$$

Als Konstanten sind zu betrachten: g (Erdbeschleunigung), b (Massendurchsatz des Triebwerkes), v_A (Ausströmgeschwindigkeit).

(a) Man integriere die Bewegungsgleichungen mit den Anfangsbedingungen

$$v(0) = 0\,,\ m(0) = m_0\,,\ h(0) = 0\,.$$

(b) Für den Raketenaufstieg stehe eine vorgegebene Treibstoffmenge μ zur Verfügung. Zur Zeit t_f sei diese Treibstoffmenge verbraucht, d.h. es gilt $m(t_f) = m_0 - \mu$. Man berechne die ereichbare Aufstiegshöhe $h(t_f)$. Man bestimme den Massendurchsatz b so, dass die Aufstiegshöhe maximal wird.

Kapitel 2

Die Eulersche Differentialgleichung

Wir leiten die Eulersche Differentialgleichung ab und ergänzen sie durch notwendige Bedingungen zweiter Ordnung. Für Aufgaben mit Nebenbedingungen wird eine Eulersche Differentialgleichungeg mit Lagrange Multiplikator hergeleitet. Dabei stossen wir auf die konjugierten Punkte, die bei der Formulierung hinreichender Bedingungen eine wichtige Rolle spielen.

2.1 Die Grundaufgabe

Wir haben in Kapitel 1 eine Reihe von Beispielen kennengelernt. Typisch an den Beispielen ist, daß das Funktional, d.h. die Größe, deren Minimum (oder Maximum) wir suchen, in der Gestalt eines Integrals

$$\int_a^b L(t, y(t), y'(t))dt \tag{2.1}$$

auftritt. Wir legen uns nun auf das Suchen von Minima fest, zur Maximierung haben wir nur das Vorzeichen von L zu wechseln.

Zur Konkurrenz bei der Minimierung sind Funktionen auf dem (fest gewählten) Intervall $[a, b]$ zugelassen, die stetig differenzierbar sind. Wir führen daher ein ($k \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}
C^0[a,b] := C[a,b] \quad &:= \quad \{y : [a,b] \to \mathbb{R} | y \text{ stetig}\}, \\
C^0([a,b];\mathbb{R}^d) := C([a,b];\mathbb{R}^d) \quad &:= \quad \{y : [a,b] \to \mathbb{R}^d | y \text{ stetig}\}, \\
C^k[a,b] \quad &:= \quad \{y : [a,b] \to \mathbb{R} | y \text{ differenzierbar in } [a,b], y' \in C^{k-1}[a,b]\}, \\
C^k([a,b];\mathbb{R}^d) \quad &:= \quad \{y : [a,b] \to \mathbb{R}^d | y \text{ differenzierbar in } [a,b], y' \in C^{k-1}([a,b];\mathbb{R}^d)\}.
\end{aligned}$$

Für $y \in C^1([a,b];\mathbb{R}^d)$ läßt sich das Integral in (2.1) als Riemann–Integral auffassen.

In den Beispielen lagen an den Intervallenden jeweils noch Bedingungen vor, nämlich etwa Randbedingungen der Form

$$y(a) = y_a\,, \quad y(b) = y_b\,.$$

Dies führt uns zu der Menge der **zulässigen Trajektorien**:

$$Y_{ad} := \{y \in C^1([a,b];\mathbb{R}^d) | y(a) = y_a\,,\, y(b) = y_b\}\,.$$

Die **Grundaufgabe**, die wir nun betrachten wollen, lautet:

$$P_L \begin{cases} \text{Minimiere } I(y) := \int\limits_a^b L(t, y(t), y'(t))dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } y \in Y_{ad}\,. \end{cases}$$

Aus der Analysis wissen wir, daß man i.a. lokale und globale Minima zu unterscheiden hat. Der Begriff des globalen Minimums ist klar:

Definition 2.1
$\overline{y} \in Y_{ad}$ heißt **globales Minimum** von P_L genau dann, wenn gilt:

$$I(y) \geq I(\overline{y}) \text{ für alle } y \in Y_{ad}\,.$$

□

Lokale Minima sind deshalb von großer Bedeutung, weil notwendige Bedingungen im allgemeinen nur solche Minima erfassen. Im Gegensatz zur endlichdimensionalen Minimierung – beachte: Y_{ad} ist Teilmenge eines unendlichdimensionalen Raumes – werden in unserem Kontext zwei verschiedene Beschreibungen von „lokal" nahegelegt. Zunächst führen wir in $C([a,b];\mathbb{R}^d)$ einen **Abstandsbegriff** durch

$$\|f-g\|_\infty := \max\{|f(t)-g(t)|\;|t \in [a,b]\} \;\; (f,g \in C([a,b];\mathbb{R}^d))$$

ein. Die Abbildung $\|\cdot\|_\infty$ auf $C[a,b]$ heißt auch **Tschebyscheff–Norm.**

Definition 2.2
$\overline{y} \in Y_{ad}$ heißt **starkes lokales Minimum** genau dann, wenn gilt:

$$\exists \delta > 0 \; \forall \; y \in Y_{ad} \; (\|y-\overline{y}\|_\infty < \delta \implies I(y) \geq I(\overline{y}))$$

□

Bei einem starken lokalen Minimum werden also bei der Beschreibung einer Umgebung von $\overline{y}$ keine Ableitungen einbezogen, obwohl sie im Integralfunktional (2.1) vorkommen; ihre Einbeziehung führt uns zu einer Abschwächung. Wir setzen

$$\|f-g\|_{1,\infty} := \|f-g\|_\infty + \|f'-g'\|_\infty \;\; (f,g \in C^1([a,b];\mathbb{R}^d))$$

und haben damit einen **Abstandsbegriff** in $C^1([a,b];\mathbb{R}^d)$.

Definition 2.3
$\overline{y} \in Y_{ad}$ heißt **schwaches lokales Minimum** genau dann, wenn gilt:

$$\exists \delta > 0 \; \forall y \in Y_{ad} \; (\|y-\overline{y}\|_{1,\infty} < \delta \implies I(y) \geq I(\overline{y}))$$

□

Unmittelbar klar ist: Jedes starke lokale Minimum ist auch ein schwaches lokales Minimum, jedes globale Minimum ist auch ein starkes lokales Minimum. Die Eulersche Differentialgleichung werden wir als notwendige Bedingung für das Vorliegen eines schwachen lokalen Minimums betrachten können.

Beispiel 2.4 Dieses Beispiel soll zeigen, daß die Existenz eines (globalen) Minimums für eine Variationsaufgabe der Form P_L keine Selbstverständlichkeit ist, selbst wenn der Integrand L genügend regulär ist:

$$\begin{cases} \text{Minimiere } I(y) := \int\limits_{-1}^{1} t^4 y'(t)^2 dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } y \in Y_{ad} := \{y \in C^1[a,b] | y(-1) = -1,\ y(1) = 1\}\,. \end{cases}$$

Offenbar ist stets $I(y) \geq 0$. Wir betrachten eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zulässiger Trajektorien, definiert durch

$$y_n(t) := \begin{cases} -1 & , t \in [-1, -\alpha_n] \\ -1 + n^3(t+\alpha_n)^2 & , t \in [-\alpha_n, -\beta_n] \\ nt & , t \in [-\beta_n, \beta_n] \\ 1 - n^3(t-\alpha_n)^2 & , t \in [\beta_n, \alpha_n] \\ 1 & , t \in [\alpha_n, 1] \end{cases}$$

wobei $\alpha_n := \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}, \beta_n := \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2}, n \in \mathbb{N}$, ist. Offenbar ist $y_n \in Y_{ad}, n \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim_n I(y_n) = 0$ gilt $\inf_{y \in Y_{ad}} I(y) = 0$. Läge nun die Existenz eines globalen Minimums $\overline{y}$ vor, so müßte gelten:

$$I(\overline{y}) = 0, \text{ d.h. } t^4 \overline{y}'(t)^2 = 0 \text{ für alle } t \in [-1,1], \text{ also } \overline{y}'(t) = 0 \text{ für alle } t \in [-1,1]\,.$$

Da dann $\overline{y}$ konstant ist, kann $\overline{y}(-1) = -1$, $\overline{y}(1) = 1$ nicht gelten. Sehen wir dies auch an der Eulerschen Differentialgleichung? Sie lautet

$$-\frac{d}{dt}(2t^4 y') = 0\,.$$

Dies bedeutet zusammen mit den Randbedingungen, daß folgende Randwertaufgabe

$$2t^4 y' = k\,, y(-1) = -1, y(1) = 1$$

zu lösen ist; dabei ist k eine Konstante. Man sieht leicht, daß dafür keine stetig differenzierbare Lösung existiert.
Man beachte, dass der Integrand L hier als Polynom sehr regulär ist. □

Beispiel 2.5 Die Trajektorie $\overline{y} = \theta$ ist offenbar globales Minimum der Aufgabe

$$\begin{cases} \text{Minimiere } I(y) := \int\limits_{0}^{1} y'(t)^2 dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } y \in C^1[0,1]\,, y(0) = y(1) = 0\,. \end{cases}$$

Dieselbe Trajektorie $\overline{y}$ ist ein schwaches lokales Minimum in der Aufgabe

$$\begin{cases} \text{Minimiere } I(y) := \int_0^1 (y'(t)^2 - y'(t)^4) dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } y \in C^1[0,1], y(0) = y(1) = 0\,, \end{cases}$$

denn: Ist $|y'(t)| \leq 1$ für alle $t \in [0,1]$, so ist $y'(t)^2 - y'(t)^4 \geq 0,\ t \in [0,1]$, und $\overline{y}$ ist als schwaches lokales Minimum erkannt. Die Trajektorie $\overline{y}$ ist aber kein starkes lokales Minimum. Betrachte dazu die Trajektorie $y_{p,q}$, definiert durch

$$y_{p,q}(t) := \begin{cases} \frac{q}{p} t & , 0 \leq t \leq p \\ \frac{q}{p-1}(t-1) & , p < t \leq 1 \end{cases}$$

mit $0 < p < 1, q > 0$. Aus

$$I(y_{p,q}) := \int_0^p (y'_{p,q}(t)^2 - y'_{p,q}(t)^4)dt + \int_p^1 (y'_{p,q}(t)^2 - y'_{p,q}(t)^4)dt = \frac{q^2}{p}(1+\frac{q}{p}) + \frac{q^2}{1-p}(1-\frac{q}{1-p})$$

folgt $\lim_{p\to 1} I(y_{p,q}) = -\infty$. Glättet man $y_{p,q}$ in naheliegender Weise zu einer C^1–Funktion, so wird aus der Tatsache $\lim_{p\to 1} I(y_{p,q}) = -\infty$ klar, daß $\overline{y}$ kein starkes lokales Minimum sein kann. $\square$

Beispiel 2.6 Betrachte das Problem der kürzesteten Verbindung der Punkte A, B mit den Koordinaten $(0,0)$ bzw. $(0,1)$. Wir haben hier $L(t,y,y') = \sqrt{1+y'^2}$.
$\overline{y} := \theta$ ist ein globales Minimum. Betrachte die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $y_n := n^{-1}\sin(n^2\pi t)$.
Wegen

$$|y_n(t)| \leq \frac{1}{n}, \ |y'_n(t)| = |n\pi\cos(n^2\pi t)|,$$

ist

$$I(y_n) = \int_0^1 \sqrt{1+y'_n(t)^2}dt = \int_0^1 \sqrt{1+n^2\pi^2\cos(n^2\pi t)}dt \geq n\pi \int_0^1 |\cos(n^2\pi t)|dt = 2n.$$

Also

$$\|y_n - \overline{y}\|_\infty \longrightarrow 0, \text{ aber } I(y_n) \not\longrightarrow I(\overline{y}).$$

Wir haben es hier mit einer geglätteten Variante des Sägezahnphänomens zu tun. $\square$

2.2 Herleitung der Eulerschen Differentialgleichung

Wir betrachten die Aufgabe P_L und setzen Glattheit von L voraus, d.h. Ableitungen von L, die benötigt werden, sollen auch existieren. Später bei der Formulierung von Sätzen werden wir genauer werden.

Die Methode von Euler zur Ableitung einer notwendigen Bedingung für das Vorliegen eines Minimums $\overline{y}$ bestand darin, daß er die Aufgabe diskretisierte und die Betrachtungen im euklidischen Raum anstellte (siehe Abschnitt 1.7). 1775 (11 Jahre nach Erscheinen der Eulerschen Arbeit) legte Lagrange Euler seine Idee vor. Sie geht aus von einer Lösungstrajektorie $\overline{y}$, die zweimal stetig differenzierbar ist. (Diese Voraussetzung wäre auch hilfreich für Konvergenzbetrachtungen beim Eulerschen Vorgehen.

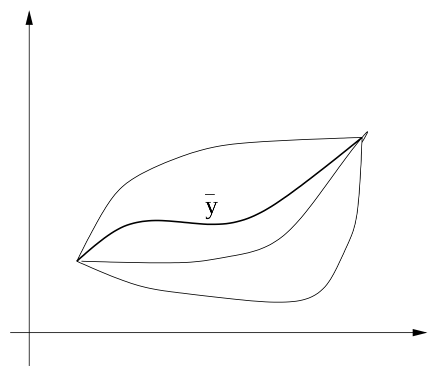

Abbildung 2.1: Variationen

Wir gehen aus von der **Annahme**:

$$\overline{y} \in Y_{ad} \text{ schwaches lokales Minimum}, \ \overline{y} \in C^2([a,b];\mathbb{R}^d) \ , \overline{y}(a) = y_a \ , \overline{y}(b) = y_b.$$

Betrachte eine Schar von Funktionen, die zulässig sind:

$$y(\cdot;\epsilon) := \overline{y} + \epsilon\eta \ \ , \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0) =: E_0 \, , \ \text{wobei } \eta \in C^2([a,b];\mathbb{R}^d) \ \ , \eta(a) = \eta(b) = 0 \, .$$

Hierbei ist $\epsilon_0 > 0$. Wegen

$$\|y(\cdot;\epsilon) - \overline{y}\|_\infty = |\epsilon|\|\eta\|_\infty \, , \ \|y(\cdot;\epsilon) - \overline{y}\|_{1,\infty} = |\epsilon|\|\eta\|_{1,\infty} \, ,$$

können wir die Schar $y(\cdot;\epsilon), \epsilon \in E_0$, bei der Untersuchung der Frage, ob in $\overline{y}$ ein starkes oder schwaches lokales Minimum vorliegt, verwenden, ϵ_0 genügend klein vorausgesetzt. Nun muß gelten

$$I(\epsilon) := J(y(\cdot;\epsilon)) \geq J(\overline{y}) = I(0) \quad \forall \epsilon \in E_0,$$

d.h. I nimmt in $\bar{\epsilon} := 0$ ein Minimum an. Aus der Analysis wissen wir, daß – vorausgesetzt I ist differenzierbar in $\epsilon = 0$ –

$$\frac{dI}{d\epsilon}(0) = 0 \tag{2.2}$$

gelten muß. Die Identität

$$\frac{1}{\epsilon}(I(\epsilon) - I(0)) = \frac{1}{\epsilon}\int_a^b \{L(t, \overline{y}(t) + \epsilon\eta(t), \overline{y}'(t) + \epsilon\eta'(t)) - L(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))\}dt$$

legt nahe, daß

$$\frac{dI}{d\epsilon}(0) = \int_a^b < L_y(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t)), \eta(t) > + < L_{y'}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t)), \eta'(t) > dt \tag{2.3}$$

gilt. Dies ist unter der Voraussetzung, daß $L : [a,b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar ist, richtig.[1] Um zu sehen, daß

$$t \ \longmapsto \ \lambda(t) := L_{y'}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))$$

stetig differenzierbar ist, reicht die Voraussetzung $\overline{y} \in C^2([a,b];\mathbb{R}^d)$ offenbar aus, falls $L : [a,b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar ist. Es folgt mit $\eta(a) = \eta(b) = 0$ und partieller Integration die Identität

$$\frac{dI}{d\epsilon}(0) = \int_a^b < L_y(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t)) - \frac{d\lambda}{dt}(t), \eta(t) > \ dt \tag{2.4}$$

Wir fügen für $\lambda(t)$ wieder $\frac{d}{dt}L_{y'}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))$ ein. Die Identität (2.4) gilt für alle $\eta \in C^2([a,b];\mathbb{R}^d)$ mit $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Die Eulersche Differentialgleichung taucht unter dem Integral auf. Wir wollen daraus schließen, daß dann

$$t \mapsto L_y(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t)) - \frac{d}{dt}L_{y'}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))$$

verschwinden muß. Lagrange gab für diesen Schluß keine Begründung, Euler konnte sich daher mit der Bemerkung revanchieren, daß dafür ein Beweis fehlt; ein erster Beweisversuch von Lagrange war nicht stichhaltig.

[1] Siehe etwa Forster, O., Analysis 3, S. 98 - 100

Der Hilfssatz, der hier weiterhelfen könnte, kann in unserer Situation für den Fall $d = 1$ so formuliert werden: Sei $l \in C[a,b]$:

$$\text{Es gilt } l = 0, \text{ falls } \int_a^b l(t)\eta(t)dt = 0 \text{ für alle } \eta \in C^1[a,b] \text{ mit } \eta(a) = \eta(b) = 0\,. \tag{2.5}$$

Resultate von obigem Typ wurden im Anschluß an die Überlegungen von Lagrange von **Du Bois-Reymond** (1879) entwickelt. Es war **K. Weierstrass**, der in seinen Vorlesungen (1875 – 1882) erfolgreich den Versuch unternahm, Klarheit und Vollständigkeit in die Beweisführung zu bringen; dazu später.

Bemerkung 2.7 Aus obiger Darstellung und Herleitung folgt, daß bei Nichtvorhandensein etwa der Randbedingung

$$y(a) = y_a$$

der Ansatz

$$y(\cdot;\epsilon) := \overline{y} + \epsilon\eta \text{ mit } \eta \in C^2([a,b];\mathbb{R}^d)\,,\ \eta(b) = 0\,,$$

schließlich auf

$$< L_{y'}(a,\overline{y}(a),\overline{y}'(a)),\eta(a) > - \int_a^b < L_y(t,\overline{y}(t),\overline{y}'(t)) - \frac{d}{dt}L_{y'}(t,\overline{y}(t),\overline{y}'(t)),\eta(t) > dt = 0$$

führt. Daraus folgt sofort

$$L_{y'}(a,\overline{y}(a),\overline{y}'(a)) = \theta$$

und

$$\int_a^b < L_y(t,\overline{y}(t),\overline{y}'(t)) - \frac{d}{dt}L_{y'}(t,\overline{y}(t),\overline{y}'(t)),\eta(t) > \, dt \text{ für alle } \eta \in C^2([a,b];\mathbb{R}^d) \text{ mit } \eta(b) = 0\,.$$

Man beachte, daß an die Stelle der nicht vorhandenen Randbedingung $\overline{y}(a) = y_a$ die Bedingung $L_{y'}(a,\overline{y}(a),\overline{y}'(a)) = 0$ tritt. Jedenfalls erhält man auch hier eine Differentialgleichung 2. Ordnung (bei Nichtentartung) und zwei Randbedingungen. Nun wird für die Ableitung der Eulerschen Differentialgleichung ein Hilfssatz vom Typ du Bois–Reymond benötigt; siehe unten. □

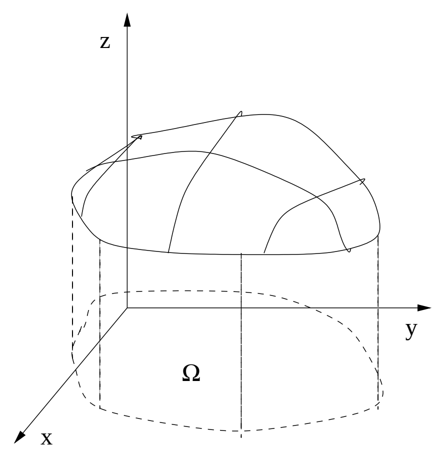

Abbildung 2.2: Minimalflächenproblem

Die Lagrangsche Idee läßt sich auch bei Variationsproblemen mit Mehrfachintegralen anwenden. Wir beschränken uns auf den Fall zweier Variablen. Solche Probleme kommen etwa folgendermaßen zustande:
Gegeben sei eine geschlossene Kurve Γ in $\mathbb{R}^3$ (Koordinaten x,y,z), deren Projektion auf die Ebene $\{z = 0\}$ eine Jordan-Kurve Γ' mit Innengebiet Ω ergibt. Gesucht ist eine Fläche $\overline{z} = \overline{z}(x,y)$ derart, daß sie das Problem

$$P_* \begin{cases} \text{Minimiere } \int\limits_\Omega L(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x}(x,y),\frac{\partial z}{\partial x}(x,y))dxdy \\ \text{unter den Nebenbedingungen } z:\Omega\cup\Gamma' \longrightarrow \mathbb{R} \text{ partiell differenzierbar,} \\ (x,y,z(x,y))\in\Gamma \text{ für alle } (x,y)\in\Gamma'. \end{cases}$$

löst. Der Ansatz, der zu einer Eulerschen Differentialgleichung führt, geht hier aus von der Schar

$$z(\cdot\,;\epsilon) := \overline{z} + \epsilon\eta,\quad \epsilon\in(-\epsilon_0,\epsilon_0),\quad (\epsilon_0>0)\,,$$

wobei $\eta:\Omega\to\mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar und $\eta(x,y)=0$ für alle $(x,y)\in\Gamma'$ ist. Man erhält für

$$I(\epsilon) := \int_\Omega L(x,y,z(x,y;\epsilon),\frac{\partial z}{\partial x}(x,y;\epsilon),\frac{\partial z}{\partial x}(x,y;\epsilon))dxdy$$

unter geeigneten Voraussetzungen an L und $\overline{z}$

$$0 = \frac{dI}{d\epsilon}(0) = \int_\Omega (L_z\eta + L_{z_x}\eta_x + L_{z_y}\eta_y)(x,y,\overline{z}(x,y),\overline{z}_x(x,y),\overline{z}_y(x,y))dxdy\ .$$

Daraus folgt unter Verwendung der Greenschen Formel

$$0 = \int_\Omega (L_z - \frac{\partial}{\partial x}L_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y}L_{z_y})(x,y,\overline{z}(x,y),\overline{z}_x(x,y),\overline{z}_y(x,y))\eta(x,y)dxdy.$$

Dies führt nun unter Anwendung eines passenden Hilfsatzes vom Typ du Bois–Reymond auf die folgende Randwertaufgabe ($\overline{z}$ ersetzt durch die Unbekannte z):

$$\begin{cases} L_z - \frac{\partial}{\partial x}L_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y}L_{z_y} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ z &= 0 \quad \text{in } \Gamma' \end{cases}\ . \tag{2.6}$$

Das **Dirichlet-Problem** erhält man mit

$$L(x,y,z,z_x,z_y) := z_x^2 + z_y^2,$$

das Problem, die minimale Fläche einer durch den Ring Γ' eingespannten „Seifenblase“ unter der Einwirkung der Gravitation (**Minimalflächenproblem**) zu bestimmen, erhält man mit

$$L(x,y,z,z_x,z_y) := \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,.$$

2.3 Lemma von du Bois–Reymond

Sei

$$C_0^1([a,b];\mathbb{R}^d) := \{v\in C^1([a,b];\mathbb{R}^d)|v(a)=v(b)=0\}\,.$$

Beginnen wir mit Resultaten zum Fall $d=1$.

Lemma 2.8
Sei $h\in C[a,b]$ und es gelte $\int\limits_a^b h(t)v'(t)dt = 0$ für alle $v\in C_0^1[a,b]$. Dann ist h konstant.

Beweis:
Für $c\in\mathbb{R}$ wird durch $v(t) := \int_a^t (h(s)-c)ds,\ t\in[a,b]$, ein $v\in C^1[a,b]$, mit $v(a)=0$ definiert. Also ist $v\in C_0^1[a,b]$, falls wir für c den Mittelwert

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b h(s)ds$$

von h wählen. Für dieses c und daraus resultierendes v folgt:

$$0 \le \int_a^b (h(t)-c)^2 dt = \int_a^b (h(t)-c)v'(t)dt = \int_a^b h(t)v'(t)dt - cv|_a^b = 0$$

Daraus erhalten wir $h(t) = c,\ \ t \in [a,b]$. ■

Nun folgen Verallgemeinerungen, die später auch noch benötigt werden.

Lemma 2.9 (du Bois–Reymond)
Seien $g, h \in C[a,b]$ und es gelte

$$\int_a^b (g(t)v(t) + h(t)v'(t))dt = 0 \text{ für alle } v \in C_0^1[a,b]\,.$$

Dann ist $h \in C^1[a,b]$ und $h' = g$.

Beweis:
Sei $G(t) := \int_a^t g(s)ds, t \in [a,b]$. Offenbar gilt $G \in C^1[a,b], G' = g$. Also gilt für alle $v \in C_0^1[a,b]$

$$0 = \int_a^b (g(t)v(t) + h(t)v'(t))dt = \int_a^b (h(t) - G(t))v'(t) + Gv|_a^b\,, \text{ d.h. } \int_a^b (h(t)-G(t))v'(t)dt = 0\,.$$

Mit Lemma 2.8 folgt, dass $h - G$ konstant ist. Daraus liest man die Behauptung ab. ■

Folgerung 2.10 (Fundamentallemma der Variationsrechnung)
Sei $g \in C[a,b]$ und es gelte

$$\int_a^b g(t)v(t)dt = 0 \text{ für alle } v \in C_0^1[a,b]\,.$$

Dann ist g identisch Null.

Beweis:
Verwende für h die Nullfunktion in Lemma 2.9. ■

Wir setzen

$$D_0^m[a,b] := \Big\{ h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, h\ m\text{–mal stetig differenzierbar}, h^{(j)}(a) = h^{(j)}(b) = 0, 0 \le j \ \le m \Big\}\,.$$

Lemma 2.11
Sei $g \in C[a,b]$ und es gelte für ein $m \in \mathbb{N}$

$$\int_a^b g(t)v(t)dt = 0 \text{ für alle } v \in D_0^m[a,b]\,.$$

Dann ist g identisch Null.

Beweis:
Annahme: $g(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in (a,b)$. O.E. $g(t_0) > 0$. Dann gibt es α, β mit $a \leq \alpha < t_0 < \beta \leq b$, $g(t) \geq \frac{1}{2} g(t_0), t \in [\alpha, \beta]$. Definiere $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$v(t) := \begin{cases} (t-\alpha)^{m+1}(\beta - t)^{m+1} & , t \in [\alpha, \beta] \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} .$$

Dann ist v m–mal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und nichtnegativ. Ferner ist gv stetig, nichtnegativ und nicht identisch Null. Also

$$0 < \int_a^b g(t)v(t)dt$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Da g stetig ist, folgt $g(t) = 0\,,\, t \in [a,b]$. ∎

Lemma 2.12
Sei $d \geq 2$ und seien $G, H \in C([a,b];\mathbb{R}^d)$. Es gelte:

$$\int_a^b (< G(t), V(t) > + < H(t), V'(t) >)dt = 0 \text{ für alle } V \in \{W \in C^1([a,b];\mathbb{R}^d) | W(a) = W(b) = \theta\}.$$

Dann ist $H \in C^1([a,b];\mathbb{R}^d)$ und $H' = G$.

Beweis:
Wende Lemma 2.9 koordinatenweise an. ∎

2.4 Die Eulersche Gleichung für die Grundaufgabe

Satz 2.13
Sei $L : [a,b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und sei $\overline{y} \in C^2([a,b];\mathbb{R}^d)$ ein schwaches lokales Minimum zur Aufgabe P_L. Dann ist $\overline{y}$ Lösung der Randwertaufgabe

$$L_y(t,y,y') - \frac{d}{dt} L_{y'}(t,y,y') = 0\,,\; y(a) = y_a\,,\; y(b) = y_b\,. \tag{2.7}$$

Beweis:
Wir haben abgeleitet:

$$\int_a^b < L_y(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t)) - \frac{d}{dt} L_{y'}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t)), \eta(t) > dt = 0 \text{ für alle } \eta \in C_0^1([a,b];\mathbb{R}^d)\,.$$

Mit Lemma 2.12

$$L_y(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t)) - \frac{d}{dt} L_{y'}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t)) = 0 \;\;, t \in [a,b]\,.$$

∎

Die Eulersche Differentialgleichung ist ein System nichtlinearer Differentialgleichungen der Ordnung d. Der Fall der parametrischen Form der Variationsrechnung ist damit auch erfasst; siehe Abschnitt 1.8.

Wir wollen uns nun von der Voraussetzung, daß $\overline{y}$ zweimal stetig differenzierbar ist, lösen. Die Überlegung dazu geht auf du Bois–Reymond zurück. Aus Abschnitt 2.2 wissen wir, daß für ein schwaches lokales Minimum $\overline{y} \in C^1([a,b];\mathbb{R}^d)$ gelten muß:

$$\int_b^a < L_y(t,\overline{y}(t),\overline{y}'(t),\eta(t) > + < L_{y'}(t,\overline{y}(t),\overline{y}'(t)),\eta'(t) > dt = 0\,,\ \eta \in C_0^1([a,b];\mathbb{R}^d)\,. \tag{2.8}$$

Satz 2.14
Sei $L : [a,b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar und sei $\overline{y} \in C^1([a,b];\mathbb{R}^d)$ ein schwaches lokales Minimum zur Aufgabe P_L. Dann ist $\overline{y}$ die Lösung der Randwertaufgabe (2.27), insbesondere ist $[a,b] \ni t \longmapsto L_{y'}(t,\overline{y}(t),\overline{y}'(t)) \in \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar.

Beweis:
Sei $\eta \in C_0^1([a,b];\mathbb{R}^d)$. Aus (2.8) folgt durch partielle Integration unter Berücksichtigung von $\eta(a) = \eta(b) = 0$:

$$\int_a^b < -\int_a^t L(s,\overline{y}(s),\overline{y}'(s))\,ds + L_{y'}(t,\overline{y}(t),\overline{y}'(t)),\eta'(t) > dt = 0\,.$$

Aus Lemma 2.8 folgt, komponentenweise angewendet, mit einem konstanten Vektor c

$$-\int_a^t L_y(s,\overline{y}(s),\overline{y}'(s))\,ds + L_{y'}(t,\overline{y}(t),\overline{y}'(t)) = c\ ,\ t \in [a,b]. \tag{2.9}$$

Da

$$[a,b] \ni t \longmapsto -\int_a^t L_y(s,\overline{y}(s),\overline{y}'(s))ds \in \mathbb{R}^d$$

stetig differenzierbar ist, gilt dies auch für

$$[a,b] \ni t \longmapsto L_{y'}(t,\overline{y}(t),\overline{y}'(t)) \in \mathbb{R}^d\,.$$

Differentiation in (2.9) ergibt die Eulersche Gleichung. ■

Die Differenzierbarkeit von

$$[a,b] \ni t \longmapsto L_{y'}(t,\overline{y}(t),\overline{y}'(t)) \in \mathbb{R}^d$$

(siehe Satz 2.14) besagt nicht, daß die Eulersche Differentialgleichung in der Form gültig ist, die man durch Ausführen der Differentiation nach t in $L_{y'}$ erhält. Die Gültigkeit dieser Form der Eulerschen Differentialgleichung läßt sich nur dann behaupten, wenn man weiß oder zusätzlich annimmt, daß das schwache lokale Minimum zweimal differenzierbar ist. Auf Hilbert geht folgende Beobachtung zurück.

Satz 2.15 (Regularitätssatz)
Sei $L : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal stetig partiell differenzierbar und sei $\overline{y} \in C^1[a,b]$ eine Lösung der Eulerschen Differentialgleichung

$$L_y(t,y,y') - \frac{d}{dt}L_{y'}(t,y,y') = 0\,. \tag{2.10}$$

Dann ist $\overline{y}'$ differenzierbar in jedem $t_0 \in [a,b]$ mit $L_{y'y'}(t_0,\overline{y}(t_0),\overline{y}'(t_0)) \neq 0$.

Beweis:
Sei $t_0 \in [a,b]$ mit $L_{y'y'}(t_0, \overline{y}(t_0), \overline{y}'(t_0)) \neq 0$. Mit der Taylorentwicklung erhält man

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}(L_{y'}(t_0+h, \overline{y}(t_0+h), \overline{y}'(t_0+h)) - L_{y'}(t_0, \overline{y}(t_0), \overline{y}'(t_0)))&\\ = L_{y't}(t_0, \overline{y}(t_0), \overline{y}'(t_0)) + L_{y'y}(t_0, \overline{y}(t_0), \overline{y}'(t_0))h^{-1}(\overline{y}(t_0+h) - \overline{y}(t_0))&\\ + L_{y'y'}(t_0, \overline{y}(t_0), \overline{y}'(t_0))h^{-1}(\overline{y}'(t_0+h) - \overline{y}'(t_0)) + R(h)&\end{aligned}$$

wobei $\lim\limits_{h\to 0} R(h) = 0$ ist. Löst man nach $h^{-1}(\overline{y}'(t_0+h) - \overline{y}'(t_0))$ auf, so sieht man

$$\overline{y}''(t_0) = L_{y'y'}(t_0, \overline{y}(t_0), \overline{y}'(t_0))^{-1}\{\frac{d}{dt}L_{y'} - L_{y'y} - L_{y't}\}(t_0, \overline{y}(t_0), \overline{y}'(t_0)).$$

■

Definition 2.16
Sei $y \in C^1[a,b]$. Das Zahlentripel $(t_0, y(t_0), y'(t_0))$ heißt **Linienelement** von y in $t_0 \in [a,b]$. □

Ein Linienelement $(t_0, y(t_0), y'(t_0))$ ist also ein Punkt $(t_0, y(t_0)) \in \mathbb{R}^2$ mit „angehefteter“ Tangentensteigung $y'(t_0)$.

Wir erinnern an eine Sprechweise: Eine Lösung der Eulerschen Differentialgleichung heisst **Extremale**, unabhängig davon, ob sie eine Lösung des Variationsproblems ist oder nicht.

Definition 2.17
Sei $y \in C^1[a,b]$. Ein Linienelement $(t_0, y(t_o), y'(t_0))$ heißt **reguläres Linienelement**, wenn $L_{y'y'}(t_0, y(t_0), y'(t_0)) \neq 0$ ist, und **singuläres Linienelement**, wenn $L_{y'y'}(t_0, y(t_0), y'(t_0)) = 0$ gilt. □

Definition 2.18
Besitzt eine Extremale nur reguläre Linienelemente, so heißt sie **reguläre Extremale**. □

Beispiel 2.19 Betrachte in $[0, \frac{\pi}{2}]$ ein Variationsproblem mit Integrand $L(t,y,y') := y12 - y'^2$ und Randbedingung $y(0) = 1$.
Die Eulersche Differentialgleichung zusammen mit den Randbedingungen ergibt die Randwertaufgabe

$$2y - \frac{d}{dt}(-2y') = 0\,,\ y(0) = 1, y(\frac{\pi}{2}) = 0\,.$$

Da $L_{y'y'} \equiv -1$ ist, ist jedes Linienelement regulär und wir können zur Randwertaufgabe

$$y +'' = 0\,,\ y(0) = 1, y(\frac{\pi}{2}) = 0$$

übergehen. Man sieht sofort, dass keine Lösung dazu existiert. □

Bemerkung 2.20 Die Überlegungen in diesem Abschnitt bleiben gültig für den Fall, daß in der Grundaufgabe eine Randbedingung bzw. beide Randbedingungen fehlen. Man erhält dann für eine fehlende Randbedingung als notwendige Bedingung eine sogenannte natürliche Randbedingung (siehe Bemerkung 2.7). □

2.5 Variationsprobleme mit Nebenbedingungen

Bisher haben wir ein Variationsproblem nur unter Einbeziehung von Randbedingungen betrachtet: Wir haben gesehen, dass sie einerseits als Forderung verträglich sind mit der Ordnung der Eulerschen Differentialgleichung oder andererseits sich als natürlich einstellen, wenn man auf die Forderung verzichtet. Nun wollen wir explizit weitere Nebenbedingungen hinzufügen. Wir machen dies nicht allgemein – dazu müßten wir dann funktionalanalytisch ausholen – , sondern machen dies im Sinne der klassischen Variationsrechnung. Wir betrachten zunächst

$$P_{L,G}\left\{\begin{array}{l}\text{Minimiere } I(y) := \int\limits_a^b L(t, y(t), y'(t))dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \\ y \in C^1[a,b], y(a) = y_a, y(b) = y_b, Q(y) := \int\limits_a^b G(t, y(t), y'(t))dt = l\end{array}\right.$$

Hierbei sind $L, G : \times\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und y_a, y_b, l vorgegeben. Die zulässigen Trajektorien sind also

$$Y_{ad}^l := \{y \in C^1[a,b] | y(a) = y_a, y(b) = y_b, Q(y) = l\}$$

Beispiel 2.21 Wir betrachten das Problem von Dido nun als Aufgabe vom Typ $P_{L,Q}$:

$$I(y) := \int_{-a}^{a} y(t)dt\,,\; Q(y) := \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'(t)^2}dt$$

$I(y)$ stellt also die Fläche dar, die die Kurve $[-a, a] \ni t \longmapsto (t, y(t) \in \mathbb{R}^2$ mit Länge l mit der x–Achse einschließt. □

Satz 2.22
Seien $L, Q : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $\overline{y}$ ein schwaches lokales Minimum. Wenn dann $\overline{y}$ keine Lösung von

$$G_y - \frac{d}{dt}G_{y'} = 0, y(a) = y_a, y(b) = y_b,$$

ist, dann gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ derart, dass $\overline{y}$ Lösung von

$$L_y - \frac{d}{dt}L_{y'} + \lambda(G_y - \frac{d}{dt}G_{y'}) = 0, y(a) = y_b, y(b) = y_b$$

ist.

Beweis:
Sei $t_1 \in (a, b)$. Wenn $\overline{y}$ keine Lösung der „Eulerschen Differentialgleichung“

$$G_y - \frac{d}{dt}G_{y'} = 0$$

ist, gibt es $t_2 \in [a, b]$ mit $(G_y - \frac{d}{ds}G_{y'})(t_2\overline{y}(t_2)\overline{y'}(t_2)) \neq 0$. O.E. $t_1 < t_2$. Wähle nun $\eta, \xi \in C^1[a, b], \alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit

$$a < \alpha < t_1 < \beta < \gamma < t_2 < \delta, \eta(t) = 0, t \notin (\alpha, \beta), \xi(t) = 0, t \notin (\gamma, \delta)\,,\, \eta(t_1) \neq 0\,,\, \xi(t_2) \neq 0\,.$$

Betrachte damit die Schar

$$y_{\epsilon,\tau} = \overline{y} + \epsilon\eta + \tau\xi, \epsilon, \tau \in \mathbb{R}.$$

Wir können lokal τ so einrichten, dass diese Schar die Nebenbedinungen für den Scharparameter ϵ erfüllt. Dies folgt so: Wir haben für

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (\epsilon, \tau) \longmapsto Q(y_{\epsilon,\tau}) - Q(\overline{y}) \in \mathbb{R}$$

die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen zur Verfügung, denn:

$$F \text{ ist differenzierbar, } F(0,0) = 0, \frac{\partial F}{\partial \tau}(0,0) = \int_a^b (G_y - \frac{d}{dt}G_{y,})(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))\xi(t)dt \neq 0,$$

wenn nur $\delta - \gamma$ genügend klein ist. Also gibt es $\epsilon_0, \tau = \tau(\epsilon)$ mit

$$\tau(0) = 0\,,\ F(\epsilon, \tau(\epsilon)) = 0\,,\ \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0), \text{ und } \tau'(0) = -\frac{\displaystyle\int_a^b (G_y - \frac{d}{dt}G_{y'})(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))\eta(t)dt}{\displaystyle\int_a^b (G_y - \frac{d}{dt}G_{y'})(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))\xi(t)dt}\,.$$

Wir setzen

$$\lambda := -\frac{L(t_2, \overline{y}(t_2), \overline{y}'(t_2))}{G(t_2, \overline{y}(t_2), \overline{y}'(t_2))}$$

Die Funktion

$$I : (-\epsilon_0, \epsilon_0) \ni \epsilon \longmapsto J(y_{\epsilon,\tau(\epsilon)}) \in \mathbb{R}$$

hat nun in $\epsilon := 0$ ein Minimum. Also ist

$$0 = \frac{dI}{d\epsilon}(0) = \int_a^b (L_y - \frac{d}{dt}L_{y'})(t, \overline{y}, \overline{y}'(t))(\eta(t) + \tau'(0)\xi(t))dt$$

$$= \int_a^b \{(L_y - \frac{d}{dt}L_{y'}) + \lambda(G_y - \frac{d}{dt}G_{y'})\}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))\eta(t)dt$$

$$+\left(\frac{L(t_2, \overline{y}(t_2), \overline{y}'(t_2))}{G(t_2, \overline{y}(t_2), \overline{y}'(t_2))} - \frac{\displaystyle\int_a^b (L_y - \frac{d}{dt}L_{y'})(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))\xi(t)dt}{\displaystyle\int_a^b (G_y - \frac{d}{dt}G_{y'})(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))\xi(t)dt}\right) \int_a^b (G_y - \frac{d}{dt}G_{y'})(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))\eta(t)dt\,.$$

Nun muss

$$\int_a^b \{(L_y - \frac{d}{dt}L_{y'}) + \lambda(G_y - \frac{d}{dt}G_{y'})\}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))\eta(t)dt = 0$$

gelten, da der zweite Term in der obigen Identität durch die Wahl von $\delta - \gamma$ beliebig klein gemacht werden kann. Wählt man nun η geeignet, dann folgt die Gütigkeit der behaupteten Gleichung. ■

Beispiel 2.23 Im Beispiel von Dido (siehe 2.21) haben wir die Gleichung

$$1+\lambda\frac{d}{dt}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0,\ \text{d.h. } t+\lambda\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=c_1$$

mit einer Konstante c_1. Eine einfache Integration führt auf die implizite Darstellung

$$(t-c_1)^2+(y-c_2)^2=\lambda^2,$$

also einer Familie von Kreisen. Die Werte von c_1, c_2, λ ergeben sich aus den Forderungen

$$y(-a)=y(a)=0\,,\, Q(y)=\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{1+y'(t)^2}dt=l.$$

□

Oben haben wir als grundsätzliche Nebenbedingung eine Gleichung in Integralform hinzugefügt. Wir wollen nun folgende Aufgabe betrachten:

$$P_{L,g}\begin{cases}\text{Minimiere } J(y):=\int_a^b L(t,y(t),y'(t))dt\\ \text{unter den Nebenbedingungen } y\in C^1([a,b];\mathbb{R}^d)\,,\\ y(a)=y_a, y(b)=y_b, g(t,y(t))=0, t\in[a,b]\,.\end{cases}$$

Hierbei sind $L:[a,b]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}\,, g:[a,b]\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ und $y_a, y_b\in\mathbb{R}^d$ vorgegeben.

Beachte, dass die Aufgabenstellung im eindimensionalen Fall, d.h. für $y(t)\in\mathbb{R}$, keinen Sinn machte, da die Nebenbedingungen $g(t,y(t))=0, t\in[a,b]$, dann keine Freiheit für die Minimierung ließe.

Satz 2.24
Seien L, g zweimal stetig differenzierbar. Es gelte:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(t,y)\neq\theta \text{ für alle } (t,y)\in[a,b]\times\mathbb{R}^d.$$

Sei $\overline{y}$ ein schwaches lokales Mimimum. Dann gibt es $\lambda:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, so dass $\overline{y}$ Lösung von

$$L_y-\frac{d}{dt}L_{y'}+\lambda g_y=0$$

ist

Beweis:
Wir gehen ähnlich wie im Beweis zu Satz 2.22 vor. Sei $t_1\in(a,b)$. Dann gibt es j mit $g_{y_j}(t_1,\overline{y}(t_1))\neq$. Wähle $\eta,\xi\in C^1[a,b], \alpha,\beta$ mit

$$a<\alpha<t_1<\beta<b, \eta(t)=0, t\notin(\alpha,\beta), \xi(t)=0, t\notin(\alpha,\beta), \eta(t_1)\neq0, \xi(t_1)\neq0\,.$$

Betrachte damit die Schar

$$y_{\epsilon,\tau}:=\overline{y}+\epsilon\eta e^i+\tau\xi e^j\;,\epsilon,\tau\in\mathbb{R}\,.$$

Wir können wieder mit dem Satz über implizite Funktionen $\epsilon_0 > 0, \tau = \tau(\epsilon)$ finden mit

$$\tau(0) = 0, g(t_1, y_{\epsilon,\tau(\epsilon)}(t_1)) = 0, \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)\,,\ \tau'(0) = -\frac{g_{y_i}(t_1, \overline{y}(t_1))\eta(t_1)}{g_{y_j}(t_1, \overline{y}(t_1))\xi(t_1)}\,.$$

Setze $I(\epsilon), \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$. Dann gilt $I'(0) = 0$, d.h.

$$0 = \int_a^b < (L_y - \frac{d}{dt}L_{y'})(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t)), \eta(t)e^i > dt - \tau'(0) \int_a^b < (L_y - \frac{d}{dt}L_{y'})(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t)), \xi(t)e^j > dt\,.$$

Da η und ξ im Rahmen der obigen Annahmen noch frei wählbar sind, folgt

$$< L_y - \frac{d}{dt}L_{y'})(t_1, \overline{y}(t_1), \overline{y}'(t_1)), e^i > - \frac{g_{y_i}}{g_{y_j}}(t_1, \overline{y}(t_1))(L_y - \frac{d}{dt}L_{y'})(t_1, \overline{y}(t_1), \overline{y}'(t_1)), e^j >= 0\,.$$

Beachte, i war beliebig gewählt. Setze

$$\lambda(t_1) := -\frac{1}{g_{y_j}(t_1, \overline{y}(t_1))} < (L_y - \frac{d}{dt}L_{y'})(t_1, \overline{y}(t_1), \overline{y}'(t_1)), e^j > \ .$$

Da t_1 beliebig war, folgt die behauptete Aussage. ∎

Bemerkung 2.25 Der Lagrange–Multiplikator λ in Satz 2.24 kann als stetige Funktion gewählt werden, wenn man berücksichtigt, dass $[a, b]$ durch endlich viele offene Intervalle so überdeckt werden kann, dass in jedem Intervall der Index j im Beweis zu Satz 2.24 konstant ist. □

Beispiel 2.26 Finde die kürzeste Verbindung auf der Kugeloberfläche. Hier ist

$$L(t, y_1, y_2, y_1', y_2') = \sqrt{1 + {y_1'}^2 + {y_2'}^2}\,,\ g(t, y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 - R^2\,.$$

Anwendung von Satz 2.24 ergibt die Gleichungen

$$2y_1\lambda - \frac{d}{dt}\frac{y_1'}{\sqrt{1 + {y_1'}^2 + {y_2'}^2}} = 0, 2y_2\lambda - \frac{d}{dt}\frac{y_2'}{\sqrt{1 + {y_1'}^2 + {y_2'}^2}} = 0$$

Vier Randbedingungen und die Bedingung g bestimmen schliesslich y_1, y_2, λ . □

Das Beispiel 2.26 hätten wir unter Benutzung von Kugelkoordinaten auch ohne Nebenbedingungen anpacken können. Liegt eine allgemeine Fläche vor, auf der wir eine kürzeste Verbindung – man nennt solche Kurven **Geodätische** – suchen, kommen wir nur mit einem Satz vom Typ 2.24 zurecht.

Beispiel 2.27 Finde die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten P, Q auf der durch die Gleichung

$$g(x, y, z) = 0$$

im Raum definierte Fläche. Nimmt man die zulässigen Kurven in der Form

$$y = y(x)\,,\ z = z(x)\,,\ x \in [a, b]\,,$$

darstellbar an, so hat man unter den Nebenbedingungen

$$g(x, y(x), z(x)) = 0\,,\ x \in [a, b]\,,$$

das Integral

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2}dx$$

zu minimieren, wobei noch

$$(y(a), z(a)) = P\,,\ (y(b), z(b)) = Q$$

zu berücksichtigen ist. □

2.6 Die notwendige Bedingung 2. Ordnung

Wir betrachten erneut

$$I(\epsilon) := J(\overline{y} + \epsilon\eta)$$

mit $\eta \in C_0^1([a, b]; \mathbb{R}^d)$. Die Eulersche Differentialgleichung resultiert aus

$$\frac{dI}{d\epsilon}(0) = 0\,.$$

Wie in der Analysis folgt auch

$$\frac{d^2I}{d\epsilon^2}(0) \geq 0\,,$$

vorausgesetzt, daß I zweimal differenzierbar ist; hinreichend dafür ist, daß L zweimal stetig partiell differenzierbar ist. Wir haben dann

$$\frac{d^2I}{d\epsilon^2}(0) = \int_a^b \{< P(t)\eta(t), \eta(t) > +2 < Q(t)\eta(t), \eta'(t) > + < R(t)\eta'(t), \eta'(t) >\}dt \tag{2.11}$$

mit

$$P(t) := L_{yy}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t)\,,\ Q(t) := L_{yy'}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))\,,\ R(t) := L_{y'y'}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))\,,\ t \in [a, b]\,.$$

Beachte, dass nach dem Satz von Schwarz die Matrizen P, Q, R punktweise symmetrisch sind. Auf Legendre geht der folgende Satz zurück.

Satz 2.28
Sei $L : [a, b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar und sei $\overline{y} \in C^2([a, b]; \mathbb{R}^d)$ ein schwaches lokales Minimum zur Aufgabe P_L. Dann gilt:

a) $\overline{y}$ ist Lösung der Randwertaufgabe (2.27).

b) $L_{y'y'}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))$ ist positiv definit für alle $t \in [a, b]$.

Beweis:
Wir führen den Beweis nur für den skalaren Fall $d = 1$; die Verallgemeinerung liegt auf der Hand. Wir haben

$$\int_a^b \{< P(t)\eta(t), \eta(t) > +2 < Q(t)\eta(t), \eta'(t) > + < R(t)\eta'(t), \eta'(t) >\}dt \geq 0 \tag{2.12}$$

für alle $\eta \in C_0^1([a,b];\mathbb{R}^d)$. Offenbar gilt (nun die Tatsache $d = 1$ berücksichtigend)

$$\int_a^b \{P(t)\eta(t)^2 + 2Q(t)\eta(t)\eta'(t)\}dt = \int_a^b S(t)\eta(t)^2 dt$$

mit $S(t) := P(t) - Q'(t) \quad , t \in [a,b]$; hier benötigen wir die dreimalige Differenzierbarkeit.
Annahme: Es gibt $t_0 \in (a,b)$ mit $R(t_0) < 0$.

Da R stetig ist, gibt es $h > 0$ und $\gamma > 0$ mit $R(t) \leq -\gamma \ \ , t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Definiere $\eta \in C_0^1[a,b]$ durch

$$\eta(t) := \begin{cases} \sin^2(\frac{\pi(t-t_0)}{h}) & , t_0 - h \leq t \leq t_0 + h \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} .$$

Dann gilt mit $M := \max\limits_{t\in[a,b]} |S(t)|$

$$\int_a^b (S(t)\eta(t)^2 + R(t)\eta'(t)^2)dt \leq 2Mh - 2\gamma\frac{\pi^2}{h} .$$

Wählt man h genügend klein, wird der Ausdruck $2Mh - 2\gamma\frac{\pi^2}{h}$ negativ und wir erhalten einen Widerspruch zu (2.12). ■

Bemerkung 2.29 Man kommt in Satz 2.28 für $d = 1$ bei genauerer Untersuchung auch mit den Voraussetzungen

$$L : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ zweimal stetig differenzierbar, } \overline{y} \in C^1[a,b],$$

aus. □

Legendre versuchte im Fall $d = 1$ nachzuweisen, daß die Verschärfung der notwendigen Bedingung $b)$ in Satz 2.28 zu

$$L_{y'y'}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t)) > 0 \ \ , t \in [a,b], \tag{2.13}$$

schon hinreichend dafür ist, daß $\overline{y}$ ein schwaches lokales Minimum ist. Sein Versuch läßt sich entlang seiner nicht stichhaltigen Ableitung der notwendigen Bedingung $b)$ in Satz 2.28 skizzieren. Er geht aus von

$$\frac{d^2 I}{d\epsilon^2}(0) = \int_a^b \{P(t)\eta(t)^2 + 2Q(t)\eta(t)\eta'(t) + R(t)\eta'(t)^2\}dt \geq 0$$

für alle $\eta \in C_0^1[a,b]$ und seine Idee besteht darin, zum Term $\frac{d^2 I}{d\epsilon^2}(0)$ den wegen $\eta(a) = \eta(b) = 0$ verschwindenden Ausdruck

$$\int_a^b \frac{d}{dt}(\eta(t)^2 w(t))dt$$

hinzu zuaddieren; dabei ist $w \in C^1[a,b]$ zunächst noch beliebig. Wir erhalten so

$$\int_a^b \{(P(t)+w'(t))\eta(t)^2 + 2(Q(t)+w(t))\eta(t)\eta'(t) + R(t)\eta'(t)^2\}dt \geq 0$$

für alle $\eta \in C_0^1[a,b]$. Wählen wir w so, daß w Lösung der Differentialgleichung

$$w' = -P(t) + \frac{(Q(t)+w)^2}{R(t)} \tag{2.14}$$

ist, so entsteht die Aussage

$$\int_a^b R(t)(\eta'(t) + \frac{Q(t)+w(t)}{R(t)}\eta(t))^2 dt \geq 0 \;\text{ für alle } \eta \in C_0^1[a,b]\,. \tag{2.15}$$

Hat die Differentialgleichung (2.14) eine Lösung mit Existenzintervall $[a,b]$ und ist $(Q+w)R^{-1}$ in $[a,b]$ stetig, so folgt aus (2.15) sofort

$$R(t) = L_{y'y'}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t)) \geq 0 \;, t \in [a,b]. \tag{2.16}$$

Die Differentialgleichung (2.14) ist eine Differentialgleichung vom Riccati–Typ. Man weiß, daß solche nichtlinearen Differentialgleichungen nicht notwendigerweise Lösungen in dem ganzen Intervall besitzen, in dem sie formuliert sind. Bei der oben skizzierten Ableitung der notwendigen Bedingung kommt erschwerend hinzu, daß wir auch noch mit Singularitäten im Term $(Q(t)+w)^2R(t)^{-1}$ zu rechnen haben, aber selbst bei dem umgekehrten Schluß, daß die verschärfte Bedingung (2.13) hinreichend für Optimalität ist, ist nicht sichergestellt, daß die Differentialgleichung (2.14) in $[a,b]$ eine Lösung besitzt. Hierzu folgendes Beispiel.

Beispiel 2.30 Sei $R(t) = 1,\ P(t) = -1,\ Q(t) = 0,\ t \in [0,b];\ b > 1.$
Die zugehörige Riccati–Differentialgleichung (2.14) lautet:

$$w' = w^2 + 1\,.$$

Mit einer Integrationskonstanten τ lautet die Lösungsschar

$$w(t) := \tan(t-\tau) \;\;.$$

Sie ist höchstens auf dem Intervall $(\tau - \pi, \tau + \pi)$ erklärt. Der Wert des Integrals

$$\int_0^b (P(t)\eta(t)^2 + R(t)\eta'(t)^2)dt = \int_0^b (\eta'(t)^2 - \eta(t)^2)dt$$

ergibt sich für

$$\eta(t) := \begin{cases} t & , 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & , 1 \leq t \leq b-1 \\ -t+b & , b-1 \leq t \leq b \end{cases}$$

zu $\frac{10}{3} - b$, d.h. er wird negativ für $b > \frac{10}{3}$. □

Die Lücke in der Argumentation von Legendre ist bereits Lagrange aufgefallen. Daß die Bedingung (2.13) nicht doch hinreichend für Optimalität ist, ist damit nicht ausgeschlossen. Allerdings rät die Erfahrung mit Differenzierbarkeitsbegriffen, Richtungsableitung, Frechetableitung, wie sie in der Analysis mehrerer Variablen studiert werden, zur Vorsicht. Wir geben ein Beispiel dafür, daß die Bedingung (2.13) in der Tat im allgemeinen nicht hinreichend ist.

Beispiel 2.31 Wir wollen die kürzeste Verbindungskurve zwischen zwei Punkten auf der Kugel mit Radius R suchen.
Die Kugel um den Nullpunkt läßt sich lokal auf Längengrade ϑ und Breitengrade φ als Parameter beziehen. Koordinaten:

$$(R\cos\vartheta\cos\varphi, R\sin\vartheta\sin\varphi, R\sin\varphi)\,,\ \vartheta\in[0,2\pi)\,,\ \varphi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\,.$$

Wir betrachten Kurven auf der Kugel, die jeden Meridian in nur einem Punkt treffen. Für diese Kurven kann man die „geographische“ Länge $t := \vartheta$ als Kurvenparameter wählen; die „geographische“ Breite φ der Kurvenpunkte wird durch eine Funktion y der unabhängigen Variablen t beschrieben. Eine Parameterdarstellung der Kurve ist dann

$$[a,b]\ni t\mapsto R(\cos t\cos y(t), \sin t\cos y(t), \sin y(t))\in\mathbb{R}^3\,.$$

Die Punkte, die durch eine kürzeste Kurve der obigen Art verbunden werden sollen, sind dann (a, y_a) , (b, y_b) . Wenn y stetig differenzierbar ist, berechnet man die Länge einer solchen Kurve nach der Formel

$$I(y) = \int_a^b R\sqrt{\cos^2 y(t) + y'(t)^2}dt\,.$$

Die Eulersche Differentialgleichung führt hier auf die Identität

$$-\cos y = A\sqrt{\cos^2 y + y'^2}$$

mit einer Konstante A. Offenbar gilt $A\in(-1,0)$. Es folgt

$$A^2 y'^2 = \cos^4 y - A^2\cos^2 y$$

und Trennung der Variablen führt auf

$$\int\frac{A dy}{\cos y\sqrt{\cos^2 y - A^2}} = \pm(t-a) + B;\ B \text{ Konstante.}$$

Mit der Substitution $u = \tan y$ erhalten wir schließlich

$$y(t) = \arctan(\frac{\sqrt{1-A^2}}{A}\sin(\pm(t-a)+B))$$

wobei A, B Konstanten sind, die durch a, b, y_a, y_b festgelegt werden.

Der „Äquator“ $\overline{y} = \theta$, d.h. $A = -1$, ist eine Extremale, er ist sogar eine reguläre Extremale, da hier mit $L(t, y, y') := r\sqrt{\cos^2 y + y'^2}$ gilt:

$$L_{y'y'}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t)) = 1 \text{ für alle } t\in[a,b].$$

Aus der Anschauung wissen wir jedoch, daß für $b - a > \pi$ dieses Äquatorstück nicht kürzeste Verbindung der in Frage stehenden Punkte ist. Es gibt also offenbar Extremalen, bei denen „kurze Stücke“ Lösungen des Variationsproblems sind, „lange Stücke“ dagegen nicht. □

Um mit einem Fall, wie er in obigem Beispiel auftritt, besser zurechtzukommen, sollten wir nach weiteren notwendigen Bedingungen suchen. Wir sollten dabei nach Bedingungen suchen, die die verschärfte Legendre–Bedingung zu einer hinreichenden Bedingung machen. In welche

Richtung wir suchen müssen, ergibt sich aus der Betrachtung der „zweiten Variation“. Sei dazu $\overline{y}$ eine Extremale und sei $\eta \in C_0^1([a,b];\mathbb{R}^d)$. Wir haben mit $I(\epsilon) := J(\overline{y} + \epsilon\eta)$ – genügende Glattheit vorausgesetzt –

$$I(\epsilon) = I(0) + \epsilon I'(0) + \frac{\epsilon^2}{2} I''(0) + \frac{\epsilon^3}{6} I'''(\tau) = I(0) + \frac{\epsilon^2}{2} I''(0) + \frac{\epsilon^3}{6} I'''(\tau) \text{ mit } |\tau| < \epsilon\,,$$

falls $\overline{y}$ eine Extremale ist. Also haben wir dann

$$J(\overline{y} + \epsilon\eta) > J(\overline{y}) \text{ falls } I''(0) > 0 \text{ und } \epsilon \text{ genügend klein.}$$

Wenn wir also zeigen können, dass das Problem

$$\begin{cases} \text{Minimiere } \int\limits_a^b \{< P(t)z(t), z(t) > + < R(t)z'(t), z'(t) >\} dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } z \in Z_{ad} := \{v \in C^1([a,b];\mathbb{R}^d) | v(a) = v(b) = 0\} \end{cases}$$

mit (siehe Beweis zu Satz 2.28) $P(t) := (L_{yy} - \frac{d}{dt} L_{yy'})(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))$, $R(t) := L_{y'y'}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))$, $t \in [a,b]$ nur die triviale Lösung besitzt, dann ist klar, dass $\overline{y}$ ein schwach lokales Minimum ist. Mit dieser Frage beschäftigen wir uns im nächsten Abschnitt.

2.7 Ein quadratisches Problem

Wir betrachten

$$P_Q \begin{cases} \text{Minimiere } Q(z) := \int\limits_a^b \{< P(t)z(t), z(t) > + < R(t)z'(t), z'(t) >\} dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } z \in Z_{ad} := \{v \in C^1([a,b];\mathbb{R}^d) | v(a) = v(b) = 0\} \end{cases}$$

und setzen generell voraus:

$$P \in C^1([a,b];\mathbb{R}^d)\,,\ R \in C^2([a,b];\mathbb{R}^d)\,.$$

(Für manche Überlegungen reicht auch $P \in C([a,b];\mathbb{R}^d)$, $R \in C^1([a,b];\mathbb{R}^d)$.)

Die Überlegungen am Ende des vorhergehnden Abschnitts zeigen, dass die Suche nach hinreichenden Bedingungen für das Vorhandensein eines schwach lokalen Minimums auf die Suche nach hinreichenden Bedingungen für die Aussage

$$Q(z) > 0 \text{ für alle } z \in Z_{ad} \backslash \{\theta\}$$

zurückgeführt werden kann. Wir wissen auch schon, dass die Bedingung

$$R(t) \text{ positiv semidefinit für alle } t \in [a,b]$$

notwendig dafür ist. Wir wissen auch, daß die verschärfte Bedingung

$$R(t) \text{ positiv definit für alle } t \in [a,b], \tag{2.17}$$

nicht hinreichend ist. Wegen $Q(\theta) = 0$ können wir die einschlägige Frage auch so stellen:

Wann hat das Problem P_Q nur die triviale Lösung?

Die Eulersche Differentialgleichung zum Problem P_Q ist

$$P(t)z - \frac{d}{dt}(R(t)z') = 0\,. \tag{2.18}$$

(2.18) ist eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, von der wir aber im allgemeinen nicht sagen können, daß sie nur die triviale Lösung für die Randwerte $z(a) = z(b) = 0$ besitzt. Man sieht dies etwa bei der Randwertaufgabe

$$z'' + z = 0 \ \ , z(0) = z(\pi) = 0,$$

die die nichttriviale Lösung $t \longmapsto \sin t$ besitzt. Weiterhin beleuchtet wird dies durch

Beispiel 2.32 Zum quadratischen Funktional

$$Q(z) := \int_a^b \{-\omega^2 z(t)^2 + z'(t)^2\}dt$$

gehört die Eulersche Differentialgleichung

$$z'' + \omega^2 z = 0$$

Wir können 3 Fälle unterscheiden:

- Ist $\omega b < \pi$, so ist das Funktional Q positiv definit, d.h. $Q(z) > 0$ für alle $z \in Z_{ad}\backslash\{\theta\}$.
- Ist $\omega b = \pi$, so ist das Funktional Q positiv semidefinit, d.h. $Q(z) \geq 0$ für alle $z \in Z_{ad}$.
- Ist $\omega b > \pi$, so ist das Funktional Q indefinit, d.h. weder Q noch $-Q$ ist positiv semidefinit.

Den ersten Fall können wir mit Hilfe der Fourierreihen klären. Dazu setzen wir $z \in Z_{ad}$ so

$$z(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} z_k \sin(\frac{k\pi}{b}t)$$

an und erhalten

$$\int_0^b (-\omega^2 z(t)^2 + z'(t)^2)dt = \frac{b}{2}\sum_{k=1}^{\infty} z_k^2(-\omega^2 + \frac{k^2\pi^2}{b^2})$$

woraus die Behauptung sofort folgt. Daraus liest man auch ab, wie die Fälle 2 und 3 zu belegen sind. □

Dies führt uns nun zum Konzept der konjugierten Punkte.

Definition 2.33
$\hat{a} \in (a, b]$ heißt ein zu a **konjugierter Punkt**, falls die Randwertaufgabe

$$P(t)z - \frac{d}{dt}(R(t)z') = 0\,,\ z(a) = z(\hat{a}) = 0\,, \tag{2.19}$$

eine nichttriviale Lösung besitzt. □

Sei $\hat{a}$ ein zu a konjugierter Punkt und sei z eine nichttriviale Lösung von (2.19). Dann ist wegen der Linearität auch $\lambda z, \lambda \neq 0$, eine nichttriviale Lösung von (2.19). Da aus Eindeutigkeitsgründen $z'(a) \neq 0$ sein muß – beachte, daß jede Lösung von (2.18) mit $z(a) = z'(a) = \theta$ verschwindet –, können wir o.E. annehmen $z'(a) = e^1$. Wenn wir hier den skalaren Fall $d = 1$ betrachten, bedeutet dies also $z'(a) = 1$. Dies wird im Zusammenhang mit konjugierten Punkten im skalaren Fall meist so geschehen.

Satz 2.34
Es gelte:

a) $P \in C^1([a,b];\mathbb{R}^d)$, $R \in C^2([a,b];\mathbb{R}^d)$.

b) *$R(t)$ positiv definit für alle $t \in [a,b]$.*

c) *In $(a,b]$ gibt es keine zu a konjugierten Punkte.*

Dann ist Q positiv definit, d.h. $Q(z) > 0$ für alle $z \in Z_{ad} \backslash \{\theta\}$.

Beweis:
Wir folgen der Idee von Legendre, die wir bereits im vorhergehenden Abschnitt skizziert haben, und betrachten nur den Fall $d = 1$. Dazu addieren wir zu $Q(z)$ den verschwindenden Term

$$\int_a^b \frac{d}{dt}(z(t)^2 w(t))dt$$

und erhalten bei der Wahl von w gemäß

$$w' = \frac{w^2}{R(t)} - P(t) \tag{2.20}$$

die folgende Darstellung von Q:

$$Q(z) = \int_a^b R(t)(z'(t) + \frac{w(t)}{R(t)} z(t))^2 dt$$

Damit ist schon klar, daß Q positiv semidefinit ist. Verschwindet nun Q für ein $z \in Z_{ad}$, so muß z eine Lösung der Differentialgleichung

$$z' + \frac{w(t)}{R(t)} z = 0$$

sein. Wegen $z(a) = 0$ ist auch $z'(a) = 0$, also aus Eindeutigkeitsgründen $z = \theta$. Damit ist der Beweis dafür erbracht, daß Q positiv definit ist, falls es gelingt, die Wahl von w gemäß (2.20) abzusichern. (2.20) ist eine Riccatische Differentialgleichung, deren Lösbarkeit in ganz $[a,b]$ zunächst nicht sichergestellt ist. Bekanntlich wird eine Riccatische Differentialgleichung der obigen Form durch die Transformation

$$w = -\frac{u'}{u} R(t) \tag{2.21}$$

in die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$P(t)u - \frac{d}{dt}(R(t)u') = 0 \tag{2.22}$$

überführt. Dies ist nun gerade die Eulersche Differentialgleichung zum quadratischen Problem P_Q. Hat nun (2.22) eine Lösung $u \in C^2[a,b]$ mit $u(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$, so ist die Existenz von w klar. Also betrachten wir nun die Gleichung (2.22). Beachte dabei, dass nach Satz 2.15 eine Lösung $u \in C^1[a,b]$ sogar in $C^2[a,b]$ ist.
Wir setzen R, P auf das Intervall $[a-\delta, b], \delta > 0$, so fort, dass

$$R(t) > 0\,,\ t \in [a-\delta, b]\,,\ P \in C[a-\delta, b]\,,\ R \in C^1[a-\delta, b]$$

gilt und beweisen indirekt: Es gibt $\epsilon \in (0,\delta)$, so dass in $[a,b]$ keine zu $a-\epsilon$ konjugierte Punkte liegen.
Annahme: Es gibt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ $a_n \in [a - \frac{1}{n}, a)\,,\ \widehat{a_n} \in [a,b]$ und dazu eine nichttriviale Lösung u_n der Randwertaufgabe

$$P(t)u - \frac{d}{dt}(R(t)u') = 0\,,\ u(a_n) = u(\widehat{a_n}) = 0\,.$$

($\widehat{a_n} \in [a,b]$ ist also ein zu a_n konjugierter Punkt.) O.E. $u_n'(a_n) = 1\,,\ n \in \mathbb{N}$ (siehe oben). Da $[a,b]$ kompakt ist, können wir o.E. annehmen, dass $(\widehat{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $\hat{a} \in [a,b]$ konvergiert. Da Lösungen von Differentialgleichungen (unter den hier vorliegenden Bedingungen) stetig vom Anfangszeitpunkt abhängen, gibt es $u \in C^1[a,b]$ mit

$$\lim_n \max_{t\in[a,b]} \{|u_n(t) - u(t)| + |u_n'(t) - u'(t)|\} = 0\,.$$

Aus der Differentialgleichung (2.22) liest man sogar ab, daß

$$\lim_n \max_{t\in[a,b]} |u_n''(t) - u''(t)| = 0$$

gilt und daß u eine Lösung von (2.22) ist mit $u(a) = u(\hat{a}) = 0, u'(a) = 1$. Da $u_n(a_n) = u_n(\widehat{a_n}) = 0, u'(a) = 1$ ist, kann $\lim_n \widehat{a_n} = a$ nicht gelten. Also $a \neq \hat{a}$. Dann wäre aber $\hat{a}$ zu a konjugierter Punkt. Dies ist ein Widerspruch.
Negiert man nun die obige Annahme, dann kann man also eine Lösung der Differentialgleichung (2.22) in $[a-\epsilon, b]$ wählen mit $u(a-\epsilon) = 0$ und $u(t) \neq 0, t \in [a,b]$. ■

Lemma 2.35
Es gelte: $P \in C^1([a,b];\mathbb{R}^d)\,,\ R \in C^2([a,b];\mathbb{R}^d)$. *Seien* $a_1, b_1 \in [a,b],\ a_1 < b_1$. *Sei* z *eine Lösung von* P_Q *mit* $z(a_1) = z(b_1) = 0$. *Dann gilt:*

$$\int_{a_1}^{b_1} \{< P(t)z(t), z(t) > + < R(t)z'(t), z'(t) >\}dt = 0\,.$$

Beweis:
Aus

$$0 = \int_{a_1}^{b_1} < P(t)z(t) - \frac{d}{dt}(R(t)z'(t)), z(t) > dt$$

folgt die Aussage durch partielle Integration. ■

Satz 2.36
Es gelte: $P \in C^1([a,b];\mathbb{R}^d)\,,\ R \in C^2([a,b];\mathbb{R}^d)$. *Sei* $R(t)$ *positiv definit für alle* $t \in [a,b]$ *und sei* Q *positiv definit, d.h.* $Q(z) > 0$ *für alle* $z \in Z_{ad}\backslash\{\theta\}$. *Dann enthält* $(a,b]$ *keinen zu* a *konjugierten Punkt.*

Beweis:
Sei wiederum nur der Fall $d = 1$ betrachtet. Wir wollen einen Homotopieschluß machen. Wir setzen dazu für $z \in Z_{ad}$

$$Q_r(z) := \int_a^b \{r(P(t)z(t)^2 + R(t)z'(t)^2) + (1-r)z'(t)^2\}dt \,.$$

Wir haben offenbar

$$Q_0(z) = \int_a^b z'(t)^2 dt, z \in Z_{ad}\,,\, Q_1(z) = Q(z), z \in Z_{ad}\,,$$

und Q_r offensichtlich positiv definit für jedes $r \in [0,1]$. Die Eulersche Differentialgleichung zum quadratischen Problem, das durch Q_r bestimmt wird, lautet:

$$rP(t) - \frac{d}{dt}((rR(t) + (1-r))z') = 0. \tag{2.23}$$

Insbesondere ist die zu Q_0 gehörende Eulersche Differentialgleichung sehr einfach: $z'' = 0$. Sie hat in $(a, b]$ keine zu a konjugierte Punkte. Der Beweis besteht nun darin, zu zeigen, daß „auf dem Wege von $r = 0$ nach $r = 1$“ keine konjungierte Punkte entstehen können. Sei $Z(\cdot, r)$ die Lösung von (2.23) mit $Z(a, r) = 0,\ Z'(a, r) = 1$. Offenbar ist $Z(t, 0) = t - a\ , t \in [a, b]$. Ferner gilt wegen der Nichttrivializät von $Z(\cdot, r)$ (Eindeutigkeit):

$$\text{Ist } (t_0, r_0) \in [a, b] \times [0, 1] \text{ mit } Z(t_0, r_0) = 0, \text{ so ist } Z'(t_0, r_0) \neq 0. \tag{2.24}$$

Betrachte nun

$$A := \{(\tilde a, r) \in [a, b] \times [0, 1] | Z(\tilde a, r) = 0\}\,.$$

Annahme: $\hat a \in (a, b]$ ist ein zu a konjugierter Punkt (bezüglich $Q = Q_1$). Aus dem Lemma 2.35 und der Voraussetzung folgt $\hat a \neq b$. Wegen $Z'(\hat a, 1) \neq 0$ ist die Gleichung

$$Z(\tilde a, r) = 0$$

in der Umgebung von $(\hat a, 1)$ auflösbar, d.h. es gibt ein Intervall $(r_0, 1]$ und $\tilde a : (r_0, 1] \to [a, b]$ mit

$$Z(\tilde a(r), r) = 0\,,\ r \in (r_0, 1]\,,\ \tilde a(1) = \hat a\ ,\ \tilde a \in C^1((r_0, 1])\,.$$

Nun gibt es $\epsilon > 0$, so dass

$$|Z'(a(r), r)| \geq \epsilon\,,\ r \in (r_0, 1)\,, \tag{2.25}$$

denn sonst gäbe es Folgen $(r_l)_{l\in\mathbb{N}}, (a(r_l))_{l\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_l r_l = r_0\,,\ \lim_l \tilde a(r_l) =: \bar a\,,\ \lim_l Z'(\tilde a(r_l), r_l) = 0\,.$$

Da die Lösungen $Z(\cdot, r)$ stetig von r abhängen, folgt $Z(\bar a, r_0) = 0\,,\ Z'(\bar a, r_0) = 0$ im Widerspruch zur Nichttrivialität von $Z(\cdot, r_0)$. Wir haben nun also

$$\tilde a'(r) = Z'(\tilde a(r), r)^{-1} \frac{\partial Z}{\partial r}(\tilde a(r), r)\,,\ r \in (r_0, 1]. \tag{2.26}$$

Dabei ist berücksichtigt, daß die Lösungen $Z(\cdot, r)$ differenzierbar von r abhängen. Da $[a,b]$ kompakt ist, gibt es zu jeder Folge $(r_l)_{l\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_l r_l = r_0$ eine konvergente Teilfolge $(\tilde a(r_{l_k}))_{k\in\mathbb{N}}$. Wegen (2.25) sind die Limiten all dieser Folgen eindeutig bestimmt, wie man an

$$0 = \frac{Z(\tilde a(r_1), r_1) - Z(\tilde a(r_2), r_2)}{r_1 - r_2}$$
$$= \frac{\partial Z}{\partial r}(\tilde a(r'), r')(r_1 - r_2) + Z'(\tilde a(r'), r')(\tilde a(r_1) - \tilde a(r_2))$$

bei geeigneter Interpretation ablesen kann. Dies zeigt, daß

$$\breve a := \lim_{r\to r_0} \tilde a(r) \in [a,b]$$

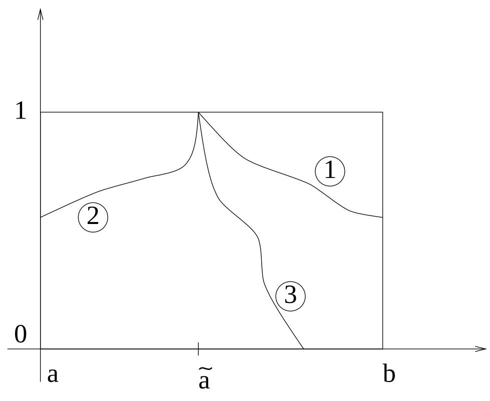

Abbildung 2.3: Konjugierte Punkte

existiert. Dann können wir aber den Pfad $(r_0, 1] \ni r \longmapsto \tilde a(r) \in [a,b]$ in $\breve a$ fortsetzen, falls $\breve a \neq a, \breve a \neq b$. Die so fortgesetzten Pfade können also nicht in $(a,b)\times(0,1]$ „enden“. Damit bleiben 3 Fälle zu diskutieren.

1. Fall: $\tilde a(r_0) = b$.
Hier gilt $Z(a, r_0) = Z(b, r_0) = 0$ und nach Lemma 2.35 wäre Q_{r_0} nicht positiv definit. Dieser Fall tritt also nicht ein.

2. Fall: $\tilde a(r_0) = a$.
Wegen $Z(\tilde a(r), r) = Z(a, r) = 0, r \in (r_0, 1]$, gibt es $\zeta_r \in [a, \tilde a(r)]$ mit $Z'(\zeta_r, r) = 0, r \in (r_0, 1]$. Wegen $\lim_{r\to r_0} \zeta_r = a$ und da $Z'(\cdot, r)$ stetig vom Parameter r abhängt, folgt $Z'(a, r_0) = 0$ im Widerspruch zu $Z'(a, r_0) = 1$. Also tritt dieser Fall nicht ein.

3. Fall: $r_0 = 0$ und $\tilde a(r_0) \in (a,b)$.
Dann ist $\tilde a(r_0)$ ein zu a konjugierter Punkt bezüglich Q_0, was ausgeschlossen ist (siehe oben). Also tritt dieser Fall nicht ein.
Dies bedeutet nun, daß ein zu a konjugierter Punkt in $(a,b]$ nicht existiert. ■

Satz 2.37
Es gelte: $P \in C^1([a,b];\mathbb{R}^d)$, $R \in C^2([a,b];\mathbb{R}^d)$. Sei $R(t)$ positiv definit für alle $t \in [a,b]$ und sei Q positiv semidefinit, d.h. $Q(z) \geq 0$ für alle $z \in Z_{ad}$.
Dann enthält (a,b) keinen zu a konjugierten Punkt.

Beweis:
Wir gehen für $d = 1$ in den Beweis des vorhergehenden Satzes. Es ist Q_r positiv definit für jedes $r \in [0,1]$. Also gibt es in $(a,b]$ keinen zu a konjugierten Punkt bzgl. Q_r für jedes $r \in [0,1)$.
Annahme: $\hat a \in (a,b)$ ist ein konjugierter Punkt von P_Q.
Sei dazu z eine nichttriviale Lösung von 2.23 für $r = 1$ mit $z(a) = z(\hat a) = 0$. Dann ist $z'(\hat a) \neq 0$. Da die Lösungen von (2.23) stetig vom Parameter r abhängen, gibt es $r < 1$ und dazu einen konjugierten Punkt $\breve a$ zu P_{Q_r}, was ein Widerspruch ist. ■

Satz 2.38
Es gelte: $P \in C^1([a,b];\mathbb{R}^d)$, $R \in C^2([a,b];\mathbb{R}^d)$. Sei $R(t)$ positiv definit für alle $t \in [a,b]$. Dann sind äquivalent:

a) Q ist positiv definit, d.h. $Q(z) > 0$ für alle $z \in Z_{ad}\backslash\{\theta\}$.

b) $(a,b]$ enthält keine zu a konjugierte Punkte.

Beweis:
Zu $a) \implies b)$ Siehe Satz 2.36.
Zu $b) \implies a)$ Siehe Satz 2.34. ■

Halten wir nun fest, was wir über notwendige und hinreichende Bedingungen für das Problem P_L wissen. Dabei liegt die Betonung nicht auf möglichst minimalen Voraussetzungen bezüglich des Integranden L.

Satz 2.39
Sei $L : [a,b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ viermal stetig differenzierbar und sei $\overline{y} \in C^2([a,b];\mathbb{R}^d)$ Lösung der Randwertaufgabe

$$L_y - \frac{d}{dt} L_{y'} = 0\,,\ y(a) = y_a, y(b) = y_b\,. \tag{2.27}$$

Dann gilt:

a) Ist $\overline{y}$ schwach lokales Minimum, dann ist $L_{y'y'}(t,\overline{y}(t),\overline{y}'(t))$ positiv semidefinit für alle $t \in [a,b]$.

b) Ist $L_{y'y'}(t,\overline{y}(t),\overline{y}'(t))$ positiv definit für alle $t \in [a,b]$ und enthält $(a,b]$ keine konjugierten Punkte bezüglich der Eulerschen Differentialgleichung

$$P(t)z - \frac{d}{dt}(R(t)z') = 0$$

mit

$$P(t) := (L_{yy} - \frac{d}{dt} L_{yy'})(t,\overline{y}(t),\overline{y}'(t))\,,\ R(t) := L_{y'y'}(t,\overline{y}(t),\overline{y}'(t))\,,\ t \in [a,b]\,,$$

so ist $\overline{y}$ schwach lokales Minimum.

Beweis:
Man setze die obigen Sätze zusammen. ■

Bevor wir nun fortsetzen, die obigen Sätze zu hinreichenden Bedingungen auszubauen, wollen wir das Erreichte auf Probleme der klassischen Mechanik anwenden.

2.8 Übungen

1.) Betrachte ein Variationsproblem mit $L(t,y,y') := \sin y'$. Finde eine Extremale für die Randbedingungen $y(0) = -5, y(1) = 2$.

2.) Betrachte ein Variationsproblem mit $L(t,y,y') := 2ty - y^2 + 3y'y^2$. Finde eine Extremale für die Randbedingungen $y(0) = 0, y(1) = 1$.

3.) Betrachte ein Variationsproblem mit $L(t,y,y') := y^2 - y'^2$. Finde eine Extremale für die Randbedingungen $y(0) = y(\pi) = 0$.

4.) Betrachte ein Variationsproblem mit $L(t,y,y') := \dfrac{y'^3}{t^2}$. Finde eine Extremale für die Randbedingungen $y(1) = 1, y(2) = 7$.

5.) Betrachte ein Variationsproblem mit $L(t,y,y') := y^2 - y'^2$ im Intervall $[0,\frac{\pi}{2}]$. Finde eine Extremale für die Randbedingung $y(0) = 0$.

6.) Betrachte ein Variationsproblem mit $L(t,y,y') := \cos y'$ im Intervall $[0,1]$. Finde Extremalen für die Randbedingung $y(0) = 0$.

7.) Betrachte ein Variationsproblem mit $L(t,y,y') := \dfrac{y}{\sqrt{1+y'^2}}$.

(a) Wie sieht die Eulersche Differentialgleichung aus?

(b) Wie sieht eine Extremale bei den Randbedingungen $y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1$ mit $t_0 < t_1$ und $y_0 > 0, y_1 > 0$ aus?

(c) Betrachte den Grenzwert für $t_0 \to t_1$ in (b).

8.) Sei $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ und betrachte das Variationsproblem

$$\begin{cases} \text{Minimiere } I(y) := \int_a^b L(t, y(t), y'(t), y''(t))\,dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } y \in C^2([a,b];\mathbb{R}^d)\,,\ y(a) = y_a, y(b) = y_b\,. \end{cases}$$

Finde notwendige Bedingungen für eine Lösung $\overline{y}$ in einer Art „Eulerschen Differentialgleichung" für dieses Problem.
Hinweis: Versuche es wieder mit einer einparametrischen Schar $\overline{y} + \epsilon\eta$.

9.) Finde eine Extremale zu

$$\begin{cases} \text{Minimiere } J(y) := \int_0^1 (1 + y''^2)\,dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } y \in C^2[a,b]\,,\ y(0) = 0, y'(0) = y(1) = y'(1) = 1\,. \end{cases}$$

10.) Finde eine Extremale zu

$$\begin{cases} \text{Minimiere } J(y) := \int_0^1 (t^2 + y'^2(t))\,dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } y \in C^1[a,b]\,,\ y(0) = 0, y(1) = 0\,,\ \int_0^1 y(t)^2\,dt = 2\,. \end{cases}$$

11.) Finde eine Extremale zu

$$\begin{cases} \text{Minimiere } J(y) := \int_0^1 y^2(t)\,dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } y \in C([a,b]\,,\ \int_0^1 y(t)^5\,dt = 1\,. \end{cases}$$

12.) Finde eine Extremale zu

$$\begin{cases} \text{Minimiere } J(y) := \int_0^1 y'^{\frac{4}{3}}(t)\,dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } y \in C[a,b]\,,\ y(0) = 0, y(1) = 5\,,\ \int_0^1 ty'(t)\,dt = 5 \end{cases}$$

13.) Finde eine Extremale zu

$$\begin{cases} \text{Minimiere } J(y) := \int_0^{x_1} \dfrac{\sqrt{1+y'^2(t)}}{y(t)}\,dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } y \in C^1[0,x_1]\,,\ y(0) = 0, y(x_1) = x_1 - 5\,. \end{cases}$$

(Beachte: x_1 zu finden ist Teil des Problems.)

14.) Finde eine Extremale zu

$$\begin{cases} \text{Minimiere } J(y) := \int_0^1 y(t)^2 dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } y \in C^1[0,x_1]\,,\ y(0)=y(1)=0\,,\ \int_0^1 y'(t)^2 dt = 1\,. \end{cases}$$

15.) Für welche Werte von a und b ist das quadratische Funktional

$$J(y) := \int_0^a y'(t)^2 - by(t)^2 dt$$

in $C_0^1[a,b]$ nichtnegativ.

16.) Betrachte

$$\begin{cases} \text{Minimiere } J(y) := \int_a^b L(t,y'(t))dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } y \in C^1[a,b]\,,\ y(a)=y_a, y(b)=y_b\,. \end{cases}$$

Gibt es konjugierte Punkte?

17.) Betrachte

$$\begin{cases} \text{Minimiere } J(y) := \int_0^a \frac{y(t)}{y'(t)^2} dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } y \in C^1[0,a]\,,\ y(0)=1, y(a)=A\,, \end{cases}$$

mit $0 < a, 0 < A < 1$.
Zeige: Es gibt zwei Extremalen und entscheide, welche davon ein schwach lokales Minimum realisiert.

18.) Lagrange-Multiplikatorenregel.

(a) Man bestimme das Maximum der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f(x) := \prod_{i=1}^n x_i^2\,.$$

(b) Man beweise die Ungleichung

$$(\prod_{i=1}^n a_i)^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i \ (a_i > 0)\,.$$

19.) Zu minimieren sei $I(y) := \int_a^b L(t,y(t),y'(t))dt$ für $y \in C^1[a,b]$. Man untersuche die Eulersche-Gleichung für den Fall

$$L(x,y,y') := P(x,y) + y'Q(x,y)\,.$$

Ist die Lösung eindeutig?

20.) Man diskutiere, ob die folgenden Variationsprobleme Lösungen besitzen und bestimme sie gegebenenfalls. Hierbei ist zu minimieren $I(y) := \int\limits_a^b t^2 y'^2 dt$.

(a) $y \in C^1[a,b], a = 1, y(1) = 1, b = 2, y(2) = \frac{1}{2}$

(b) $y \in C^1[a,b], a = -2, y(-2) = -\frac{1}{2}, b = 1, y(1) = 1$

21.) Durch die Gleichung

$$g(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{2.28}$$

sei eine Fläche F im $\mathbb{R}^3$ definiert. Als Geodätische von F bezeichnet man diejenigen (differenzierbaren) Kurven

$$t \longmapsto x(t) := (x_1(t), x_2(t), x_3(t))\ (t_0 \geq t \geq t_1)\,,$$

für die das Funktional

$$I(x) := \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i^2(t)}\, dt$$

unter der Nebenbedingung (2.28) einen minimalen Wert annimmt.

(a) Man stelle für das Problem die Euler–Lagrange–Gleichungen auf und versuche eine geometrische Interpretation.

(b) Man zeige: Die Geodätischen der Sphäre

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - r^2 = 0$$

sind Großkreise.
Hinweis: Man betrachte als Anfangspunkt o.E. $x(0) = (1,0,0)$ und nehme an, dass die Geodätischen „normal“ durchlaufen werden, d.h. $\sum\limits_{i=1}^{3} \dot{x}_i^2 = 1$. Man zeige zunächst, dass der Lagrange–Parmeter λ konstant ist.

Kapitel 3

Variationsprinzipien in der Mechanik

Wir befassen uns mit der Kinematik und Dynamik von endlich vielen Massenpunkten. Wir tun dies in Ansätzen, die mit den Namen Newton, Lagrange und Hamilton verbunden sind. Die Tatsache, dass Newtons Gesetze aus einem Variationsprinzip abgeleitet werden kann, wurde als Bestätigung für das philosophische Prinzip der Einfachheit und Harmonie in der Natur herangezogen

3.1 Newtonsche Gesetze

Das, was wir heute als klassische Mechanik bezeichnen, wurde im 17. Jahrhundert begründet durch Newton und an vorderster Linie ausgebaut durch Huygens, Leibniz, Bernoulli (Johann). Es war die Leistung von Newton, die Größen Kraft und Beschleunigung als grundlegend für Bewegung einzuführen.

Stellen wir die **Newtonschen Gesetze** in ihrer ursprünglichen Form vor:

I) *Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.*

II) *Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.*

III) *Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich; oder: die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.*

Mit „Körper" sind Massenpunkte gemeint, d.h. punktförmige Teilchen, die Masse besitzen aber keine Ausdehnung. Im Gesetz *I)* bedeutet Bewegung bzw. Bewegungszustand die Bahnkurve $t \longmapsto \mathbf{r}(\mathbf{t})$ des Massenpunktes im Ortsraum; $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ beschreibt den momentanen Ort des Massenpunktes, t ist als Zeit Bahnparameter.

Auf experimentellen Erfahrungen aufbauend nimmt man für die klassische Mechanik an, dass der Raum, in dem physikalische Bewegung des Massenpunktes stattfindet, **homogen** (kein Punkt ist ausgezeichnet) und **isotrop** (keine Richtung ist ausgezeichnet) ist. Damit wird der Bewegungsraum ein affiner Raum: Die Angabe einer einzigen Position $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ ist nicht sinnvoll, wohl aber die Angabe dieses $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ relativ zu einer Position eines Beobachters zur selben Zeit. Versieht man den affinen Raum mit einem Ursprung, d.h. definiert man einen Nullpunkt, so wird daraus der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^3$, für den man Basissysteme auf vielerlei Arten wählen kann und auf dem Skalar– und Vektorprodukt von zwei Vektoren wie üblich definiert sind; $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ stellt sich dann als Ortsvektor des Massenpunktes dar.

Die Zeit spielt in der nichtrelativistischen Physik eine Sonderrolle. Hat ein Massenpunkt die Eigenzeit τ – man stelle sich vor, dass er eine eigene Armbanduhr mittrage – , so misst ein Beobachter auf seiner Uhr die Zeit

$$t_B = \alpha_B \, \tau + \beta_B \, . \tag{3.1}$$

Hierbei ist α_B eine positive Konstante, die festlegt, in welchen relativen Einheiten der Beobachter die Zeit misst, während β_B angibt, wie er seinen Zeitnullpunkt relativ zur Eigenzeit des Massenpunktes gewählt hat. Die Gleichung (3.1) kann auch in Form der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 t_B}{d\tau^2} = 0 \tag{3.2}$$

geschrieben werden. Damit wird deutlich: Die Zeit wird durch einen eindimensionalen affinen Raum beschrieben oder nach Wahl eines Nullpunktes durch den reellen Raum $\mathbb{R}$ (Zeitgerade); es gibt ein „Früher“ und ein „Später“. Ein **Ereignis** einer Bewegung, beschrieben durch die **Trajektorie** $t \longmapsto \mathbf{r}(t)$, ist ein Punkt $(t, \mathbf{r}(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Die Bahnkurve $\mathbf{r}$ wird oft in bezug auf spezielle für die vorliegende Situation besonders geeignete Koordinaten beschrieben:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{r}(t) & = & (x(t), y(t), z(t)) & \text{(Kartesische Koordinaten)} \\ \mathbf{r}(t) & = & (r(t), \varphi(t), \theta(t)) & \text{(Polarkoordinaten)} \end{array}$$

Aus der Kenntnis der Bahnkurve $t \longmapsto \mathbf{r}(\mathbf{t})$ leiten sich die **Geschwindigkeit**[1]

$$\mathbf{v}(t) := \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$$

und die **Beschleunigung**

$$\mathbf{a}(t) := \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t)$$

ab. Der Zustand der Ruhe ist $\mathbf{r}(t) = 0$ für alle Zeiten t gleichförmige geradlinige Bewegung läuft entlang einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit ab, d.h.

$$\mathbf{r}(\mathbf{t}) = \mathbf{r}^{\mathbf{0}} + \mathbf{v}^{\mathbf{0}} t \, . \tag{3.3}$$

Das Gesetz *I)* sagt aus, dass (3.3) mit beliebig vorgebbaren Größen $\mathbf{r}^{\mathbf{0}}, \mathbf{v}^{\mathbf{0}}$ der charakteristische Bewegungszustand eines Körpers ist, auf den keine Kräfte einwirken; schickt man einen Körper vom Ort P nach Q kräftefrei, so nimmt er den Weg mit der kürzesten Verbindung. Dies setzt aber voraus, dass wir bereits ein bestimmtes, nämlich nicht beschleunigtes Bezugssystem gewählt haben.

Definition 3.1
Ein Bezugssystem, in dem das Gesetz *I)* im kräftefreien Fall die Form $\mathbf{r}(t) = 0$ für alle Zeiten t hat, heisst **Inertialsystem**. □

[1] Dabei bedienen wir uns der „Physiker–Notation“, den Punkt als Ableitungssysmbol zu verwenden (statt $y', y'', \ldots$ also $\dot{y}, \ddot{y}, \ldots$). Diese Notation geht auf Newton zurück, der sie für seine Fluxionen (Veränderung der Fluenten durch Bewegung) verwendete.

In Inertialsystemen haben die Gesetze *I)* und *II)* die Gestalt

$$m\ddot{\mathbf{r}} = F \quad \text{oder ausführlicher} \quad m\,\ddot{\mathbf{r}}(t) = F(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) \text{ für alle } t\,, \tag{3.4}$$

wobei F die Resultierende der auf den Körper mit der trägen Masse m wirkenden Kräfte ist. Die Bewegung finden wir, indem wir die Differentialgleichung (3.4) integrieren, lösen. Dabei sind Anfangswerte $\mathbf{r}(0)$ und $\dot{\mathbf{r}}(0)$ nötig.

Würde man beschleunigte Koordinatensysteme verwenden, so würde die Grundgleichung (3.4) eine komplexere Form annehmen. Bei beschleunigten Bezugssystemen treten „Scheinkräfte" wie Zentrifugalkraft und Corioliskraft auf. Klar, jedes bezüglich eines Inertialsystems gleichförmig bewegtes System ist wieder ein Inertialsystem.

Den Begriff „Bewegung" im Gesetz *II)* kann man mit dem **Impuls**

$$\mathbf{p}(t) := m\dot{\mathbf{r}}(t)$$

identifizieren. Damit hat die Grundgleichung dann die Form

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = F(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) \text{ für alle } t\,. \tag{3.5}$$

Bemerkung 3.2 Die Annahme, dass die träge Masse m nicht vom Bewegungszustand abhängt, trifft in vielen Fällen zu. Strenggenommen ist die Masse aber eine Funktion einer Ruhemasse m_0 und des Betrags der Geschwindigkeit, d.h.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{|v(t)|^2}{c^2}}} \tag{3.6}$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist; siehe Abschnitt 3.2. Für alle Geschwindigkeiten, die klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit ($|v|c^{-1}$ sehr viel kleiner als 1) sind, können wir die Masse als eine Konstante in der Bewegung annehmen. (Beachte, wir reden über Massenpunkte und nicht über eine Rakete, die während des Fluges „Masse" verliert.) □

Die wichtigsten fundamentalen Kräfte der Natur sind die **Gravitationskraft** und **Coulombkraft**, schwache und starke Wechselwirkungen der Elementarteilchen haben sehr kleine Reichweite und spielen daher in der Mechanik eine vernachlässigbare Rolle. Die Gravitationskraft

$$F_{AB} = -Gm_A m_B \frac{r_A - r_B}{|r_A - r_B|^3} \tag{3.7}$$

ist stets anziehend und sie wirkt auf der Verbindungslinie der beiden Punkte A und B ; G ist die Newtonsche Gravitationskonstante. Hier steht m_A, m_B für die schweren Massen, aber sie sind proportional zu den trägen Massen und und daher identifizierbar. Beim Coulomb–Gesetz

$$F_{AB} = \kappa e_A e_B \frac{r_A - r_B}{|r_A - r_B|^3} \tag{3.8}$$

ist die Situation anders: Hier wird Stärke und Wirkungsrichtung der Kraft von den Elementarladungen e_A, e_B der Teilchen A, B bestimmt; die Konstante hängt von der Wahl von Maßeinheiten ab.

Das Gesetz *III)* wird wichtig, wenn sich die Kraftquellen gegenseitig „stören“, wie dies etwa bei Körpern mit etwa gleicher Masse der Fall ist. Ist das Massenverhältnis aber sehr ungleich, dann kann man die Gegenwirkung des leichteren Körpers vernachlässigen und uns den leichteren Körper als in einem Kraftfeld des schwereren Körpers befindlich vorstellen; bei den Planetenbewegung nimmt man diese Position häufig ein (siehe unten).

Sei F ein **konservatives Kraftfeld**, d.h. ein Kraftfeld, dessen Einwirkungen auf einen Körper in diesem Feld nur von der Lage des Körpers abhängt, also $F = F(\mathbf{r})$. Um einen Körper in einem solchen Kraftfeld auf einem Weg γ von P nach Q zu verschieben, muss eine **Arbeit** aufgewendet werden. Sie ist die „infinitesimale Summe“ des Produkts aus dieser Kraft und der Verschiebung. Also mit $P = \mathbf{r^0}, Q = \mathbf{r^1}$ das **Wegintegral**

$$A_{PQ} = \int_\gamma F \,.\, d\mathbf{r} \tag{3.9}$$

Wir fassen die Arbeit als Menge auf, die wir einem Körper zuführen können und die ihm erhalten bleibt oder die wir ihm entziehen können und wir geben ihr den Namen **Energie**.

In Abbildung 3.1 ist eine Aufstellung über Dimensionen und Maßeinheiten mechanischer Größen zu sehen. Wir verwenden das M-K-S–System.

Identifiziert man schwere und träge Masse, so findet man für die Newtonsche Gravitationskonstante den (experimentellen) Wert

$$G \sim 6.67510^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Für die Lichtgeschwindigkeit gilt

$$c \sim 10^8 \text{ m s}^{-2} .$$

Größe	**Dimension**	**Maßeinheit**
Zeit	[t] = S	1 s (Sekunde)
Länge	[r] = L	1 m (Meter)
Masse	[m] = K	1 kg (Kilogramm)
Impuls	$[\mathrm{P}] = \mathrm{ML}^{-1}$	1 kg m s^{-1}
Kraft	$[\mathrm{F}] = \mathrm{MLS}^{-2}$	$1 \text{ kg m s}^{-}2 = 1$ Newton
Energie	$[\mathrm{E}] = \mathrm{ML}^2\mathrm{S}^{-2}$	$1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} = 1$ Joule
Druck	$[\mathrm{D}] = \mathrm{ML}^{-1}\mathrm{S}^{-2}$	$1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2} = 1$ Pascal

Abbildung 3.1: Das M-K-S–System

Betrachten wir nun Bewegung in einem Kraftfeld. Wir besprechen nur den Fall eines Kraftfeldes F, das ein **Zentralfeld** ist, d.h. das die Darstellung

$$F(\mathbf{r}) = f(|\mathbf{r}|)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\,,\; \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3\backslash\{\theta\} \tag{3.10}$$

mit einer skalaren Funktion hat, im Detail. Ein solches Feld F ist sogar ein **Gradientenfeld**, denn wir haben

$$F(\mathbf{r}) = -U'(|\mathbf{r}|)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\,,\; \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3\backslash\{\theta\}\,, \text{ mit } U(r) := \int_{r_0}^{r} f(r')dr'\,, \tag{3.11}$$

wobei r_0 eine fest gewählte Konstante ist. Die Funktion U heisst **Potential** des Kraftfeldes.[2] Es ist sofort zusehen, dass man wieder ein Potential erhält, wenn man zu U eine Konstante addiert.

[2]Das Minus–Vorzeichen beim Potential entspricht der „Physiker–Notation“.

Beispiel 3.3 Betrachte zwei Massenpunkte mit Masse m_1 bzw. m_2, die der Gravitationskraft unterliegen. Es gilt

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = F_{12}\,,\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = F_{21} = -F_{12}\,,\ \text{ wobei } F_{ij} = -Gm_1m_2\frac{r_i - r_j}{|r_i - r_j|^3} \text{ gilt.}$$

Führt man die **Schwerpunktskoordinaten**

$$\mathbf{r_S} := \frac{m_1\mathbf{r_1} + m_2\mathbf{r_2}}{m_1 + m_2}$$

ein, ist $\ddot{\mathbf{r}}_\mathbf{S} = 0$, d.h. der Schwerpunkt des Systems bewegt sich geradlinig gleichförmig; die eigentliche Dynamik steckt in der Relativbewegung. Sei $\mathbf{r} := \mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}$. Dann gilt

$$\mathbf{r_1} = \mathbf{r_S} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}\,,\ \mathbf{r_2} = \mathbf{r_S} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}$$

und

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = -Gm_1m_2\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \ \text{ mit } \mu := \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\,, \tag{3.12}$$

wobei μ **reduzierte Masse** genannt wird. Damit ist nun das Zweiteilchensystem auf die Bewegung eines Teilchens der Masse μ in den Schwerpunktskoordinaten reduziert. Die reduzierte Masse unterliegt offenbar der Wirkung einer Zentralkraft. Sein Potential ist

$$U(r) := -\frac{u}{r}\,,\ r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,,\ \text{wobei } u := Gm_1m_2 \text{ ist.} \tag{3.13}$$

□

Betrachten wir nun die allgemeine Situation eines Teilchens mit Masse m in einem Zentralfeldes weiter. Die **Gesamtenergie**

$$E(\mathbf{r},\mathbf{v}) = \frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 + U(|\mathbf{r}|)$$

setzt sich zusammen aus der **kinetischen Energie** $E_{kin} := \frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2$ und der **potentiellen Energie** $E_{pot} := U(|\mathbf{r}|)$. Es gilt der **Energieerhaltungssatz**

$$E(\mathbf{r}(t),\mathbf{v}(t)) = E_0 := E(\mathbf{r}(0),\mathbf{v}(0))\,,\ t \in \mathbb{R}\,, \tag{3.14}$$

denn

$$\frac{dE}{dt}(\mathbf{r}(t),\mathbf{v}(t)) = m < \mathbf{v}(t),\dot{\mathbf{v}}(t) > + < -F(\mathbf{r}(t)),\dot{\mathbf{v}}(t) > = 0\,.$$

Der **Drehimpuls** J im System ist definiert durch

$$J(\mathbf{r},\mathbf{v}) := m\,\mathbf{r}\times\mathbf{v}\,.$$

Es gilt der **Drehimpulserhaltungssatz**:

$$J(\mathbf{r}(t),\mathbf{v}(t)) = J_0 := J(\mathbf{r}(0),\mathbf{v}(0))\,,\ t \in \mathbb{R}\,, \tag{3.15}$$

denn

$$\frac{dJ}{dt}(\mathbf{r}(t),\mathbf{v}(t)) = m\,\mathbf{r}(t)\times\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{r}(t)\times f(|\mathbf{r}(t)|)\frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|} = 0\,.$$

Die Bewegung verläuft demnach in einer Ebene senkrecht zu $J_0 = m\,\mathbf{r}(0) \times \mathbf{v}(0)$. Es bietet sich also an, Polarkoordinaten in dieser Ebene, o.E. der $x-y$–Ebene, zu wählen:

$$x(t) = r(t)\cos\varphi(t)\,,\; y(t) = r(t)\sin\varphi(t)\,,$$

so dass der Drehimpuls nur eine Komponente in der z–Koordinate hat:

$$J_z = mr^2\dot\varphi\,,\;\text{ d.h. } \dot\varphi = \frac{J_z}{mr^2}\,. \tag{3.16}$$

Energieerhaltung bedeutet in diesen Koordinaten:

$$\frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + U(r) = E_0\,. \tag{3.17}$$

Wir lösen (3.16),(3.17) nach $\dot r$ auf:

$$\dot r = \sqrt{\frac{2(E_0 - U(r))}{m} - \frac{J_z^2}{m^2r^2}}\,;$$

schreiben um auf $\frac{dr}{d\varphi}$:

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2m(E_0 - U(r))}{J_z^2} - \frac{1}{r^2}}\,. \tag{3.18}$$

Berücksichtigt man noch die spezielle Form des Potentials $U(r) := -\frac{u}{r}$ und führt man die Funktion $\sigma(\varphi) := \frac{1}{r(\varphi)}$ ein, so folgt die Differentialgleichung

$$-\frac{d\sigma}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2m(E_0 + u\sigma)}{J_z^2} - \sigma^2}\,. \tag{3.19}$$

Mit den Konstanten

$$p := \frac{J_z^2}{um}\,,\; \epsilon := \sqrt{1 + \frac{2E_0J_z^2}{mu^2}}$$

folgt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 + \left(\sigma - \frac{1}{p}\right)^2 = \frac{\epsilon^2}{p^2}\,, \tag{3.20}$$

eine Gleichung, die durch

$$\sigma(\varphi) := \frac{1}{p} + \frac{\epsilon}{p}\cos(\varphi - \varphi_0)$$

gelöst wird. Also ist

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon\cos(\varphi - \varphi_0)}\,. \tag{3.21}$$

Man weiss, dass dies die Darstellung der Kegelschnitte in Polarkoordinaten ist.

$\epsilon > 1$: **Hyperbel** $\qquad$ $\epsilon = 1$: **Parabel** $\qquad$ $\epsilon < 1$: **Ellipse**

Wenden wir nun dies auf die Planetenbewegung in unserem Sonnensystem an. Das Kraftfeld ist dann das Gravitationsfeld, das von der Sonne mit der Masse M erzeugt wird. Ein Planet mit der Masse m unterliegt also der Gravitationskraft

$$F(\mathbf{r}) := -GmM\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\,,\ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3\backslash\{\theta\}\,, \tag{3.22}$$

einem Zentralfeld, das die Sonne als Zentrum hat. Aus den obigen Herleitungen folgt nun das 1. Kepplersche Gesetz, denn zweifelsohne muss entsprechend unserer Beobachtung $E_0 < 0$ gelten.

> **1. Kepplersches Gesetz**: Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen um die Sonne, die im Brennpunkt dieser Bahn ist.

Die Flächengeschwindigkeit $\dot{A}$, mit der der „Fahrstrahl“ $\mathbf{r}$ (Sonne–Planet) in der Ebene der Bewegung überstreicht, ergibt sich aus

$$A(t+\Delta t) - A(t) = \frac{1}{2}\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t+\Delta t) \sim \frac{1}{2}\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)\Delta t$$

zu

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{2}|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)| = \frac{J_z}{2m}\,;$$

sie also konstant. Damit haben wir das 2. Keplersche Gesetz erhalten.

> **2. Kepplersches Gesetz**: Der Radiusvektor (Fahrstrahl) von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Die Fläche A einer Ellipse ist πab, wenn a, b die Halbachsen sind. In den obigen Bezeichnungen stellt man für die Ellipsenbahnen der Planeten

$$a = \frac{p}{1-\epsilon}\,,\ b = \sqrt{pa}$$

fest. Wenn T die Umlaufzeit des Planeten ist, so besagt der Flächensatz, dass $A = \frac{TJ_z}{2m}$ ist. Daraus folgt unter Berücksichtigung des Zustandekommens der Konstanten p, J_z und u

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{J_z^2}{4\pi^2 m^2 p} = \frac{GM}{4\pi^2}\,.$$

Dies ist Inhalt des 3. Keplerschen Gesetzes.

> **3. Kepplersches Gesetz**: Das Verhältnis der Kuben der großen Halbachsen und der Quadrate der Umlaufzeiten sind (im Sonnensystem) konstant.

3.2 Erhaltungssätze in abgeschlossenen Systemen

Betrachten wir nun ein System von p Massenpunkten $P_1, ..., P_N$ mit Massen $m_1, ..., m_N$, die den inneren Kräften F_{ik} (zwischen P_i und P_k wirkend) und den äusseren Kräften K_i unterworfen seien. Die inneren Kräfte seien Zentralkräfte mit den Potentialen U_{ik}. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k\neq i} F_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) + K_i\,,\ i = 1, \ldots, N\,, \tag{3.23}$$

wobei $\mathbf{r}_{ik} := \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$ gesetzt wurde. Bewegungsgrößen sind (in Kurzschreibweise, d.h. Argumente vernachlässigend):

Impuls $\mathcal{P}$: $\quad \mathcal{P} := \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i$

Schwerpunkt $\mathcal{S}$: $\quad \mathbf{r}_\mathcal{S} := \frac{m(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)}{M}$,

wobei $m(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) := \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i$, $M := \sum_{i=1}^{N} m_i$ ist.

Energie $\mathcal{E}$: $\quad \mathcal{E} := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{l=i+1}^{N} U_{il}(|\mathbf{r}_{il}|)$

Drehimpuls $\mathcal{J}$: $\quad \mathcal{J} := \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_k$

Man rechnet nach:

$$M\ddot{\mathbf{r}}_\mathcal{S} = \sum_{i=1}^{N} K_i\,, \; \frac{d\mathcal{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} K_i\,, \; \frac{d\mathcal{J}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times K_i\,, \; \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} < \dot{\mathbf{r}}_i, K_i > \;. \tag{3.24}$$

In einem **abgeschlossenen System**, dh. einem System, in dem äussere Kräfte nicht vorhanden sind ($K_1 = \cdots = K_N = 0$), gelten nun die folgenden **Erhaltungssätze**:

Impulserhaltungssatz : $\quad \frac{d\mathcal{P}}{dt} = 0$

Energieerhaltungssatz : $\quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$

Schwerpunkterhaltungssatz : $\quad \frac{d\mathbf{r}_\mathcal{S}}{dt} = \frac{\mathcal{P}}{M}$

Drehimpulserhaltungssatz : $\quad \frac{d\mathcal{J}}{dt} = 0$

Welcher Koordinatentransformation darf man den Ereignisraum unterwerfen, dass Inertialsystem auf Inertialsystem abgebildet wird? Es sind die sogenannten **Galilei–Transformationen:**

$$\mathcal{G} : (t, \mathbf{r}) \longmapsto (\alpha t + \beta, Q\mathbf{r} + \mathbf{w}t + \mathbf{a})\,,$$

wobei Q eine orthogonale Matrix ist und $\alpha = 1$ und $\det(Q) = 1$ gilt. Wir wollen dies nicht nachrechnen.[3] Eine zweite Klasse von Galilei–Transformationen wird definiert, wenn man $\alpha = -1$ und $\det(Q) = -1$ verlangt. Wichtig ist, festzuhalten, dass die Galilei–Transformationen eine Gruppe (bezüglich der Hinereinanderausführung), die sogenannte **orthochrone Gruppe** bilden. Jede solche Transformation hat im Fall $N = 1$ 10 frei wählbare Parameter:

Q hängt frei von 3 Parametern (Winkel) ab; $\mathbf{w}$ hängt frei von 3 Parametern ab;
$\mathbf{a}$ hängt frei von 3 Parametern ab; β hängt frei von einem Parametern ab.

Es ist kein Zufall, dass es gerade 10 **Erhaltungsgrößen** gibt, nämlich

Impuls, Energie, Schwerpunkt, Drehimpuls

Siehe oben.[4] Die Invarianz des Newtonschen Gesetzes

$$m\ddot{\mathbf{r}} = F(t, \mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}$$

[3] Siehe etwa Scheck, F., Mechanik, Springer–Verlag, 1994

[4] Siehe dazu auch: Landau L.D., Lifschitz E.M., Lehrbuch der theoretischen Mechanik, Akademie–Verlag, Berlin

gegenüber Galilei–Transformationen hat Eigenschaften zur Konsequenz, die wir schon angesprochen haben. Eine Zeitverschiebung $t \longmapsto t+\beta$ bewirkt, dass F nicht explizit von der Zeit abhängt. Eine Ortstranslation $\mathbf{r} \longmapsto \mathbf{w}t+\mathbf{q}$ bewirkt, dass F nur von den Relativkoordinaten $\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j}, \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{i}-\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{j}$ abhängt. Eine Invarianz gegenüber einer Drehung $\mathbf{r} \longmapsto Q\mathbf{r}$ bedeutet $F(Q\mathbf{r}, Q\dot{\mathbf{r}}) = QF(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.

Eine Galilei–Transformation verknüpft die Koordinaten zweier Bezugssysteme, die sich im Newtonschen absoluten Raum und in der absoluten Zeit bewegen, und zwar mit einer konstanten Relativgeschwindigkeit. Beschriftet man die Koordinaten in diesen Systemen mit x, y, z, t bzw. x', y', z', t', so kann man, um die Betrachtung zu vereinfachen, folgende Anahmen treffen:

- Gleiche Einheiten von Längen;
- $t = t'$;
- x– und x'–Achse liegen so, dass die Bewegung in ihrer Richtung verläuft;
- die Zeitskalen stimmen überein.

Dann haben wir

$$x' = x - vt\,,\; y' = y\,,\; z' = z\,,\; t' = t\,. \tag{3.25}$$

Damit bestätigt man leicht die Invarianz der Newtonschen Gleichung bezüglich dieser speziellen Transformation. Das Newtonsche **Relativitätsprinzip** ist bestätigt: Die mechanischen Einflüsse sind nicht abhängig von einem gleichförmig bewegten Bezugssystem. Wir kennen dies aus den Beobachtungen in einem unbeschleunigt fliegendem Flugzeug.

Wir haben diesen Spezialfall aber gewählt, um den Übergang von der Newtonschen zur Einsteinschen Mechanik klar zu machen. Das Newtonsche Relativitätsprinzip wurde umgestossen durch die Optik. Lange galt das Licht als etwas instantan Vorhandenes. Der erste, der wohl hier Zweifel hatte, war Galilei. Er machte folgenden Versuch: Zwei Männer, postiert auf zwei entfernten Hügeln, erwidern gegenseitig Lichtsignale; gibt es dabei Verzögerungen? Leider ist es hierbei so, dass die Reaktionszeiten die möglichen Laufzeiten von Licht überdecken. Römer war es 1675, der durch Beobachtungen der Helligkeitsschwankungen des Jupitermondes Io Laufzeiten von Licht postulierte. Die im 19. Jahrhundert aufkommende Ansicht von der Wellennatur des Lichtes, führte aus damaliger Sicht zur Annahme, dass ein „Lichtäther" den „Transport" von Licht möglich macht. Viele Probleme entstanden dadurch. Eines davon war, wird der Äther durch die Erde mitgerissen oder gibt es eine Relativbewegung. Nach Experimenten (Michelson–Morley) sah es so aus, dass man dies gar nicht entscheiden kann. Es war Lorentz – Fitzgerald hatte die Dinge schon angedacht – , der nachwies, dass Maxwells Gleichungen der Elektrodynamik nahezu invariant sind gegenüber leicht abgeänderten Galilei–Transformationen:

$$x' = x - vt\,,\; y' = y\,,\; z' = z\,,\; t' = t - \frac{vx}{c^2}\,; \tag{3.26}$$

hierbei ist c die Lichtgeschwindigkeit. Die Zeit t' hängt nun von dem „Ort" ab und wird daher **lokale Zeit** genannt; die Verknüpfung von Raum und Zeit nimmt seinen Anfang.„Nahezu" bedeutet, dass sich die Maxwellschen Gleichungen in den verschiedenen Bezugssystemen um Terme der Ordnung v^2 unterschieden; ein Hinweis, dass durch Messungen nicht zwischen einem ruhenden und einem gleichförmig bewegten Bezugssystem unterschieden werden kann. Poincaré sprach 1904 von einem Relativitätsprinzip und davon, dass sich kein Körper schneller als das Licht bewegen kann. Er wollte die „Flickschusterei" beenden, die bei jedem neuen Experiment, eine bewegtes Bezugssystem aufzuspüren, eine Behelfstheorie (Äthertheorie) zurechtschnitt. Poincaré gab 1905 den nun von Lorentz so modifizierten Transformationen

$$x' = \beta(x - vt)\,,\; y' = y\,,\; z' = z\,,\; t' = -\beta(t - \frac{vx}{c^2}) \tag{3.27}$$

den Namen **Lorentz–Transformationen**; hier ist $\beta := (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$. Nun tauchten in den Maxwellschen Gleichungen bei solchen Koordinatentransformationen keine von v abhängigen Terme mehr auf; sie sind invariant gegenüber den Lorentztransformationen. Man könnte nun vermuten, dass die Beobachtung, dass in einem gleichförmig bewegten Flugzeug mechanische Einflüsse der Bewegung nicht festzustellen sind, auch für elektrodynamische Phänomene zutrifft. Ganz so einfach ist es nicht! Hier kommt Einstein ins Spiel mit seiner speziellen Relativitätsttheorie. Danach bestimmen die Lorentztransformationen nicht nur die Elektrodynamik, sondern sogar die ganze Physik. Sie bestimmen die universellen Beziehungen von Raum und Zeit.

3.3 Lagrange–Mechanik

Das, was wir Lagrange–Mechanik nennen, wurde ausgearbeitet im 18. Jahrhundert von d'Alembert, Euler, Legendre, Maupertius und Lagrange.

Zur Bestimmung der Lage eines Systems von N Massenpunkten im Raum müssen N Ortsvektoren gegeben sein, d.h. $3N$ Koordinaten. Allgemein versteht man unter der Zahl der **Freiheitsgrade** eines Systems die Anzahl der unabhängigen Größen, deren Angabe für die eindeutige Bestimmung der Lage des Systems notwendig ist; im vorliegenden Falle ist diese Zahl gleich $3N$. Diese Größen müssen nicht unbedingt kartesische Koordinaten sein; je nach Kontext können andere Koordinaten vorteilhaft sein. Wenn die Gesamtheit irgendwelcher Größen $q_1, \ldots, q_d$ die Lage eines Systems (mit dann d Freiheitsgraden) völlig charakterisiert, so nennt man diese Größen **verallgemeinerte Koordinaten** und die Ableitungen $\dot{q}_i$ **verallgemeinerte Geschwindigkeiten**. Beispielsweise reicht beim einfachen Pendel mit fester Aufhängung ein Freiheitsgrad, nämlich der Winkel; den „Bindungungen“ durch die feste Pendelaufhängung wird damit Rechnung getragen. Der Raum $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ heisst **Phasenraum**.

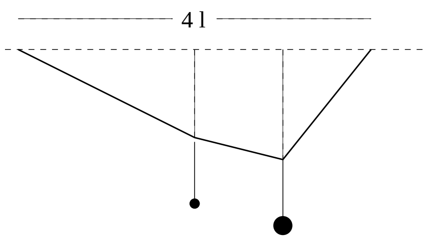

Abbildung 3.2: Das belastete Seil

Die Angabe der verallgemeinerten Koordinaten, zusammengefasst unter **Kinematik** des Systems, bestimmt jedoch noch nicht den mechanischen Zustand eines Systems in einem gegebenen Zeitpunkt, d.h., sie gestattet noch nicht, die Lage des Systems in zukünftigen Zeitpunkten vorherzusagen. Die gleichzeitige Angabe aller Koordinaten und Geschwindigkeiten bestimmt jedoch, wie die Erfahrung zeigt, den Zustand des Systems vollständig und erlaubt im Prinzip, die zukünftige Bewegung vorherzusagen. Das muss bedeuten, dass durch die Angabe aller Koordinaten q_i und Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ zu irgendeinem Zeitpunkt auch die Größe der Beschleunigungen $\ddot{q}_i$ zu diesem Zeitpunkt eindeutig gegeben sind. Die Beziehungen, welche die Beschleunigungen mit den Koordinaten und Geschwindigkeiten verknüpfen, heissen **Bewegungsgleichungen**; sie sind Differentialgleichungen zweiter Ordnung und beschreiben die **Dynamik** des Systems.

Newton leitet die Bewegungsgleichungen aus seinen **Bewegungsgesetzen** ab. Eine allgemeinere Formulierung eines Bewegungsgesetzes, aus dem dann Bewegungsgleichungen ableitbar sind, ist durch das sogenannte **Prinzip der kleinsten Wirkung** gegeben. Maupertius[5] suchte, wie schon Fermat, nach einem solchen allgemeinen Prinzip, in dem die Gesetze der Mechanik zusammengefasst werden. Seine Leitgröße war der „Impuls“ mvs (m = Masse, v = Geschwindigleit, s = Weg), doch war seine Formulierung unklar. Euler brachte es auf die Form, in dem das Wirkungsintegral die Leitgröße ist. Es wird schließlich **Hamiltonsches Prinzip** genannt. Nach diesem Prinzip ist jedes mechanische System mit d Freiheitsgraden durch eine bestimmte Funktion, der sogenannten **Lagrangefunktion** $\mathcal{L}$, charakterisiert:

$$(t, q_1, \dots, q_d, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_d) \longmapsto \mathcal{L}(t, q_1, \dots, q_d, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_d) =: \mathcal{L}(t, q, \dot{q}) \tag{3.28}$$

In den hier intendierten Anwendungen ist die Annahme, dass $\mathcal{L}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ist, nicht überzogen.

Wie kommen nun die Bewegungsgleichungen zustande? Sehr indirekt, nämlich dadurch, dass sich die Bewegungsgleichungen aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung, bezogen auf die gegebene Lagrangefunktion $\mathcal{L}$, ableiten:

> Eine Bewegung $[a, b] \ni t : \longmapsto \; q(t) \in \mathbb{R}^d$ findet so statt, dass sie dem Integral $\int_a^b \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t))dt$ bei Vorgabe von $q_a := q(a)$ und $q_b := q(b)$ den kleinsten Wert zuweist.

Das Integral $\int_a^b \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t)dt$ heisst **Wirkungsintegral**, denn L hat die Dimension einer Energie und ein Produkt aus Energie und Zeit wird **Wirkung** genannt.

Nun ist nach Kapitel 2 schon klar, wie die Bewegungsgleichungen aussehen: Es ist die Eulersche Differentialgleichung zum Variationsproblem, das nun so aufgeschrieben ist:

$$P_{\mathcal{L}}(a, b; q_a, q_b) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiere } J(a, b; q_a, q_b) := \int_a^b \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t))dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } q(a) = q_a, q(b) = q_b \,. \end{array} \right.$$

Hat man ein System aus N Massenpunkten $m_1, \dots, m_N$, wie wir es im Abschnitt 3.2 betrachtet haben, so ist die Zahl der Freiheitsgrade $d := 3N$ und als verallgemeinerten Koordinaten sind die üblichen Bahnkoordinaten brauchbar. Wir setzen eine Lagrangefunktion folgendermaßen an:

$$\mathcal{L}(t, q_1, \dots, q_d, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_d) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i - \sum_{i=1}^N \sum_{l=i+1}^N U_{il}(|\mathbf{r}_{il}|) \tag{3.29}$$

Mit der Bezeichnung

$$U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) := \sum_{i=1}^N \sum_{l=i+1}^N U_{il}(|\mathbf{r}_{il}|)$$

für das Potential ergeben sich

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k}, \; \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = m_{\tilde{k}} \ddot{q}_k,$$

wobei man $m_{\tilde{k}}$ entsprechend der umnummerierten Koordinaten einzusetzen hat. Aus der Eulerschen Differentialgleichung für das entsprechende Problem $P_{\mathcal{L}}(a, b; q_a, q_b)$ lesen wir das Newtonsche Bewegungsgesetz ab. Das Prinzip der kleinsten Wirkung führt also zum Newtonschen

[5] Maupertius wird als „grand aplatisseur“ bezeichnet, da er durch Messungen den Streit zwischen Newtonianern und Cartesianern zugunsten der Anhänger von Newton entschied: Die Erde ist an den Polen abgeplattet und nicht am Äquator.

Fundament der klassischen Mechanik zurück. (Beachte, das Prinzip der größten Wirkung, das sogenannte Fermatsches Prinzip, würde es auch tun.)

Bemerkung 3.4 Hat man für ein vorgegebenes System eine Lagrangefunktion gewählt, so sind die Bewegungsgleichungen ableitbar. Diese Bewegungsgleichungen bleiben unverändert, wenn man zur Lagrangegleichung noch das Differential einer glatten Funktion $(t, q) \longmapsto M(t, q)$ hinzufügt, das Wirkungsintegral ändert sich dabei nur um eine Konstante. □

Hamiltons Prinzip der kleinsten Wirkung ist gültig nicht nur für die Bewegung eines Teilchens, sondern auch für die Bewegung mehrerer eventuell sehr kompliziert gekoppelter Teilchen. Dazu folgendes einfaches Beispiel.

Beispiel 3.5 Betrachte ein eingespanntes Seil der Länge $4l$, an dem zwei Massenpunkte gemäß Abbildung 3.2 angebracht sind. Es werden nur kleine Auslenkungen in der vertikalen Ebene betrachtet. Ferner betrachten wir nur kleine Auslenkungen, für große Auslenkungen sind die folgenden physikalischen Betrachtungen nicht zulässig.
Sei $y_1(t), y_2(t)$ eine Auslenkung zur Zeit t der Massen $m_1 := m$ bzw. $m_2 := 2m$. Die kinetische Energie des (schwingenden) Systems ist gegeben durch

$$\frac{m}{2}\dot{y_1}(t)^2 + m\dot{y_2}(t)^2.$$

Physikalisch ist es sinnvoll, die potentielle Energie proportional zur Größe der Dehnung des Seils anzunehmen. Also ergibt sich für den Anteil, der der Dehnung im linken Teil entspricht

$$\sqrt{(2l)^2 + y_1(t)^2} - 2l = 2l(\sqrt{1 + (\frac{y_1(t)}{2l})^2} - 1)$$

Da wir nur kleine Auslenkungen zulassen, können wir den Wurzelausdruck durch

$$1 + \frac{1}{2}(\frac{y_1(t)}{2l})^2$$

approximieren. Also erhalten wir als Anteil für die potentielle Energie

$$\frac{y_1(t)^2}{4l}$$

Analoge Betrachtungen führen schließlich zu folgenden Anteilen für die beiden anderen Abschnitte

$$\frac{\mid y_2(t) - y_1(t) \mid^2}{2l}, \frac{y_2(t)^2}{2l}.$$

Also ergibt sich als potentielle Energie

$$V(y_1, y_1) = \tau(\frac{y_1(t)^2}{4} + \frac{\mid y_2(t) - y_1(t) \mid^2}{2} + \frac{y_2(t)^2}{2})$$

wobei der Proportionalitätsfaktor τ ein Maß für die elastische Eigenschaft des Seils relativ zur Länge l ist. Als zugehörige Lagrangefunktion kann

$$\mathcal{L}(t, y, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{y_1}^2 + 2\dot{y_2}^2) - \frac{\tau}{4}(y_1^2 + 2(y_2 - y_1)^2 + 2y_2^2)$$

angesehen werden. Die Eulersche Differentialgleichung zum resultierenden Variationsproblem ergibt das folgende Differentialgleichungssystem

$$\ddot{y}_1 = \frac{\tau}{2m}(-3y_1 + 2y_2)\,,\ \ddot{y}_2 = \frac{\tau}{2m}(y_1 - 2y_2)\,.$$

Wir haben

$$\frac{d^2}{dt^2}(y_1 + \alpha y_2) = \frac{\tau(\alpha-3)}{2m}(y_1 + \frac{2-2\alpha}{\alpha-3}y_2).$$

Wenn wir α wählen, so dass $\alpha = (2-2\alpha)\cdot(\alpha-3)^{-1}$ gilt, d.h. $\alpha = 2$ oder $\alpha = -1$, erhalten wir für $u := y_1 + \alpha y_2, \alpha = 2$ oder $\alpha = -1$, die einfachen Differentialgleichungen

$$\ddot{u} = -\omega^2 u \quad \text{bzw.} \quad \ddot{u} = -4\omega^2 u$$

mit $\omega := \frac{\tau}{2m}$. Dies führt zu den Lösungen

$$u_1(t) = a_1 \cos\omega(t-\varphi_1) \quad \text{bzw.} \quad u_2(t) = a_2\cos 2\omega(t-\varphi_2)$$

mit Integrationskonstanten $a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2$. Daraus ergibt sich die allgemeine Lösung für die Bewegung durch Linearkombination von

$$y_1 := \frac{1}{3}(u_1 + 2u_2)\ \ , y_2 := \frac{1}{3}(u_1 - u_2).$$

Zum Beispiel ergibt sich für die Anfangswerte

$$y_1(0) = b\ \ , \dot{y}_1(0) = 0\,,\ y_2(0) = b\ \ , \dot{y}_2(0) = 0$$

die Bewegung

$$y_1(t) = b\cos\omega t\ ,\ y_2(t) = b\cos\omega t\,.$$

□

3.4 Hamilton–Mechanik

Die Lagrange–Mechanik wurde durch Hamilton im 18. Jahrhundert in einen neuen Rahmen gesetzt.

Wir gehen aus von einer Lagrangefunktion $\mathcal{L} : [a,b]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit zugehöriger Eulerscher Differentialgleichung

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = 0\,. \tag{3.30}$$

Sie stellt ein System von d Differentialgleichungen 2. Ordnung dar, das i.a. nichtlinear und daher meist schwer zu integrieren ist. Transformationen der abhängigen Variablen sollten dies erleichtern.

Wir definieren das **konjugierte Moment**

$$p := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}(t,q,\dot{q})$$

und erhalten mit (3.30)

$$p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}(t,q,\dot{q})\ ,\dot{p} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}(t,q,\dot{q})\quad .$$

Dies ist ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung, allerdings noch implizit in $\dot{q}$. Wir wollen dies explizit machen. Nach Auflösung des konjugierten Moments nach $\dot{q}$ durch

$$\dot{q} = G(t,q,p)$$

erhalten wir das explizite System

$$\dot{q} = G(t,q,p) \quad , \dot{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(t,q,G(t,q,p))\,.$$

Beachte: Der Satz über implizite Funktionen hält als hinreichende Bedingung für die lokale Auflösbarkeit bereit:

$$\det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) \neq 0\,. \tag{3.31}$$

Die globale Auflösbarkeit etwa entlang einer Extremale verlangt zusätzliche Überlegungen.

Wir setzen nun

$$\mathcal{H}(t,q,p) := < p, G(t,q,p) > -\mathcal{L}(t,q,G(t,q,p))$$

und nennen $\mathcal{L}$ die zugehörige **Hamiltonfunktion**. Mit der Kettenregel erhalten wir (in Kurzschreibweise)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} &= G_i + < p, \frac{\partial G}{\partial p_i} > - < \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}, \frac{\partial G}{\partial p_i} > = G_i + < p, \frac{\partial G}{\partial p_i} > - < p, \frac{\partial G}{\partial p_i} > = G_i\,,\\
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} &= < p, \frac{\partial G}{\partial q_i} > - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - < \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}, \frac{\partial G}{\partial q_i} > = < p, \frac{\partial G}{\partial q_i} > - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - < p, \frac{\partial G}{\partial q_i} > = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\,,\\
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= < p, \frac{\partial G}{\partial t} > - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - < \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}, \frac{\partial G}{\partial t} > = < p, \frac{\partial G}{\partial t} > - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - < p, \frac{\partial G}{\partial t} > = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\,.
\end{aligned}$$

Dies führt uns zum System

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(t,q,p)\,, \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}(t,q,p)\,, \dot{\mathcal{H}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(t,q,p) \tag{3.32}$$

denn

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + < \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}, \dot{q} > + < \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{q}}, \dot{p} > .$$

In (3.32) haben wir ein System von $2d+1$ Differentialgleichungen 1. Ordnung. Die Gleichungen in (3.32) werden **kanonische Gleichungen der Bewegung** genannt. Sie werden ergänzt durch Randbedingungen für q und eine Anfangsbedingung für $\mathcal{H}$.

Wenn wir die auflösende Abbildung G aus dem Satz über implizite Funktionen ableiten, ist G $m-1$–mal stetig differenzierbar, wenn die Lagrangefunktion m–mal stetig differenzierbar ist (Beweis!). Die dem System (3.32) vorausgehenden Identitäten besagen dann, daß die Hamiltonfunktion ebenfalls m–mal stetig differenzierbar ist. Es tritt also kein Verlust an Regularität bei der Transformation auf.

Bemerkung 3.6 Was zeichnet die Lösungsgesamtheit eines Systems kanonischer Gleichungen aus? Man kann feststellen, dass eine Figur $A_0 \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ vermöge der kanonischen Gleichungen in eine Figur $A(t)$ zur Zeit t abgebildet wird, so dass Volumen(A_0) = Volumen$(A(t))$ gilt. (Sogar die Orientierung bleibt erhalten.) Dies folgt aus der Formel für die Volumenentwicklung bei einer allgemeinen gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = f(y)$; sie lautet:

$$v(t) = v(0) + \int_{A_0} \operatorname{div}(f)(x)\, dx + O(t^2)\,;$$

Hierbei ist $v(t) :=$ Volumen$(A(t))$ und $\operatorname{div}(f)$ die Divergenz des Vektorfeldes f . Da nun bei einem kanonischen Vektorfeld

$$f := (\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q})\,,$$

wenn es stetig differenzierbar ist, die Divergenz gemäß

$$\operatorname{div}(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}) = \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} - \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}$$

verschwindet, ist die Volumenfunktion v konstant. Dies ist der Satz von Liouville. □

Hängt $\mathcal{H}$ nicht explizit von der Zeit ab, ist die Differentialgleichung für $\mathcal{H}$ trivial und $\mathcal{H}$ ist eine Erhaltungsgröße. Das verbleibende System können wir kompakt dann so aufschreiben:

$$z' = J\nabla\mathcal{H}(z) \quad , J := \begin{pmatrix} \Theta & I \\ -I & \Theta \end{pmatrix}, z := (q,p)\,.$$

Aus (3.32) können wir möglicherweise auch noch andere Erhaltungsgrößen ablesen.

Definition 3.7
Eine Funktion $M : [a,b] \times \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$ heißt ein **(erstes) Integral**, falls es zu jeder Lösung (q,p) der kanonischen Gleichungen (3.32) eine Konstante k gibt mit $M(t, q(t), p(t)) = k$ für alle t . □

Der Begriff „Integral“ kommt wohl von der Tatsache, dass man die kanonischen Gleichungen „integrieren“ will und eine Bewegung eventuell durch Auflösung von $M(t,q,p) = k$ gefunden werden kann. Allerdings reicht ein erstes Integral dazu nicht aus ($q(t) \in \mathbb{R}^d$), aber wenn (im autonomen Fall) d Integrale gefunden sind, können wir hoffen, die gesamte Bewegung durch Auflösung von

$$M_1(q,p) = k_1\,,\ \ldots,\ , M_d(q,p) = k_d\,,$$

etwa nach p ermitteln zu können. Bei der Planetenbewegung hatten wir nach Reduktion auf die Ebene immer noch zwei Integrale, Energie und Drehimpuls; die Bewegung konnte ermittelt werden. Geometrisch bedeutet ein Integral, dass die Bewegung auf der Niveaufläche $M(q,p) = k$ stattfindet.

Erste Integrale ergeben sich so: Hängt $\mathcal{H}$ von einer Variablen q_i oder p_i nicht ab, so ist die Projektion auf diese Variable ein erstes Integral. Insbesondere ist die Hamiltonfunktion ein erstes Integral, falls sie nicht explizit von der Zeit abhängt.

Sei $M : [a,b] \times \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Sei ferner eine Lösung (q,p) von (3.32) in $[a,b]$ gegeben. Wir haben entlang der Lösung in Kurzschreibweise

$$\frac{dM}{dt} - \frac{\partial M}{\partial t} \quad = \quad < \frac{\partial M}{\partial q}, \dot{q} > + < \frac{\partial M}{\partial p}, \dot{p} > = < \frac{\partial M}{\partial q}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} > - < \frac{\partial M}{\partial p}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} > =: [\mathcal{H}, M]$$

wobei $[\mathcal{H}, M]$ **Poissonklammer** heisst. Also ist notwendig und hinreichend dafür, dass M ein erstes Integral ist, dass

$$\frac{\partial M}{\partial t}(t,q,p) + [\mathcal{H}, M](t,q,p) = 0\,,\ (t,q,p) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^{2d}, \tag{3.33}$$

gilt. Man rechnet nun leicht nach, dass die Poissonklammer zweier Integrale wieder eine (möglicherweise triviales) Integral ist.

Beispiel 3.8 Sei eine Lagrangefunktion gegeben durch

$$\mathcal{L}(t,q,\dot{q}) := \sqrt{(t^2+q^2)(1+\dot{q}^2)}\,.$$

Die Auflösung der Gleichung

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(t,q,\dot{q})$$

nach $\dot{q}$ führt auf

$$\dot{q} = \frac{p}{\sqrt{t^2+q^2-p^2}}\,.$$

Damit erhalten wir als Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H}(t,y,p) \;=\; \frac{p^2}{\sqrt{t^2+q^2-p^2}} - \sqrt{t^2+q^2}\sqrt{1+\frac{p}{(t^2+q^2-p^2)}} = -\sqrt{t^2+q^2-p^2}\,.$$

Die kanonischen Gleichungen lauten damit

$$\dot{q} \;=\; \frac{p}{\sqrt{t^2+q^2-p^2}}\,,\ \dot{p} = \frac{q}{\sqrt{t^2+q^2-p^2}}\,.$$

Offenbar ist

$$M(q,p) := p^2 - q^2$$

ein erstes Integral. $\square$

Abschließend noch eine Anmerkung zur obigen „Transformationstechnik“. Betrachten wir dazu eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir suchen ein Minimum von f und nehmen an, daß f strikt konvex und f' einen Diffeomorphismus definiert, d.h.

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ bijektiv },\ f''(\xi) > 0 \ \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}.$$

Betrachte

$$f^*(p) := \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\{\xi p - f(\xi)\}\,,\ p \in \mathbb{R}\,.$$

Das Supremum wird angenommen für ξ mit $f'(\xi) = p$. Man nennt die Transformation $p \longmapsto \xi$ die **Legendre-Transformation** und f^* die **Legendre-Transformatierte** von f . f^* ist wieder strikt konvex. Klar, $(f^*)^* = f$, und es gilt

$$f(\xi) + f^*(p) \geq p\xi \ \text{ für alle } p,\xi \in \mathbb{R}\,. \tag{3.34}$$

Ferner haben wir folgende Äquivalenz:

$$f(\xi) + f^*(p) = p\xi \iff f'(\xi) = p\,. \tag{3.35}$$

Vergleichen wir dies nun mit dem Vorgehen bei der Definition der Hamiltonfunktion. Wir sehen, daß die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(t,y,p)$ gerade als

$$\mathcal{H}(t,q,p) = \mathcal{L}(t,q,.)^*(p)$$

gedeutet werden kann. Dies ist Ausgangspunkt für eine allgemeine Fassung des Hamiltonschen Prinzips. Die Hilfsmittel zum Studium der allgemeinen Legrendre–Transformation stellt die konvexe Analysis bereit. Wir kommen darauf bei den direkten Methoden in Kapitel 5 zurück.

Beispiel 3.9

$$f(\xi) := \frac{1}{\alpha} \mid \xi \mid^\alpha , \, \xi \in \mathbb{R} \, , \, \alpha > 1 \, .$$

Dann gilt $f'(\xi) = \xi^{\alpha-1}$ und daher haben wir

$$f^*(p) = \frac{1}{\beta} \mid p \mid^\beta , p \in \mathbb{R} \, , \text{ wobei } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \, .$$

Man beachte, dass sich der Zusammenhang f, f^* in der Dualität der Räume l_α, l_β und $L_\alpha(X), L_\beta(X)$ $(X \subset \mathbb{R}^d)$ abbildet. □

Beispiel 3.10 Betrachten wir die Bewegung eines Teilchens mit Masse m in einem Zentralfeld erneut. Wir gehen wieder in die Ebene ($(x-y)$–Ebene), in der die Bewegung stattfindet und benutzen dort Polarkoordinaten

$$x(t) = r(t)\cos\varphi(t) \, , \, y(t) = r(t)\sin\varphi(t) \, .$$

Eine Lagrangefunktion ist

$$\mathcal{L}(r,\varphi,\dot r,\dot\varphi) := \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - U(r) \, ;$$

hier sind $q_1 = r, q_2 = \varphi, p_1 = m\dot r =: p_r, p_2 = mr^2\dot\varphi =: p_\varphi$. Als Hamiltonfunktion ergibt sich

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + U(r) \, .$$

Die kanonischen Gleichungen sind damit

$$\dot r = \frac{p_r}{m} \, , \, \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{mr^2} \, , \, \dot p_r = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - U'(r) \, , \, \dot p_\varphi = 0 \, . \tag{3.36}$$

Die schon früher gefundenen Erhaltungsgrößen finden sich nun wieder. □

Bemerkung 3.11 Transformationen des Raumes $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ führen zu Transformationen der Hamiltonschen Gleichungen. Solche Transformationen sind nur dann brauchbar, wenn sie die spezielle Struktur der kanonischen Gleichungen, man nennt sie **symplektisch**, erhalten. Dies führt zur Gruppe $\mathcal{S}_{2d}(\mathbb{R})$ der **symplektischen Matrizen**. Es sind dies Matrizen M mit

$$M^T J M = J \, ,$$

also „orthogonale Matrizen" in bezug auf die symplektische Struktur. Dies erklärt sich so: In $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ wird durch $(x,y) \longmapsto [x,y] := < x, Jy >$ eine schiefsymmetrische Bilinearform definiert. Wie man leicht nachrechnet, ist dies Bilinearform invariant gegenüber einer Koordinatentransformation mit einer symplektischen Matrix, d.h. $[x,y] = [Mx, My]$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^d$.

Der abstrakte Rahmen für eine geometrische Sicht der Lagrange/Hamilton–Mechanik ist der der symplektischen Mannigfaltigkeit. Hier wird die Lagrangefunktion als Funktion auf dem Tangentialraum des Koordinatenraumes aufgefasst. Mit Hilfe des Kalküls für Differentialformen ergibt sich eine sehr elegante Theorie. □

Bemerkung 3.12 Wir haben das Problem $P_{\mathcal{L}}(a,b;q_a,q_b)$ betrachtet. Wir halten b, q_b fest und betrachten die Problemschar $P_{\mathcal{L}}(\cdot,b;\cdot,q_b)$. Dies führt uns zur **Wirkungsfunktion**

$$\mathcal{S}(t,q) := -\inf P_{\mathcal{L}}(t,b;q,q_b)\,,\ (t,q)\in[a,b]\times\mathbb{R}^d\,. \tag{3.37}$$

In formaler Rechnung ergibt sich

$$\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial q}(t,q) = p\,,\ \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial t}(t,q) = -\mathcal{H}(t,q,p)\,. \tag{3.38}$$

Also genügt die Wirkungsfunktion der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial t} + \mathcal{H}(t,q,\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial q}) = 0\,,\ (t,q)\in[a,b]\times\mathbb{R}^d, \tag{3.39}$$

und den Randbedingungen

$$\mathcal{S}(b,q) = 0 \text{ für alle } q\in\mathbb{R}^d. \tag{3.40}$$

Die Gleichung (3.39) heisst **Hamilton–Jakobi–Gleichung**.

Eine Reihe von Problemen, Fragen werden durch das obige Vorgehen aufgeworfen: Differenzierbarkeit von $\mathcal{S}$, Gültigkeit der Identitäten (3.38),(3.39), Lösbarkeit von (3.39) zusammen mit (3.40). Darauf kommen wir im Kapitel **??** über die Wertfunktion zurück. □

3.5 Übungen

1.) Betrachte die Lagrange–Funktion $\mathcal{L}(t,q,p) := p^2$ in $[a,b]$. Berechne die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$ und die Hamilton–Jakobi–Gleichung.

2.) Betrachte die Lagrange–Funktion $\mathcal{L}(t,q,p) := f(q)\sqrt{1+p^2}$ in $[a,b]$. Berechne die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$ und die Hamilton–Jakobi–Gleichung.

3.) Betrachte die Lagrange–Funktion $\mathcal{L}(t,q,p) := \sqrt{t^2+q^2}\sqrt{1+p^2}$ in $[a,b]$. Berechne die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$ und die Extremalen.

4.) Betrachte das Wirkungsintegral

$$\frac{1}{2}\int_a^b (m\dot{q}(t)^2 - cq(t))dt$$

(a) Schreibe die Eulersche Differentialgleichung auf.

(b) Stelle die kanonischen Gleichungen (Koordinaten q,p) auf und berechne die Hamiltonfunktion.

(c) Berechne die Poisson–Klammern $[q,p],[q,\mathcal{H}]$ und $[p,\mathcal{H}]$. Was läßt sich daraus über erste Integrale schließen ?

5.) Gegeben sei $f(x) := e^{|x|}-|x|-1,\, x\in\mathbb{R}$. Berechne die Legendre–Transformierte f^* $(f^*(y) := \sup_{x\in\mathbb{R}}(xy-f(x)),\, y\in\mathbb{R})$.

6.) Die Hamiltonfunktion für die Bewegung eines Massenpunktes im Kraftfeld mit dem Potential U in kartesischen Koordinaten ist gegeben durch

$$\mathcal{H}(q,p) := \frac{1}{2m}|p|^2 + U(q)\,,\ q,p\in\mathbb{R}^3.$$

Berechne die Hamiltonfunktion in Zylinder– und Kugelkoordinaten.

7.) Betrachte die Langrangefunktion

$$\mathcal{L}(t,x,\dot{x}) := \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{\alpha}{|x+\sigma|} - \frac{\beta}{|x-\sigma|}\,.$$

(Coulomb–Feld zweier fester Zentren.) Bestimme die Hamiltonfunktion und die kanonischen Gleichungen.

8.) Gegeben sei das skalare System

$$\ddot{x} = -U'(x) \quad (U : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ zweimal stetig differenzierbar})\,.$$

Das qualitative Verhalten von U entnehme man der Abbildung 3.3.

(a) Was bedeuten lokale Extrema von U für die Bewegung. Wie unterscheiden sich lokale Minima und lokale Maxima in der Bewegung.

(b) Skizziere in der $x - \dot{x}$ – Ebene (Phasenebene) das Lösungsverhalten.

(c) Berechne $\lim_{E\to E_0} T(E)$, wobei $T(E)$ die Zeitperiode der Bewegung für E nahe E_0 sei.

9.) Man skizziere das eindimensionale Potential

$$U(r) := -5re^{-r} + r^{-4} + \frac{2}{r}$$

und die dazugehörigen Kurven der Bewegung in der $x - \dot{x}$–Phasenebene für ein Teilchen der Masse $m = 1$ als Funktion der Energie und des Anfangsortes.

10.) Man betrachte zwei identische mathematische Pendel der Länge l und der Masse m, die über eine ideale Feder gekoppelt sind. Die Feder sei entspannt, wenn beide Pendel in ihrer Ruhelage sind. Für kleine Ausschläge gilt dann für die Gesamtenergie:

$$E = \frac{1}{2m}(q_2^2 + q_4^2) + \frac{1}{2}m\omega_0^2(q_1^2 + q_3^2) + \frac{1}{2}m\omega_1^2(q_1 - q_3)^2$$

(a) Man identifiziere die einzelnen Terme in dem Ansatz.

(b) Man leite die Bewegungsgleichungen ab.

(c) Suche eine Koordinatentransformation, die die Bewegungsgleichungen entkoppelt und löse sie.

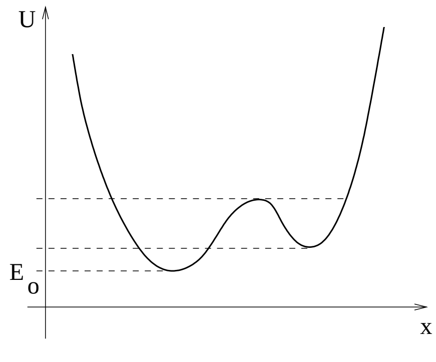

Abbildung 3.3: Eine Potentialmulde

Kapitel 4

Hinreichende Bedingungen

In diesem Kapitel wollen wir die Charakterisierung von Extremalen vorantreiben. Dazu ist es auch sinnvoll, eine Erweiterung der zur Konkurrenz zugelassenen Trajektorien vorzunehmen; „Ecken“ in den Kurven werden zugelassen. Damit ist dann die Diskussion der notwendigen und hinreichenden Bedingungen ziemlich vollständig. Dies wird deutlich bei der abschließenden Betrachtung von früher schon andiskutierten konkreten Beispielen.

4.1 Stückweise differenzierbare Funktionen

Bisher haben wir nur stetig differenzierbare Funktionen zur Konkurrenz zugelassen. Es kann nun vorkommen, dass ein Variationsproblem keine Lösung hat, weil „zu wenige“ Funktionen zur Konkurrenz zugelassen sind.

Beispiel 4.1 Betrachte ein Variationsproblem mit Integrand

$$L(t, y, y') := (1 - y'^2)^2$$

Offensichtlich ist der Integrand L gleich 0, wenn $|y'| = 1$ ist, und sonst, größer als 0. Folglich sind diejenigen Funktionen, deren Ableitungen stückweise ± 1 sind, Kandidaten für Lösungen des Problems. Es ist einfach einzusehen, dass nur für ganz wenige Randbedingungen eine stetig differenzierbare Lösung des zugehörigen Variationsproblems existiert. Vielmehr erwarten wir Zickzack–Streckenzüge als Lösungen. □

Bevor wir Variationsprobleme betrachten, die Lösungen der obigen Form haben, haben wir einige einfache Aussagen über stetig differenzierbare Funktionen zusammenzutragen.

Definition 4.2

a) Eine Funktion $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst **stückweise stetig**, wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < ... < t_{n+1} = b$ gibt, so dass gilt:

$$y\,|_{[t_i, t_{i+1}]} \in C[t_i, t_{i+1}]\,, 0 \leq i \leq n\,.$$

Wir schreiben: $y \in \hat{C}[a, b]$.

b) Eine stetige Funktion $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst **stückweise stetig differenzierbar**, wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < ... < t_{n+1} = b$ gibt, so dass gilt:

$$y\,|_{[t_i, t_{i+1}]} \in C^1[t_i, t_{i+1}]\,, 0 \leq i \leq n\,.$$

Die Punkte $t_1, ..., t_n$ heissen **Ecken** von y, falls y' dort nicht stetig ist. Wir schreiben: $y \in \hat{C}^1[a,b]$.

c) Eine Funktion $y : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ heisst **stückweise stetig**, falls jede Koordinatenfunktion von y stückweise stetig ist. Wir schreiben: $y \in \hat{C}([a,b];\mathbb{R}^d)$.

d) Eine Funktion $y : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ heisst **stückweise stetig differenzierbar**, falls jede Koordinatenfunktion von y stückweise differenzierbar ist. Wir schreiben: $y \in \hat{C}^1([a,b];\mathbb{R}^d)$.

$\square$

Beachte, Ecken liegen nur im Inneren von $[a,b]$.

Bemerkung 4.3 Die Mengen $\hat{C}[a,b]$, $\hat{C}([a,b];\mathbb{R}^d)$, $\hat{C}^1[a,b]$, $\hat{C}^1([a,b];\mathbb{R}^d)$ sind in der üblichen Verknüpfung Vektorräume (über $\mathbb{R}$). Ist $f \in \hat{C}([a,b];\mathbb{R}^d)$, so ist ihre Norm $\|f\|_\infty$ wohlerklärt. Wir können auch $\hat{C}^1([a,b];\mathbb{R}^d)$ wieder normieren:

$$||f||_{1,\infty} := \max_{t \in [a,b]} |f(t)| + \max_{t \in [a,b]} |f'(t)| \, .$$

Beachte aber, dass die obigen Vektorräume für analytische Betrachtungen recht ungeeignet sind: Sie sind nicht vollständig bezüglich der Norm $|| \cdot ||$, Unstetigkeiten können sich häufen, was sie nicht dürfen, da dann eventuell im ins Auge gefassten Grenzwert unendlich viele Ecken vorhanden sind. $\square$

Eine angepasste Form des Hauptsatzes der Differential– und Integralrechnung stellt das folgende Lemma bereit.

Lemma 4.4
Sei $y \in \hat{C}^1[a,b]$. Dann gilt

$$y(t) = y(a) + \int_a^t y'(s)ds \, , t \in [a,b] \, . \tag{4.1}$$

Beweis:
Da y' bis auf endlich viele Punkte stetig ist, existiert das (Riemann–)Integral in (4.1). Seien $t_1, ..., t_n$ die Ecken von y . Sei $t \in [t_k, t_{k+1}]$.

$$y(t) - y(a) = y(t) - y(t_k) + \sum_{l=0}^{k-1}(y(t_{l+1}) - y(t_l)) = \int_{t_k}^{t} y'(s)ds + \sum_{l=0}^{k-1} \int_{t_l}^{t_{l+1}} y'(s)ds = \int_a^t y'(s)ds$$

$\blacksquare$

Folgerung 4.5
Sei $y \in \hat{C}^1[a,b]$. Es gilt:

a) Ist $\int_a^b y'(s)^2 ds = 0$, so verschwindet y' .

b) Ist $y'(t) = 0$ für jedes t, das nicht Ecke von y ist, so ist y konstant.

Beweis:
Seien $t_1,...,t_n$ die Ecken von y; sei $t_0 = a, t_{n+1} = b$. Aus

$$0 = \int_a^b y'(s)^2 ds = \sum_{k=0}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(s)^2 ds$$

folgt $y' |_{[t_k,t_{k+1}]} = 0$, $0 \leq k \leq n$. Damit ist a) schon gezeigt. b) folgt aus Lemma 4.4. ∎

Das folgende sogenannte Glättungslemma zeigt, wie man eine stückweise differenzierbare Funktion durch „Abrundung“ der Ecken differenzierbar machen kann. Wichtig ist dabei in unserem Zusammenhang, dass man die Ableitung dabei noch kontrollieren kann.

Lemma 4.6
Sei $\hat{y} \in \hat{C}^1[a,b]$ und seien $t_1,...,t_n$ die Ecken von $\hat{y}$ Dann gibt es $A \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$, so dass für jedes $\delta \in (0,\delta_0)$ ein $y \in C^1[a,b]$ existiert mit

i) $y|_R = \hat{y}$, *wobei* $R = [a,b] \setminus \bigcup_{l=0}^{n} [t_l - \delta, t_l + \delta]$ *ist;*

ii) $\max\limits_{t\in[a,b]} |y'(t)| \leq 4 \max\limits_{t\in[a,b]} |\hat{y}'(t)|; \max\limits_{t\in[a,b]} |y(t) - \hat{y}(t)| \leq A\delta$.

Beweis:
Es genügt die Aussage für eine Ecke $\hat{t}$ zu beweisen. Sei $\delta_0 > 0$ so, dass $[\hat{t} - \delta_0, \hat{t} + \delta_0] \subset (a,b)$ gilt. Sei $\delta \in (0,\delta_0)$. Die Glättungsidee besteht darin, $\hat{y}'$ in $[\hat{t} - \delta, \hat{t} + \delta]$ zu einem stetigen Polygonzug abzuändern, ohne $\hat{y}$ ausserhalb zu verändern. Sei $h \in \mathbb{R}$. Setze

$$g(t) := \begin{cases} \hat{y}'(t) & , |t - \hat{t}| > \delta \\ -(t-\hat{t})\delta^{-1}\hat{y}'(\hat{t}-\delta) + (t - \hat{t} + \delta)\delta^{-1}h & , \hat{t} - \delta \leq t \leq \hat{t} \\ -(t - \hat{t} - \delta)\delta^{-1}h + (t - \hat{t})\delta^{-1}\hat{y}'(\hat{t}+\delta) & , \hat{t} \leq t \leq \hat{t} + \delta \end{cases}$$

Damit definieren wir $y \in C^1[a,b]$ durch

$$y(t) := \hat{y}(a) + \int_a^t g(s)ds \quad , t \in [a,b] .$$

Wir wollen nun h so wählen, dass y mit $\hat{y}$ in $[a,b]\setminus[\hat{t}-\delta, \hat{t}+\delta]$ übereinstimmt. Dies ist dann der Fall, wenn

$$A_{\delta,h} := \int_{\hat{t}-\delta}^{\hat{t}+\delta} g(s)ds = \int_{\hat{t}-\delta}^{\hat{t}+\delta} \hat{y}'(s)ds =: \hat{A}_\delta$$

gilt. Sei $M := \max\limits_{t\in[a,b]} |\hat{y}'(t)|$. Es ergibt sich damit

$$A_{\delta,h} = \int_{\hat{t}-\delta}^{\hat{t}+\delta} g(s)ds = h\delta + \frac{\delta}{2}(\hat{y}'(\hat{t}-\delta) + \hat{y}'(\hat{t}+\delta)).$$

Also haben wir h gemäß $h = \frac{\hat{A}_\delta}{\delta} - \frac{1}{2}(\hat{y}'(\hat{t}-\delta) + \hat{y}'(\hat{t}+\delta))$ zu wählen. Damit haben wir $|A_{\delta,h}| \leq 2\delta M$, $|h| \leq 3M$. Aus der Darstellung von g folgt $|\hat{y}'(t)| \leq M + |h|$, $t \in [a,b]$, also $\max_{t\in[a,b]} |y'(t)| \leq 4M$. Aus

$$|y(t) - \hat{y}(t)| \leq \int_{\hat{t}-\delta}^{t} |y'(s) - \hat{y}'(s)| ds \leq 10\, M\, \delta\,,\ t \in [\hat{t}-\delta, \hat{t}+\delta]\,,$$

lesen wir die Konstante A ab. ∎

4.2 Integralfunktionale

Wir wollen in diesem Kapitel notwendige und insbesondere hinreichende Bedingungen für ein (schwach, stark) lokales Minimum eines Variationsproblems der Form

$$\hat{P}_L \begin{cases} \text{Minimiere } I(y) := \int_a^b L(t, y(t), y'(t))dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } y \in \hat{U}_{ad} := \{v \in \hat{C}^1([a,b];\mathbb{R}^d) | v(a) = y_a, v(b) = y_b\} \end{cases}$$

bereitstellen. Als erstes wollen wir diskutieren, was sich über Lösungen von Problem $\hat{P}_L$, relativ zu den Lösungen von Problem P_L sagen lässt, das aus $\hat{P}_L$ resultiert, wenn wir $\hat{U}_{ad}$ durch

$$U_{ad} := \{v \in C^1([a,b];\mathbb{R}^d) | v(a) = y_a, v(b) = y_b\}$$

ersetzen:

$$P_L \begin{cases} \text{Minimiere } I(y) := \int_a^b L(t, y(t), y'(t))dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } y \in U_{ad} := \{v \in \hat{C}^1([a,b];\mathbb{R}^d) | v(a) = y_a, v(b) = y_b\} \end{cases}$$

Die Begriffe **stark lokal**, **schwach lokal** übertragen sich mit Hilfe der auf $\hat{C}^1([a,b];\mathbb{R}^d)$ erweiterten Normen $||.||_\infty$, $||.||_{1,\infty}$ sofort auf das Problem $\hat{P}_L$.

Satz 4.7
Sei $L : [a,b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $\overline{y} \in U_{ad}$ stark lokales Minimum in Problem P_L, so ist $\overline{y}$ auch stark lokales Minimum in Problem $\hat{P}_L$.

Beweis:
Sei $\overline{y}$ Minimum von I in $S_\epsilon := \{v \in U_{ad} | \, ||v - \overline{y}||_\infty < \epsilon\}$ mit $\epsilon \in (0,1)$.
Sei $\hat{y} \in \hat{S}_\epsilon := \{v \in \hat{U}_{ad} | \, ||v - \overline{y}||_\infty < \epsilon\}$. Wir wollen $I(\hat{y}) \geq I(\overline{y})$ zeigen.
Sei $\delta \in (0,1)$. Verwende das Glättungslemma zur Konstruktion von $y_j \in C^1[a,b], 1 \leq j \leq d$, mit

$$||y_j - \hat{y}_j||_\infty \leq A_j \delta\,,\ ||y_j'||_\infty \leq 4||\hat{y}_j||_\infty,\ 1 \leq j \leq d.$$

Nach Konstruktion ist $y := (y_1, \ldots, y_d) \in U_{ad}$. Offenbar gibt es nun m mit

$$||y_j||_\infty, ||y_j'||_\infty, ||\hat{y}_j||_\infty, ||\hat{y}_j'||_\infty \leq m\,,\ 1 \leq j \leq d.$$

Seien $t_1, \ldots, t_n$ die Ecken von $\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_d$. Es folgt

$$|I(y) - I(\hat{y})| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{t_k-\delta}^{t_k+\delta} |L(t, y(t), y'(t)) - L(t, \hat{y}(t), \hat{y}'(t))| dt \leq 4\, n\, \delta\, l$$

wobei $l := \max\{|L(t,y,\zeta)||t \in [a,b]; |y|,|\zeta| \le m\}$ ist. Ist nun δ genügend klein, so folgt

$$||y - \overline{y}||_\infty \le ||y - \hat{y}||_\infty + ||\hat{y} - \overline{y}||_\infty < \epsilon$$

und daher

$$I(\hat{y}) \ge I(y) - |I(y) - I(\hat{y})| \ge I(\overline{y}) - 4n\delta l\,.$$

Grenzübergang $\delta \to 0$ liefert die Behauptung. ■

Satz 4.8
Sei $L : [a,b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $\overline{y} \in U_{ad}$ schwach lokales Minimum in Problem P_L, so ist $\overline{y}$ auch schwach lokales Minimum in Problem $\hat{P}_L$.

Beweis:
Sei $\epsilon \in (0,1)$ und sei $\overline{y}$ Minimum von I in $S_\epsilon := \{v \in U_{ad}| \, ||v - \overline{y}||_{1,\infty} < \epsilon\}$.
Sei $\epsilon' := \frac{\epsilon}{5}$. Sei $\hat{y} = (\hat{y}_1, ..., \hat{y}_d) \in \hat{U}_{ad}, ||\hat{y} - \overline{y}||_{1,\infty} < \epsilon'$; setze $v := \hat{y} - \overline{y}$. Verwende das Glättungslemma mit $\delta \in (0,1)$ zur Konstruktion von $v_\epsilon \in C^1([a,b];\mathbb{R}^d)$ mit

$$||v_\epsilon - v||_\infty \le A\delta, \; ||v_\epsilon'||_\infty \le 4||v'||_\infty\,;$$

dabei ist A eine Konstante, die nur von v, d.h. von $\hat{y}, \overline{y}$ abhängt. Setze $y_\epsilon := \overline{y} + v_\epsilon$. Nach Konstruktion von v_ϵ ist $y_\epsilon \in Y_{ad}$. Wir haben

$$\begin{aligned} ||y_\epsilon - \overline{y}||_{1,\infty} &= ||v_\epsilon||_{1,\infty} = ||v_\epsilon||_\infty + ||v_\epsilon'||_\infty \le ||v_\epsilon - v||_\infty + ||v||_\infty + 4||v'||_\infty \\ &\le A\delta + 4\,||\hat{y} - \overline{y}||_{1,\infty} \le A\delta + 4\epsilon'\,. \end{aligned}$$

Also liegt y_ϵ in S_ϵ, falls δ genügend klein ist, und es folgt

$$I(\hat{y}) \ge I(y_\epsilon) - |I(y_\epsilon) - I(\hat{y})| \ge I(\overline{y}) - |I(\overline{y} + v_\epsilon) - I(\overline{y} + v)|$$

Nun setzt man wie im Beweis zu Satz 4.7 fort. ■

Bemerkung 4.9 Es ist klar, dass man einen entsprechenden Satz für globale Minima aufschreiben kann. Ferner ist klar, dass bei fehlenden Randbedingungen entsprechende Sätze gelten. □

Kurz gesagt bedeuten die obigen Ergebnisse, dass eine C^1–Lösung auch eine $\hat{C}^1$–Lösung ist. Eine Umkehrung dieses Sachverhaltes wird beleuchtet durch folgendes Beispiel.

Beispiel 4.10 Betrachte

$$L(t,y,y') := y^2(1-y')^2, a = -1, b = 1, y_a = 0, y_b = 1.$$

Sicher ist

$$\overline{y}(t) := \begin{cases} 0 & , t \le 0 \\ t & , t \ge 0 \end{cases}$$

eine Lösung in $\hat{U}_{ad}$. Gibt es eine weitere Lösung? Dies ist nicht der Fall, wie folgende Überlegung zeigt. Sei y eine Lösung. Wegen $y(1) = 1$ liegt

$$a := \inf\{a' \in [-1,1]| \, y(t) > 0, a' < t \le 1\}$$

in $[-1,1]$. Also muß wegen $I(y) = I(\overline{y}) = 0$ gelten $y'(t) = 1\,, a \le t \le 1$, d.h. $y(t) = t \;\; , a \le t \le 1\,.$ Da y jedenfalls stetig ist, schliesst man daraus $a = 0$. Also $y(t) = t\,, 0 \le t \le 1$, und analog $y(t) = 0\,,\; -1 \le t \le 0\,.$
Also hat das Variationsproblem keine Lösung in U_{ad} und in $\hat{U}_{ad}$ die einzige Lösung $\overline{y}$. □

4.3 Extremalen

Satz 4.11
Sei $L : [a,b] \times \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar und sei $\overline{y} \in \hat{C}^1([a,b];\mathbb{R}^d)$ ein stark lokales Minimum. Dann gibt es Konstanten $h \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^d$ mit:

a) $L_{y'}(t, \hat{y}(t), \overline{y}'(t)) = \int_a^t L_y(s, \overline{y}(s), \overline{y}'(s))ds + c\,,\ t \in [a,b].$

b) $E(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t), u) \geq 0$ *für alle* $t \in [a,b]$, $u \in \mathbb{R}^d$, *wobei* E *so definiert ist:*

$$E(t,y,y',u) := L(t,y,u) - L(t,y,y') - < u - y', L_{y'}(t,y,y') > \ .$$

(In einer Ecke gilt dies mit $\overline{y}'(t)$ ersetzt durch $\overline{y}'(t-)$ oder $\overline{y}'(t+)$.

c) $L(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t)) - < \overline{y}'(t), L_{y'}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t)) > = \int_a^t L_t(s, \overline{y}(s), \overline{y}'(s))ds + h\,,\ t \in [a,b]\,.$

Beweis:
Zu a). Wir wählen $\gamma \in \hat{C}^1([a,b];\mathbb{R}^d)$ mit $\gamma(a) = \gamma(b) = 0$, und setzen

$$y(\cdot;\epsilon) := \overline{y}(\cdot) + \epsilon\gamma(\cdot)\ ,\ I(\epsilon) := I(y(\cdot;\epsilon))\ ,\ \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)\ (\epsilon_0 > 0)\,.$$

Aus der Bedingung $\frac{dI}{d\epsilon}(0) = 0$ – die Differenzierbarkeit liegt vor – erhalten wir

$$\int_a^b \{< L_y(s, \overline{y}(s), \overline{y}'(s)), \gamma(s) > + < L_{y'}(s, \overline{y}(s), \overline{y}'(s)), \gamma'(s) >\} ds \ = \ 0\,, \tag{4.2}$$

$$\int_a^b < - \int_a^s L_y(r, \overline{y}(r), \overline{y}'(r))dr + L_{y'}(s, \overline{y}(s), \overline{y}'(s)), \gamma'(s) > ds \ = \ 0\,. \tag{4.3}$$

Für ein geeignetes c (Mittelwertbildung!) ist

$$V : [a,b] \ni t \ \longmapsto \int_a^t \Big\{ - \int_a^s L_y(r, \overline{y}(r), \overline{y}'(r))dr + L_{y'}(s, \overline{y}(s), \overline{y}'(s)) - c\Big\} ds \in \mathbb{R}$$

in $\hat{C}^1([a,b];\mathbb{R}^d)$ und es gilt $V(a) = V(b) = 0$. Wir haben wegen (4.3)

$$\int_a^b < V'(s), V'(s) > ds = 0\,.$$

Daraus folgt mit Folgerung 4.5 $V'(s) = 0,\ s \in [a,b]$, und wir haben

$$L_{y'}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t)) = \int_a^t L_y(s, \overline{y}(s), \overline{y}'(s))ds + c, t \in [a,b].$$

Zu b). Sei o.E. $d = 1$. Sei $\hat{t} \in (a, b)$ und sei $\hat{t}$ zunächst keine Ecke von $\overline{y}$. Sei $\delta > 0$ mit $[\hat{t}-\delta, \hat{t}+\delta] \subset (a, b)$. Wir definieren mit $\epsilon \in (0, 1)$ eine Konkurrenzfunktion

$$y(t;\epsilon,\delta,u) := \begin{cases} \overline{y}(t) & , t \notin [\hat{t}, \hat{t}+\delta] \\ \overline{y}(t) + (t-\hat{t})(u - \overline{y}'(\hat{t})) & , t \in [\hat{t}, \hat{t}+\epsilon\delta] \\ \overline{y}(t) + \epsilon(1-\epsilon)^{-1}(u-\overline{y}'(\hat{t}))(\hat{t}+\delta-t) & , t \in [\hat{t}+\epsilon\delta, \hat{t}+\delta] \end{cases}$$

Klar, $y(t;\epsilon,\delta,u)$ liegt in einer Umgebung von $\overline{y}$ bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$. Aus der Optimalität von $\overline{y}$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{\epsilon\delta}(I(y(\cdot;\epsilon,\delta,u)) - I(\overline{y})) \\ &= \frac{1}{\epsilon\delta}\int_{\hat{t}}^{\hat{t}+\epsilon\delta} \{L(t, y(t,\epsilon,\delta,u), y'(t;\epsilon,\delta,u)) - L(t,\overline{y}(t),\overline{y}'(t))\}dt \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon\delta}\int_{\hat{t}+\epsilon\delta}^{\hat{t}+\delta} \{L(t, y(t;\epsilon,\delta,u), y'(t;\epsilon,\delta,u)) - L(t,\overline{y}(t),\overline{y}'(t))\}dt \end{aligned}$$

für alle $\delta > 0, \delta$ genügend klein. Also erhalten wir durch Grenzübergang $\delta \to 0$

$$0 \leq L(\hat{t},\overline{y}(\hat{t}),u) - L(\hat{t},\overline{y}(\hat{t}),\overline{y}'(\hat{t})) + (\frac{\epsilon}{1-\epsilon})^{-1}(L(\hat{t},\overline{y}(\hat{t}),\overline{y}'(\hat{t}) - \frac{\epsilon}{1-\epsilon}(u-\overline{y}'(\hat{t}))) - L(\hat{t},\overline{y}(\hat{t}),\overline{y}'(\hat{t}))$$

für alle $\epsilon \in (0, 1)$. Durch Grenzübergang $\epsilon \to 0$ erhalten wir die unter b) aufgeführte Aussage. Ist nun $\hat{y}$ eine Ecke, dann erhält man die Aussage durch Grenzübergang $t \to \hat{t}$.
Zu c). Zu $\overline{y}$ haben wir die Kurve

$$\hat{x} : [a, b] \ni t \longmapsto (t, \overline{y}(t)) \in \mathbb{R}^{d+1} .$$

Diese Kurve minimiert I in der Klasse der Kurven

$$x : [\alpha, \beta] \ni s \mapsto (x_0(s), x_1(s), ..., x_d(s)) \in \mathbb{R}^{d+1},$$

die positive Durchlaufgeschwindigkeit haben, d.h. $\dot{x}_0(s) > 0$, $s \in [\alpha, \beta]$, und die die Randbedingungen $x_i(\alpha) = \overline{y}_i(a)$, $x_i(\beta) = \overline{y}_i(b)$, $1 \leq i \leq d$, erfüllen. Für eine solche Kurve lautet das Variationsintegral

$$I(x) = \int_\alpha^\beta F(x(s), \dot{x}(s))ds$$

wobei

$$F(x, \dot{x}) = L(x_0, ..., x_d, \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_0}, ..., \frac{\dot{x}_d}{\dot{x}_0})\dot{x}_0$$

ist (Transformationssatz mit $t = x_0(s)$). Die Eulersche „Differentialgleichung" in der Form a) lautet hier

$$F_{\dot{x}}(x(s), \dot{x}(s)) = \int_\alpha^s F_x(x(r), \dot{x}(r))dr + c , s \in [\alpha, \beta] ,$$

d.h. es muß für $x = \hat{x}$ gelten

$$F_{\dot{x}}(\hat{x}(s), \dot{\hat{x}}(s)) = \int\limits_{\alpha}^{s} F_x(\hat{x}(r), \dot{\hat{x}}(r))dr + c\,,\ t \in [\alpha, \beta]\,.$$

Wegen

$$F_{\dot{x}_0}(x, \dot{x}) = L(x, \dot{x}) - < (\dot{x}_1, ..., \dot{x}_d), L_{y'}(x, \dot{x}) >\,,\ F_{x_0}(x, \dot{x}) = L_t(x, \dot{x})\,,$$

erhalten wir

$$L(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t)) - < L'_y(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t)), \overline{y}'(t) > = \int\limits_{a}^{t} L_t(s, \overline{y}(s), \overline{y}'(s))ds + c\,,\ t \in [a, b]\,.$$

Bemerkung 4.12 Die Identität in a) in Satz 4.11 ist die Eulersche Differentialgleichung in integraler Form. Die „zweite“ Eulersche Gleichung in der Form c) des Satzes 4.11 drückt den Sachverhalt aus, dass die Identität

$$\frac{d}{dt}(L - < y', L_{y'} >) = L_t\,,$$

welche für Trajektorien $y \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^d)$ aus der Eulerschen Differentialgleichung folgt, auch für Trajektorien $\overline{y}$, die nur in $\hat{C}^1([a, b]; \mathbb{R}^d)$ sind, in integraler Form gilt. Die Bedingung b) des Satzes 4.11 besagt, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^d \ni u \longmapsto L(t, \overline{y}(t), u) \in \mathbb{R}$$

konvex für alle $t \in [a, b]$ ist. □

Die verwendete Funktion E heisst **Weierstraßsche Exzessfunktion** oder kurz **Weierstraßsche E–Funktion**.

Folgerung 4.13
Sei $L : [a, b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longmapsto \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $\overline{y} \in \hat{C}^1([a, b]; \mathbb{R}^d)$ stark lokales Minimum. Dann gilt:

a) *Die Abbildungen*

$$[a, b] \ni t \longmapsto L_{y'}(t, \overline{y}'(t)) \in \mathbb{R}^d\,,$$
$$[a, b] \ni t \longmapsto L(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t)) - < \overline{y}'(t), L_{y'}(t, \overline{y}(t), \hat{y}'(t)) > \in \mathbb{R}$$

sind stetig.

b) *In einer Ecke $\hat{t}$ von $\overline{y}$ haben wir mit der Weierstraßschen E–Funktion:*

$$E(\hat{t}, \overline{y}(\hat{t}), \overline{y}'(\hat{t}-), \overline{y}'(\hat{t}+)) = E(\hat{t}, \overline{y}(\hat{t}), \overline{y}'(\hat{t}+), \overline{y}'(\hat{t}-)) = 0\,.$$

c) *$L_{y'y'}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))$ ist positiv semidefinit für alle $t \in [a, b]$.*

Beweis:
Zu a). Die Stetigkeit der erstgenannten Funktion folgt aus a) im vorhergehenden Satz. Wir setzen $p(t) := L_{y'}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))\,,\ t \in [a, b]\,,$ und wissen dann, dass p stetig ist. Mit $F(t, u) := L(t, \overline{y}(t), u) - < u, p(t) >\,,\ t \in [a, b]$, folgt aus b) in Satz 4.11

$$0 \le E(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t-), \overline{y}'(t+)) = F(t, \overline{y}'(t+)) - F(t, \overline{y}'(t-)),$$

$$0 \leq E(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t+), \overline{y}'(t-)) = F(t, \overline{y}(t-)) - F(t, \overline{y}'(t+)).$$

Also

$$F(t, \overline{y}'(t+)) = F(t, \overline{y}'(t-)).$$

b) haben wir unter a) mitbewiesen, c) folgt wie früher. ■

Die Aussagen von a) in der obigen Folgerung nennt man die **Eckenbedingungen**. Wir können mit ihrer Hilfe ermitteln, wo höchstens Ecken auftreten können: Sie können nur dort auftreten, wo die Gleichungen

$$L_{y'}(t, y, p_1) = L_{y'}(t, y, p_2)\,, \tag{4.4}$$

$$L(t, y, p_1) - < p_1, L_{y'}(t, y, p_1) > = L(t, y, p_2) - < p_2, L_{y'}(t, y, p_2) > \tag{4.5}$$

eine Lösung mit $p_1 \neq p_2$ erlauben.

Nun illustrieren wir die Aussagekraft von Satz 4.11 und der Folgerung 4.13 an Beispielen.

Beispiel 4.14 Wir betrachten das bereits diskutierte Beispiel 4.10. Wir haben hier:

$$L_{y'}(t, y, y') = -2y^2(1 - y')\,,\; y'L_{y'}(t, y, y') - L(t, y, y') = y^2(-1 - {y'}^2)\,.$$

Das zu diskutierende Gleichungssystem lautet

$$y^2(1 - p_1) = y^2(1 - p_2)\,,\; y^2(1 - p_1^2) = y^2(1 - p_2^2)\,.$$

Damit wird $p_1 \neq p_2$ nur möglich für $y = 0$. Die Eulersche Differentialgleichung lautet

$$y(yy'' + {y'}^2 - 1) = 0\,.$$

Sie liefert unter Berücksichtigung der Randbedingungen die Hyperbel

$$y^2 = (t + \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{16}\,,$$

die aber in $[-1, \frac{1}{2})$ nicht reellwertig ist und damit als Extremale nicht in Frage kommt. Andererseits wird die Eulersche Differentialgleichung für $y \equiv 0, y \equiv 1$, erfüllt. Die gesuchte Extremale setzt sich daraus zusammen:

$$\overline{y}(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \\ t & , t \geq 0 \end{cases}\,.$$

Dies ist die schon gefundenen Lösung. □

Beispiel 4.15 Betrachte ein Variationsproblem mit

$$L(t, y, y') := {y'}^2 + {y'}^3\,,\, a = 0, b = 1, y_a = y_b = 0\,.$$

Die Eckenbedingungen sind hier:

$$2p_1 + 3p_1^2 = 2p_2 + 3p_2^2\,,\; p_1^2 + 2p_1^3 = p_2^2 + 2p_2^2\,.$$

Unter der Annahme $p_1 \neq p_2$ erhalten wir daraus

$$2 + 3(p_1 + p_2) = 0, p_1 + p_2 + 2(p_1^2 + p_1 p_2 + p_2^2) = 0\,,$$

was auf die Lösung $p_1 = p_2 = -\frac{1}{3}$ führt, im Widerspruch zum Ausgangspunkt $p_1 \neq p_2$. Also kann die Extremale keine Ecken haben, Funktionen in $\hat{C}^1[0,1] \backslash C^1[0,1]$ liefern also kein Minimum. $y \equiv 0$ ist ein schwaches Minimum. Da die bedingung b) aus Satz 4.11 verletzt ist, wie man leicht nachrechnet, kann man ausschließen, dass es ein starkes Minimum gibt. □

Beispiel 4.16 Das Variationsproblem zum Problem der Dido ist beschrieben mit

$$L(t,y,y') = y\sqrt{1+y'^2}\,.$$

Die Eckenbedingungen lauten:

$$\frac{y}{\sqrt{1+p_1^2}} = \frac{y}{\sqrt{1+p_2^2}}\,,\ \frac{p_1 y}{\sqrt{1+p_1^2}} - y\sqrt{1+p_1^2} = \frac{p_2 y}{\sqrt{1+p_2^2}} - y\sqrt{1+p_2^2}\,.$$

Sie lassen also eine Ecke nur für $y=0$ zu. □

4.4 Extremalenfelder

Wir betrachten stets das Problem $\hat{P}_L$ bzw. P_L .

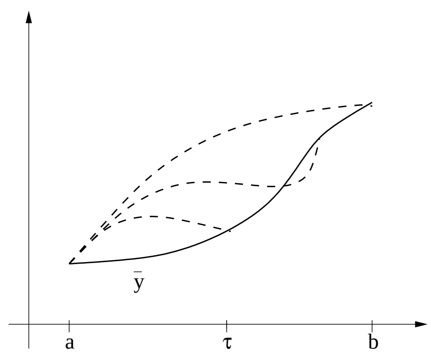

Abbildung 4.1: Einbettung

Zur Ableitung der notwendigen Bedingungen haben wir die optimale Trajektorie $\overline{y}$ in eine Schar der folgenden Form

$$y(\cdot;\epsilon) := \overline{y} + \epsilon\eta\ \ ,|\epsilon| < \epsilon_0,$$

„eingebettet“; dabei ist $\epsilon_0 > 0$ und η eine hinreichend glatte Funktion auf $[a,b]$ mit $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Zum Nachweis, dass die Lösung $\overline{y}$ der Eulerschen Differentialgleichung ein (stark) lokales Minimum darstellt, wird $\overline{y}$ als eingebettet in eine Schar von Lösungen der Eulerschen Differentialgleichung betrachtet, man sagt $\overline{y}$ sei in ein Feld eingebettet. Die Vorgehensweise geht auf Weierstraß zurück. Wir skizzieren zunächst die Originalidee von Weierstraß.

Sei $\overline{y} \in U_{ad}$ eine Extremale. Sei $y \in U_{ad}$. Wir nehmen an, dass zu jedem $\tau \in (a,b)$ genau eine Lösung $\phi(\cdot;\tau)$ der Eulerschen Differentialgleichung existiert mit

$$\phi(a;\tau) = y_a\ \ ,\phi(\tau;\tau) = y(\tau).$$

Wir definieren

$$\sigma(\tau) := -\int_a^\tau L(s,\phi(s;\tau),\phi'(s;\tau))ds - \int_\tau^b L(s,y(s),y'(s))ds, \tau \in [a,b].$$

Damit haben wir $I(y) - I(\overline{y}) = \sigma(b) - \sigma(a)$ (beachte die oben geforderte Eindeutigkeit) und es ist $I(y) - I(\overline{y}) \geq 0$, falls etwa $\sigma'(\xi) \geq 0$ für alle $\xi \in (a,b)$ nachgewiesen werden kann. Ohne auf eine nähere Begründung einzugehen, erhalten wir:

$$\begin{aligned}\sigma'(\xi) &= -L(\xi,\phi(\xi;\xi),\phi'(\xi;\xi)) + L(\xi,y(\xi),y'(\xi)) \\ &\quad -\int_a^\xi L_y(s,\phi(s;\xi),\phi'(s;\xi))\phi_\xi(s;\xi)ds - \int_a^\xi L_{y'}(s,\phi(s;\xi),\phi'(s;\xi))\phi'_\xi(s;\xi)ds\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= L(\xi, y(\xi), y'(\xi)) - L(\xi, \phi(\xi;\xi), \phi'(\xi;\xi)) - \int_a^\xi L_y(s, \phi(s;\xi), \phi'(s;\xi))\phi_\xi(s;\xi)ds \\
&\quad -L_{y'}(s, \phi(s;\xi), \phi'(s;\xi))\phi_\xi(s;\xi)\Big|_{s=a}^{s=\xi} + \int_a^\xi L_{y't}(s, \phi(s;\xi), \phi'(s;\xi))ds \\
&\quad + \int_a^\xi \{L_{y'y}(s, \phi(s;\xi), \phi'(s;\xi))\phi'(s;\xi) + L_{y'y'}(s;\phi(s;\xi), \phi'(s;\xi))\phi_\xi(s;\xi)\}ds \\
&= L(\xi, y(\xi), y'(\xi)) - L(\xi, y(\xi), \phi'(\xi;\xi)) - L_{y'}(\xi, y(\xi), \phi'(\xi;\xi))\phi_\xi(\xi;\xi) \\
&\quad +L_{y'}(a, \phi(a;\xi), \phi'(a;\xi))\phi_\xi(a;\xi) \\
&= E(\xi, y(\xi), \phi'(\xi,\xi), y'(\xi))
\end{aligned}
$$

wobei E die Weierstraßsche Exzessfunktion ist. Dies ergibt sich aus der Beobachtung

$$\phi_\xi(\xi;\xi) = y'(\xi) - \phi'(\xi;\xi), \text{ wegen } \phi(\xi;\xi) = y(\xi)\,,\ \phi_\xi(a;\xi) = 0, \text{ wegen } \phi(a;\xi) = y_a\,,\ \xi \in (a,b)\,.$$

Damit ist nun klar, dass die notwendige Bedingung, die in Satz 4.11 unter b) aufgeführt ist, hinreichend dafür ist, dass $\sigma'(\xi) \geq 0$ gilt für alle $\xi \in [a,b]$; die Aussage, dass in $\overline{y}$ ein stark lokales Minimum vorliegt, würde folgen. Das Hauptproblem ist die Existenz der Schar

$$\phi(\cdot;\tau)\,,\ \tau \in (a,b],$$

für jedes $y \in Y_{ad}$ in einer $||\cdot||_\infty$ – Umgebung von $\overline{y}$. Von Hilbert stammt die allgemeine Fassung, hinreichende Bedingungen über die Einbettbarkeit von $\overline{y}$ im „Feld von Extremalen“ anzugehen. Wesentlich ist dabei eine Verschärfung der Weierstraßschen Bedingung

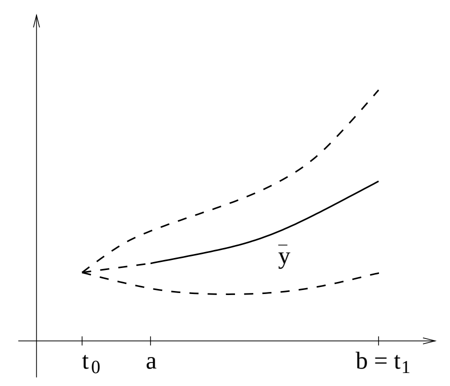

Abbildung 4.2: Zentralfeld

$E(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t), u) \geq 0$ für alle $t \in [a,b]$, für alle $u \in \mathbb{R}^d$.

Bevor wir weitergehen, eine Illustration dazu.

Beispiel 4.17 Betrachte

$$L(t,y,y') := {y'}^2 - y^2, y_a = y_b = 0, a = 0, b < \pi\,.$$

Die Eulersche Differentialgleichung lautet $y'' + y = 0$. Also ist die allgemeine Lösung gegeben durch $t \longmapsto \alpha\cos t + \beta\sin t$.
Sei $\overline{y} \equiv 0$. Wir wollen zeigen, dass hier ein stark lokales Minimum vorliegt. Sei dazu $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ zulässig, also $y(a) = y(b) = 0$. Die oben verwendete Schar lautet hier

$$\phi(t;\tau) = \begin{cases} y(\tau)\dfrac{\sin t}{\sin \tau} & ,\ \tau \in (0,b) \\ \overline{y}(t) & ,\ \tau = 0, b \end{cases}\,.$$

Wir erhalten hier

$$\sigma(\tau) = -y(\tau)^2 \cot\tau - \int_\tau^b (y'(\tau)^2 - y(\tau)^2)dt\,,\ \tau \in (0,b),$$

und damit

$$\sigma'(\xi) = (y(\xi)\cot\xi - y'(\xi))^2 \geq 0\ ,\xi \in (0,b)\,.$$

Bisher ist $\sigma(0)$ nicht definiert. Unter Anwendung der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{\tau\searrow 0} \frac{y(\tau)^2}{\sin\tau}\cos\tau = \lim_{\tau\searrow 0}\frac{2y(\tau)y'(\tau)}{\cos\tau} = 0\ ,\ \text{also}\ \sigma(0+) = \lim_{\tau\searrow 0}\sigma(\tau) = -I(y)\,,$$

und das oben skizzierte Vorgehen ist auch hier gerechtfertigt. Es folgt, dass in $\overline{y}$ ein stark lokales Minimum vorliegt. Ja sogar die Eindeutigkeit fällt mit ab, da $y'(\xi) = y(\xi)\cot\xi$ für alle $\xi \in (0,b)$ $y'(b) = y(b) = 0$ und daher $y \equiv \overline{y}$ impliziert. □

Definition 4.18
Sei $G \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ offen. Eine Familie $Z = \{(z(\cdot;\lambda), D_\lambda)|\lambda\in\Lambda\}$ wird ein **G überdeckendes Extremalenfeld** genannt, wenn gilt:

i) $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ offen; $D_\lambda \neq \emptyset, D_\lambda \subset \mathbb{R}$ offen für alle $\lambda \in \Lambda$;

ii) $z(\cdot;\lambda)$ ist Lösung der Eulerschen Differentialgleichung auf D_λ für alle $\lambda\in\Lambda$;

iii) $z(\cdot;\lambda) \in C^2(D_\lambda;\mathbb{R}^d)$, $z(\cdot;\lambda) \in C(\overline{D_\lambda};\mathbb{R}^d)$ für alle $\lambda \in \Lambda$;

iv) zu jedem $(\tau,u)\in G$ gibt es genau ein $\lambda = \lambda(\tau,u)\in\Lambda$ mit $\tau \in D_{\lambda(\tau,u)}$ und $z(\tau;\lambda(\tau,u)) = u$.

Wir sagen kurz: $Z = \{(z(\cdot;\lambda), D_\lambda)|\in\Lambda\}$ ist ein **Feld** (von Extremalen). Die Abbildung

$$\varphi_Z : G \ni (\tau,u)\ \longmapsto\ z'(\tau;\lambda(\tau,u)) \in \mathbb{R}^d$$

nennen wir die **Gefällefunktion des Feldes**. □

Da wir $z(\cdot;\lambda)\in C^2(D_\lambda;\mathbb{R}^d)$ gefordert haben, ist maximale Fortsetzung von lokalen Lösungen stets möglich, wenn etwa L zweimal stetig differenzierbar ist; benötigt werden die Lösungen später aber nur in einem Teilintervall, das $[a,b]$ umfasst.
Die in ii) der Definition geforderte Eindeutigkeit zieht offenbar die Stetigkeit der Abbildung $(\tau,u)\ \longmapsto\ \lambda(\tau,u)$ nach sich.

Definition 4.19

a) Ein Feld $Z = \{(z(\cdot;\lambda), D_\lambda)|\lambda\in\Lambda\}$ heisst ein **Zentralfeld** mit Zentrum t_0, wenn für alle $\lambda,\lambda'\in\Lambda$ gilt:
$$t_0 \in \overline{D_\lambda}\cap\overline{D_{\lambda'}}\,,\ z(t_0;\lambda) = z(t_0;\lambda')\,.$$

b) Sei $\overline{y}$ eine Extremale auf $[a,b]$. Wir sagen, dass $\overline{y}$ in das **Feld** $Z = \{(z(\cdot;\lambda), D_\lambda)|\lambda\in\Lambda\}$ **eingebettet** ist, wenn es $\epsilon > 0$ gibt, so dass das Feld Z eine Umgebung G' von
$$G_\epsilon := \left\{(t,u)\in[a,b]\times\mathbb{R}^d|\,|u-\overline{y}(t)|<\epsilon\right\}\quad(\epsilon>0)$$
überdeckt und für ein $\overline{\lambda}\in\Lambda$ gilt: $z(\cdot;\overline{\lambda}) = \overline{y}$ (siehe Abbildung 4.2).

□

Beispiel 4.20 Betrachte

$$L(t,y,y') := \sqrt{1+{y'}^2}\,.$$

Die Eulersche Differentialgleichung lautet hier $y''=0$. Offenbar ist

$$z(t;\lambda) := t+\lambda \ \ , (t,\lambda)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,,$$

ein Feld, das $G:=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ überdeckt. Die Gefällefunktion ist $\varphi(\tau,u):=1$.
Ein weiteres Feld ist gegeben durch

$$z(t,\lambda) := \lambda t\ , (t,\lambda)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,.$$

Es überdeckt $G:=\mathbb{R}\backslash\{0\}\times\mathbb{R}$. Es ist sogar ein Zentralfeld, denn wir haben $z(0;\lambda)=0$ für alle $\lambda\in\mathbb{R}$. Die zugehörige Gefällefunktion ist $\varphi(\tau,u):=\frac{u}{\tau}$. □

Beispiel 4.21 Betrachte

$$L(t,y,y') := y^{-1}\sqrt{1+y'^2}\,.$$

Die Eulersche Differentialgleichung lautet

$$y'(y''y+{y'}^2+1)=0\,.$$

Offenbar ist

$$z(t;\lambda) := \sqrt{\lambda^2-t^2}\ \ ,0<|t|<\lambda,\lambda>0,$$

ein Feld, das $G:=\{(\tau,u)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}|u>0\}$ überdeckt; siehe Abbildung 4.3. Die zugehörige Gefällefunktion ist $\varphi(\tau,u)=-\frac{\tau}{u}$.

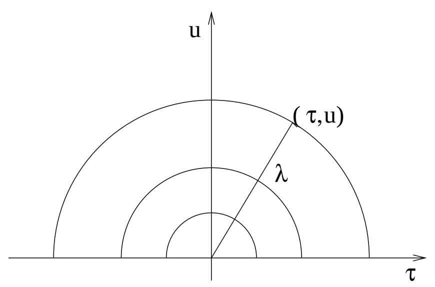

Abbildung 4.3: Ein Feld

Ein weiteres Feld wird definiert durch

$$z(t;\lambda) := \sqrt{\lambda^2-(t-\lambda)^2}\,,0<t<2\lambda,\lambda>0\,.$$

Es ist ein Zentralfeld, das (nur) $G:=\{(\tau,u)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}|\tau>0,u>0\}$ überdeckt; siehe Abbildung 4.4. Die Gefällefunktion ist $\varphi(\tau,u)=\dfrac{u^2-\tau^2}{2\tau u}$. □

Das Beispiel 4.21 legt eine Beziehung zur nichteuklidischen Geometrie offen, genauer der hyperbolischen Geometrie, wie sie in einem Modell von Poincaré vorgelegt wurde. Die Punkte dieser Geometrie sind

$$\mathbb{P} := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y>0\}\,,$$

Geraden sind die euklidischen Halbkreise in $\mathbb{P}$; als Grenzfall eines Halbkreises mit Radius $r=\infty$ werden die euklidischen Halbgeraden in $\mathbb{P}$ zu den Geraden hinzugenommen. Also ist die Geradenmenge $\mathbb{G}$ gegeben durch

$$\mathbb{G} := \{K_{r,z}|r>0,z\in\mathbb{R}\}\cup\{L_z|z\in\mathbb{R}\}$$

mit

$$K_{r,z} := \{(x,y)\in\mathbb{P}|(x-(z-r))^2+y^2=r^2\}\,,\ L_z := \{(x,y)|x=z,y>0\}\,.$$

Die Lösungen des Variationsproblems aus Beispiel 4.21 sind also die Geodätischen der hyperbolischen Geometrie. Man stellt nun fest, dass das Parallelenaxiom in dieser Geometrie folgende Form annimmt: Ist eine Gerade g gegeben und ist P ein Punkt nicht auf g, so gibt es unendlich viele Geraden, die g nicht schneiden und auf denen P liegt; dies ist leicht einzusehen.

Definition 4.22
Ein Feld $Z = \{(z(\cdot;\lambda), D_\lambda)|\lambda \in \Lambda\}$, das G überdeckt, heisst ein **Hilbert–Feld**, falls

$$\Psi_Z : G \ni (\tau, u) \longmapsto (H(\tau, u), P(\tau, u)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \tag{4.6}$$

ein Gradientenfeld ist; hierbei sind H, P mit der zugehörigen Gefällefunktion φ_Z so definiert:

$$H(\tau, u) := L(\tau, u, \varphi_Z(\tau, u)) - < L_{y'}(\tau, u, \varphi_Z(\tau, u)), \varphi_Z(\tau, u) > ,\ P(\tau, u) := L_{y'}(\tau, u, \varphi_Z(\tau, u)) .$$

□

Sei das oben definierte Feld Ψ_Z stetig differenzierbar. Dafür dass das Feld Ψ_Z ein Gradientenfeld ist, ist die sogenannte **Integrabilitätsbedingung**

$$P_\tau(\tau, u) = H_u(\tau, u) \text{ für alle } (\tau, u) \in G$$

notwendig. Umgekehrt, ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt und ist G einfach zusammenhängend – hinreichend dafür ist etwa die Sternförmigkeit von G – , dann liegt ein Gradientenfeld vor.[1]

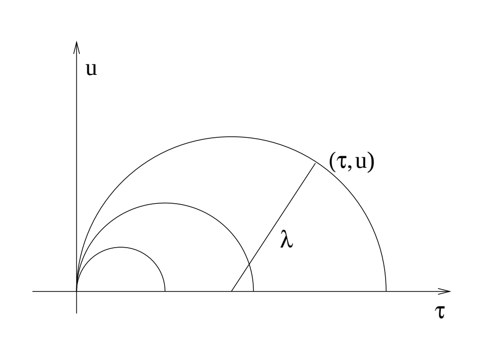

Abbildung 4.4: Ein weiteres Feld

Lemma 4.23 (Hilberts Invarianzsatz)
Sei $L \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ und sei $Z = \{(z(\cdot;\lambda), D_\lambda)|\lambda \in \Lambda\}$ ein G überdeckendes Hilbert–Feld mit Gefällefunktion φ_Z. Es gelte:

i) $\overline{y} \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^d)$; $(t, \overline{y}(t)) \in G, t \in [a, b]$; $\overline{y}(a) = y_a, \overline{y}(b) = y_b$; $\overline{y}'(t) = \varphi_Z(t, \overline{y}(t))$, $t \in (a, b)$.

ii) $y \in \hat{C}^1([a, b]; \mathbb{R}^d)$; $(t, y(t)) \in G, t \in [a, b]$; $y(a) = y_a, y(b) = y_b$.

Dann ist

$$I(y) - I(\overline{y}) = \int_a^b E(s, y(s), \varphi_Z(s, y(s)), y'(s))ds . \tag{4.7}$$

Beweis:
Sei Ψ_Z gemäß (4.6) definiert. Seien $\gamma, \overline{\gamma}$ die durch y bzw. $\overline{y}$ definierten Kurven in G

$$\gamma : [a, b] \ni t \longmapsto (t, y(t)) \in G\ ,\ \overline{\gamma} : [a, b] \ni t \longmapsto (t, \overline{y}(t)) \in G .$$

Dann sind die Kurvenintegrale für Ψ_Z entlang γ und $\overline{\gamma}$ identisch, da Ψ_Z ein Gradientenfeld ist. Es folgt die Behauptung so:

$$\begin{aligned} I(y) - I(\overline{y}) &= \int_a^b L(s, y(s), y'(s))ds - \int_a^b L(s, \overline{y}(s), \overline{y}'(s))ds \\ &= \int_a^b L(s, y, (s), y'(s))ds - \int_{\overline{\gamma}} \Psi_Z d\overline{\gamma} \quad (\text{ wegen } \overline{y}'(t) = \varphi_Z(t, \overline{y}(t)) \,) \end{aligned}$$

[1] Siehe Walter, W., Analysis II, Springer–Verlag, 1990

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b L(s,y,(s),y'(s))ds - \int_\gamma \Psi_Z d\gamma \\
&= \int_a^b L(s,y(s),y'(s))ds - \int_a^b H(s,y(s))ds - \int_a^b < P(s,y(s)),y'(s) > ds \\
&= \int_a^b L(s,y(s),y'(s))ds - \int_a^b L(s,y(s),\varphi_Z(s,y(s))ds \\
&\quad + \int_a^b < L_{y'}(s,y(s),\varphi_Z(s,y(s))),\varphi_Z(s,y(s)) > ds \\
&\quad - \int_a^b < L_{y'}(s,y(s),\varphi_Z(s,y(s))),y'(s) > ds \\
&= \int_a^b E(s,y(s),\varphi_Z(s,y(s)),y'(s))ds
\end{aligned}
$$

□

Satz 4.24
Sei $L \in C^2([a,b]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$. Sei die Extremale $\overline{y}$ in ein G überdeckendes Hilbert–Feld Z eingebettet. Es gelte mit der Gefällefunktion φ_Z die ***verschärfte Weierstrass–Bedingung***

$$E(\tau,u,\varphi_Z(\tau,u),\xi) \geq 0 \text{ für alle } (\tau,u)\in G \text{ und für alle } \xi\in\mathbb{R}^d. \tag{4.8}$$

Dann ist $\overline{y}$ stark lokales Minimum.

Beweis:
Beachte, dass dank der Eindeutigkeit von $\lambda(\tau,u)$ in iv) von Definition 4.18 die Voraussetzung i) aus Lemma 4.23 erfüllt ist. Offensichtlich gilt nun die Aussage nach Lemma 4.23. ■

Die Frage nach hinreichenden Bedingungen ist nun dahingehend verschoben, wann eine Extremale in ein Hilbert–Feld einbettbar ist. Da jedes Zentralfeld ein Hilbert–Feld ist (Beweis siehe unten), genügt es nach Einbettung in ein Zentralfeld zu suchen. Dabei begegnen nun wieder der verschärften Legendre– und verschärften Jakobi–Bedingung.

Lemma 4.25
Sei $L:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ viermal stetig partiell differenzierbar und sei $\overline{y}\in C^2([a,b];\mathbb{R}^d)$ eine Extremale. Es gelte:

a) $L_{y'y'}(t,\overline{y}(t),\overline{y}'(t)))$ ist positiv definit für alle $t\in[a,b]$.

b) $(a,b]$ enthält keine zu a konjugierten Punkte.

Dann ist $\overline{y}$ in ein Zentralfeld einbettbar.

Beweis:
Setze $\overline{y}$ auf $[t_0',t_1']$ fort, wobei $[a,b]\subset(t_0',t_1')$. Nun gibt es $\delta>0$, so dass wegen a) gilt:

$L_{y'y'}(t,u,v)$ ist positiv definit für alle (t,u,v) mit $t\in[t_0',t_1'], |u-\overline{y}(t)|<\delta, |v-\overline{y}'(t)|<\delta$.

Nun können wir die Eulersche Differentialgleichung in der Umgebung von $\overline{y}$ nach y'' auflösen; sie hat dann die Form

$$y'' = f(t, y, y')\,.$$

Wir wissen

$$\overline{y}''(t) = f(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))\ , t \in [t_0', t_1'] \,,\, \overline{y}(a) = y_a \ , \overline{y}(b) = y_b\,.$$

Zu $t_0 \in (t_0', a)$ betrachte die Anfangswertaufgabe

$$y'' = f(t, y, y')\,,\, y(t_0) = \overline{y}(t_0)\,,\, y'(t_0) = \lambda + \overline{y}'(t_0) \tag{4.9}$$

wobei zunächst $\lambda \in \mathbb{R}^d$ beliebig sei. Da $\overline{y}$ eine Lösung dieser Anfangswertaufgabe für $\lambda = \theta$ in (t_0', t_1') ist, gibt es $r > 0, t_1 \in (b, t_1')$, so dass die Lösung $z(\cdot; \lambda)$ von (4.9) auf $[t_0, t_1]$ wohldefiniert ist für $|\lambda| < r$. Offenbar ist $z(\cdot; \theta) = \overline{y}$ und o.E. können wir noch annehmen

$$L_{y'y'}(t, z(t; \lambda), z'(t; \lambda)) \text{ positiv definit für alle } t \in [t_0, t_1] \text{ und } \lambda \text{ mit } |\lambda| < r\,,$$

und (siehe Beweis zu Satz 2.34)

$$(t_0, b] \text{ enthält keine zu } a \text{ konjugierte Punkte.}$$

Dann sind aber $z(\cdot; \lambda)$ Lösungen der Eulerschen Differentialgleichung. Setze

$$\Phi(t) := \frac{\partial z}{\partial \lambda}(t; \cdot)\big|_{\lambda=\theta}\,,\, t \in [t_0, t_1].$$

Die Ableitung existiert, da die Lösungen differenzierbar vom Parameter λ abhängen.[2] Es gilt sogar, dass Φ wieder Lösung einer Differentialgleichung ist, nämlich derjenigen, die man durch formales Differenzieren der Eulerschen Differentialgleichung erhält. Also löst Φ

$$\frac{d}{dt}(L_{y'y}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))\Phi + L_{y'y'}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))\Phi') - L_{yy}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))\Phi - L_{yy'}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t))\Phi' = 0\,,$$
$$\Phi(t_0) = \theta, \Phi'(t_0) = I\,.$$

Da in $(t_0, b]$ keine zu a konjugierten Punkte liegen, gilt $\det \Phi(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. O.E. $\det \Phi(t) \neq 0$ für alle $t \in (t_0, t_1)$. Sei

$$G_\epsilon := \{(t, u) \in (t_0, t_1) \times \mathbb{R}^d | \, |u - \overline{y}(t)| < \epsilon\}\,.$$

Der Satz über implizite Funktionen ist nun anwendbar. Es gibt daher $\overline{\epsilon} > 0$, so dass mit $G := G_{\overline{\epsilon}}$ gilt: Die Gleichung

$$z(\tau; \lambda) = u$$

hat für $(\tau, u) \in G$ genau eine Lösung $\lambda = \lambda(\tau, u)$ mit $|\lambda| < r$ und die Abbildung

$$G \ni (\tau, u) \ \longmapsto\ \lambda(\tau, u) \in \mathbb{R}^d$$

ist stetig differenzierbar. Also ist

$$Z = \{(z(\cdot; \lambda), D_\lambda) | \, |\lambda| < r\} \ \ (t_0, t_1) \subset D_\lambda)$$

ein Zentralfeld (Zentrum t_0), das G überdeckt und in das $\overline{y}$ eingebettet ist. ∎

[2] Siehe etwa Walter W., Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer–Verlag

Lemma 4.26
Sei $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ viermal stetig partiell differenzierbar. Sei $Z = \{(z(\cdot;\lambda), D_\lambda) | \lambda \in \Lambda\}$ ein Zentralfeld, das G überdeckt und sei t_0 das Zentrum von Z. Setze

$$S(\tau, u) := \int_{t_0}^{\tau} L(s, z(s;\lambda(\tau,u)), z'(s;\lambda(\tau,u)))ds\,,\ (\tau,u) \in G\,,$$

und setze voraus, dass $S(\tau,u) < \infty$ für alle $(\tau,u) \in G$. Dann gilt:

a) $S \in C^1(G;\mathbb{R})$.

b) $\frac{\partial S}{\partial \tau}(\tau,u) = H(\tau,u), \frac{\partial S}{\partial u}(\tau,u) = P(\tau,u), (\tau,u) \in G$.

c) $G \ni (\tau,u) \longmapsto (H(\tau,u), P(\tau,u)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *ist ein Gradientenfeld.*

Beweis:
Seien $(\tau,u), (\tau+\Delta\tau, u+\Delta u) \in G$; o.E. $\Delta\tau > 0$.[3]

$S(\tau+\Delta\tau, u+\Delta u) - S(\tau,u)$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^{\tau+\Delta\tau} L(s, z(s;\lambda(\tau+\Delta\tau,u+\Delta u)), z'(s;\lambda(\tau+\Delta\tau,u+\Delta u)))ds \\
&\quad - \int_{t_0}^{\tau} L(s, z(s;\lambda(\tau,u)), z'(s;\lambda(\tau,u)))ds \\
&= \int_{t_0}^{\tau} < L_y(s, z(s;\lambda(\tau,u), z'(s;\lambda(\tau,u))), z(s;\lambda(\tau+\Delta\tau,u+\Delta u)) - z(s;\lambda(\tau,u)) > ds \\
&\quad + \int_{t_0}^{\tau} < L_{y'}(s, z(s;\lambda(\tau,u), z'(s;\lambda(\tau,u))), z'(s;\lambda(\tau+\Delta\tau,u+\Delta u)) - z'(s;\lambda(\tau,u)) > ds \\
&\quad + \Delta\tau\, L(\tau, z(\tau;\lambda,u), z'(\tau;\lambda(\tau,u))) + o(|\Delta\tau|) + o(|\Delta u|) \\
&= \int_{t_0}^{\tau} < -\frac{d}{ds} L_{y'}(s, z(s;\lambda(\tau,u)), z'(s;\lambda(\tau,u))), z(s;\lambda(\tau+\Delta\tau,u+\Delta u)) - z(s;\lambda(\tau,u)) > ds \\
&\quad + \int_{t_0}^{\tau} < L_y(s, z(s;\lambda(\tau,u)), z'(s;\lambda(\tau,u))), z(s;\lambda(\tau+\Delta\tau,u+\Delta u)) - z(s;\lambda(\tau,u)) > ds \\
&\quad - < L_{y'}(s, z(s;\lambda(\tau,u)), z'(s;\lambda(\tau,u))), z(s;\lambda(\tau+\Delta\tau,u+\Delta u)) - z(s;\lambda(\tau,u)) > \Big|_{s=t_0}^{s=\tau} \\
&\quad + \Delta\tau\, L(\tau, z(\tau;\lambda(\tau,u)), z'(\tau;\lambda(\tau,u))) + o(|\Delta\tau|) + o(|\Delta u|) \\
&= H(\tau,u)\Delta\tau + < P(\tau,u), \Delta u > + o(|\Delta\tau|) + o(|\Delta u|)
\end{aligned}$$

wegen

$$z(\tau;\lambda(\tau+\Delta\tau,u+\Delta u)) - z(\tau,\lambda(\tau,u)) = \Delta u + z'(\tau,\lambda(\tau,u))\Delta\tau + o(|\Delta\tau|) + o(|\Delta u|)\,.$$

[3] Wir verwenden das Landausymbol $o(q)$. Es bedeutet: $a(q) = o(q)$ genau dann, wenn $\lim_{q\to 0} \frac{a(q)}{q} = 0$ gilt.

Daraus liest man nun alle Behauptungen ab. □

Die Voraussetzung über die Endlichkeit von S ist nötig, denn wir haben ja nur $z(\cdot;\lambda) \in C^2(D_\lambda;\mathbb{R}^d) \cap C(\overline{D_\lambda};\mathbb{R}^d)$ vorausgesetzt haben. Beim Problem der Bachistochrone ist diese Voraussetzung wesentlich.

Satz 4.27
Sei $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ viermal stetig partiell differenzierbar und sei $\overline{y} \in C^2([a,b];\mathbb{R}^d)$ eine zulässige Extremale. Es gelte mit $\epsilon > 0$:

a) $L_{y'y'}(\tau,u,\xi)$ ist positiv definit für alle (τ,u,ξ) mit $\tau \in [a,b]$, $|v-\overline{y}(\tau)| < \epsilon$, $|\xi - \overline{y}'(\tau)| < \epsilon$.

b) $[a,b]$ enthält keine zu a konjugierten Punkte.

Dann ist $\overline{y}$ stark lokales Minimum.

Beweis:
Es ist wegen Satz 4.24 nur zu verifizieren, dass die Bedingung a) die verschärfte Weierstraß–Bedingung impliziert. Dies ist aber mit der Taylorentwicklung sofort einzusehen. ■

Beachte, dass wir am Ende von Kapitel 2 bereits eine hinreichende Bedingung für schwach lokale Minima hergeleitet haben; siehe Satz 2.39.

4.5 Zum Problem der Brachistochrone

Hier ist – in einer etwas spezialisierten Form – das „Funktional“

$$\int_0^b L(t,y(t),y'(t))dt \quad \text{mit} \quad L(t,y,p) := \sqrt{\frac{1+p^2}{2gy}}$$

bezüglich der zur Konkurrenz zugelassenen Kurven $[0,b] \ni t \longmapsto (t,y(t)) \in \mathbb{R}^2$ mit den Nebenbedingungen $y(0) = y_a, y(b) = y_b > 0$ zu minimieren; siehe Abbildung 1.4. Wir haben insbesondere den Fall $y(0) = 0$ im Auge. Dann ist der Nenner im Funktional sicher ein Problem. Dazu benötigen wir als Forderung an die zulässigen Kurven $t \longmapsto (t,y(t))$:

$$y \in U_{ad}^{eff} := \{v \in C^1[0,b] | 0 \le v(t) \text{ für alle } t \in [0,b], v(0) = 0, v(b) = y_b, \int_0^b v(t)^{-\frac{1}{2}} dt < \infty\}.$$

Aus der Eulerschen Differentialgleichung ergibt sich als notwendige Bedingung für eine Lösung:

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = c \ \ (c \text{ Konstante}),$$

was bekanntlich auf die Darstellung der Lösung als Zykloide führt. Aber $y'(0) = \infty$! Man kann dies so interpretieren, dass in $t = 0$ eine besondere Art einer Ecke vorhanden ist. Aber gibt es sonst noch Ecken? Die Eckenbedingungen (siehe (4.4)) lauten hier:

$$\frac{p_1}{\sqrt{y(1+p_1^2)}} = \frac{p_2}{\sqrt{y(1+p_2^2)}}, \quad \frac{1}{\sqrt{y(1+p_1^2)}} = \frac{1}{\sqrt{y(1+p_2^2)}}.$$

Daraus liest man ab, dass es in $(0,b)$ keine (weiteren) Ecken geben kann. Da sogar $L_{y'y'}$ positiv ist, ist eine Extremale sicher in $C^2(0,b]$. Bleibt das Problem, wie die Singularität bei $t=0$ zu behandeln ist.

Sei $G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$. Um ein Feld Z zu finden, das G überdeckt, müssen wir, da wir schon wissen, dass Zykloiden die Extremalen sind, G mit Zykloiden überdecken. Dies haben wir aber schon konstruktiv erledigt; siehe Abbildung 1.5. Analytisch bedeutet dies, die Schar

$$t(\varphi) = \lambda(\varphi - \sin\varphi)\,,\; y(\varphi) = \lambda(1-\cos\varphi)\,,\; 0 \le \varphi \le \varphi_1 \;\; (c, \varphi_1 \text{ Konstanten})\,,\; \lambda > 0$$

zu betrachten. Da $t'(\varphi) = \lambda(1-\cos\varphi) > 0$ für $\varphi \in (0,\varphi_1)$ gilt, können wir nach φ auflösen und die so resultierende Darstellung der Lösung $t \longmapsto y(t)$ führt zu der Schar

$$z(\cdot;\lambda)\,,\; \lambda > 0\,.$$

Klar, das Zentrum liegt in $t_0 := 0$. Die Gefällefunktion stellt sich als

$$\varphi_Z(\tau,u) = z'(\tau;\lambda(\tau,u)) = \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}(\cdots) = \frac{\lambda\sin\varphi}{\lambda(1-\cos\varphi)} = \cot\frac{\vartheta(\tau,u)}{2}\,,$$

wobei $\vartheta(\tau,u)$ sich aus dem Gleichungssystem

$$\tau = \lambda(\vartheta - \sin\vartheta)\,,\; u = \lambda(1-\cos\vartheta)$$

ergibt. Damit wissen wir auch schon, dass das Feld ein Gradientenfeld ist.

Als Problem taucht nun auf, dass eine Extremale $\overline{y}$ auf $[0,b]$ nicht in das Feld eingebettet ist. Der Ausweg ist, zunächst auf ein Problem mit Intervall $[a,b]$ mit $0 < a < b$ und Anfangswert $y(a) = \overline{y}(a) > 0$ auszuweichen. Klar $\overline{y}_a := \overline{y}|_{[a,b]}$ ist eine Extremale im Intervall $[a,b]$ und da $\overline{y}_a$ in ein Hilbertfeld eingebettet ist, ist $\overline{y}_a$ sogar eine Lösung des Problems in $[a,b]$ mit Anfangswert $y(a) = \overline{y}(a)$. Sei $y \in U_{ad}[0,b]$; o.E. $y(a) \ge \overline{y}(a)$. Seien

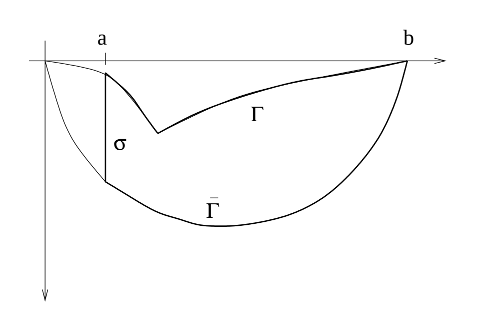

Abbildung 4.5: Hilbertinvarianz

$$\begin{aligned} \Gamma &: [0,b] \ni t \longmapsto (t, y(t)) \in \mathbb{R}^2\,, \\ \overline{\Gamma} &: [0,b] \ni t \longmapsto (t, \overline{y}(t)) \in \mathbb{R}^2 \\ \sigma_a &: [y(a), \overline{y}(a)] \ni t \longmapsto (a,t) \in \mathbb{R}^2\,. \end{aligned}$$

Mit der Einschränkung I_a des Integralfunktional I auf das Intervall $[a,b]$ erhalten wir wie in Abschnitt 4.4

$$I_(y) - I_a(\overline{y}) - I_a(\sigma_a) = \int_a^b E(t, y(t), \varphi_Z(t, y(t)), y'(t))dt\,,$$

wobei E die Weierstrassche Exzessfunktion ist. Da $E(t,y,p,u) > 0$ gilt – dies folgt aus der Tatsache, dass $L(t,y,\cdot)$ strikt konvex ist, oder durch direktes Nachrechnen – , folgt

$$I_a(y) \ge I_a(\overline{y}) + I_a(\sigma_a)\,.$$

Nun haben wir

$$|I_a(\sigma_a)| = |\int_{y(a)}^{\overline{y}(a)} \frac{\varphi_Z(a;y)dy}{\sqrt{y(1+\varphi_Z(a;y)^2)}}| \leq \int_{y(a)}^{\overline{y}(a)} \frac{dy}{\sqrt{y}} \leq 2|\sqrt{\overline{y}(a)} - \sqrt{y(a)}| \tag{4.10}$$

und lesen ab: $\lim_{a\to 0} I_a(\sigma_a) = 0$. Dies bedeutet nun, dass die Zykloide, beschrieben durch $\overline{y}$ in der Tat die Lösung des Problems ist.

4.6 Zum Newtonschen Widerstandsproblem

Wir haben hier

$$\begin{aligned} L(t,y,p) &= \frac{yp^3}{1+p^2}, & L_y(t,y,p) &= \frac{p^3}{1+p^2}, \\ L_{y'}(t,y,p) &= \frac{yp^2(3+p^2)}{(1+p^2)^2}, & L_{y'y'}(t,y,p) &= \frac{2yp(3-p^2)}{(1+p^2)^3}. \end{aligned}$$

Wir haben in Abschnitt 1.6 gesehen, dass ein Kegelstumpf einen kleineren Widerstand als ein Kegel und eine Halbkugel abgibt. Wir modifizieren also von vorneherein das Funktional, dass zu minimieren ist, indem wir den Anfangswert $y(0)$ nicht vorgegeben und den Widerstandsterm $y(0)^2$ hinzufügen; beachte, dass wir Konstanten normiert haben. Also wollen wir

$$\frac{1}{2}y(0)^2 + \int_0^b \frac{y(t)y'(t)^3}{\sqrt{1+y'(t)^2}}dt$$

unter den Nebenbedingungen $y \in \hat{C}^1[0,b]$, $y(b) = y_b$, minimieren. Berücksichtigt werden sollen auch die Nebenbedingungen $y' \geq 0$.

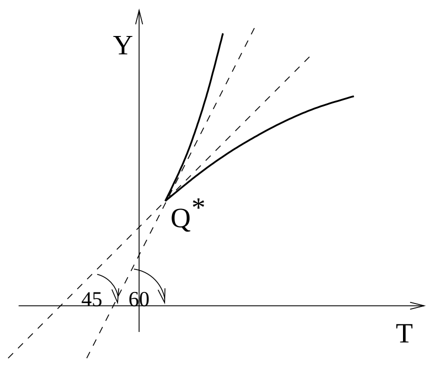

Abbildung 4.6: Ein Feldszenario

Sei $\overline{y} \in \hat{C}^1[0,b]$ ein lokales schwaches Minimum bezüglich des obigen Widerstandsfunktionals. Auf gewohntem Wege leiten wir notwendige Bedingungen ab. Da der Anfangswert nicht vorgegeben ist, erhalten wir am linken Rand „$t = 0$" die natürliche Randbedingung

$$\overline{y}(0) - L_{y'}(0,\overline{y}(0),\overline{y}'(0)) = 0 \text{ , d.h. } \overline{y}(0)\big(1 - \frac{\overline{y}'(0)^2(3+\overline{y}'(0)^2)}{(1+\overline{y}'(0)^2)^2}\big) = 0\,. \tag{4.11}$$

Daraus liest man ab:

$$\overline{y}(0) = 0 \text{ oder } \overline{y}'(0) = 1\,. \tag{4.12}$$

Kann es Ecken geben? Jedenfalls dort nicht, wo ein Wert $\overline{y}(t) \neq 0$ vorliegt, denn die Eckenbedingungen lauten hier

$$\frac{yp_1^2(3+p_1^2)}{(1+p_1^2)^2} = \frac{yp_2^2(3+p_2^2)}{(1+p_2^2)^2}, -\frac{2yp_1^3}{(1+p_1^2)^2} = -\frac{2yp_2^3}{(1+p_2^2)^2}.$$

Da L nicht explizit von der Zeit abhängt, sind die Extremalen Lösungen von

$$\frac{yy'^3}{(1+y'^2)^2} = \alpha \ \ (\alpha \text{ Konstante})\,. \tag{4.13}$$

Die unterschiedlichen Typen von Extremalen werden dann erzeugt durch die Fälle $\alpha = 0$ und $\alpha \neq 0$. Ist $\alpha = 0$, dann ist $y = 0$ oder $y' = 0$ und man sieht nun, dass dies dann bedeutet, dass die optimale Extremale ein Stück mit $\alpha = 0$ nicht enthalten kann: Eine konstante Extremale in einem Intervall $[0, t_1]$ ist nicht vorhanden, da dann die Diskussion für $t_0 := t_1$ wieder aufzunehmen ist; eingebettet in eine Extremalen mit $\alpha \neq 0$ kann nicht zutreffen, da es keine Ecken gibt. Dies bedeutet nun, dass der Kandidat $\overline{y}$ aus Extremalen mit $\alpha \neq 0$ sich zusammensetzt. Wir wissen damit auch aus (4.12), dass $\overline{y}$ sich aus Lösung von

$$\frac{yy'^3}{(1+y'^2)^2} = \alpha \ \ (\alpha \neq 0 \text{ Konstante})\,,\ y(0) \neq 0\,,\ y(b) = y_b \tag{4.14}$$

zusammengesetzt ist. Da es keine Ecken gibt, ist eine optimale Extremale Lösung von (4.14) (zu einem festem α). Eine solche Extremale lässt sich nun zumindest numerisch berechnen (vorausgesetzt, es liegt Eindeutigkeit vor), denn wir haben nun eine Randwertaufgabe für $\overline{y}$ gefunden. Damit finden wir auch $\overline{y}(0)$.

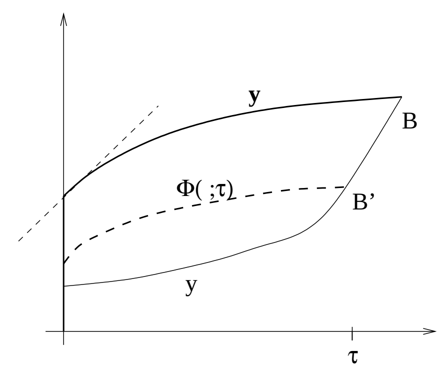

Abbildung 4.7: Ein Feld

Als notwendige Bedingung (zweiter Ordnung) wissen wir noch $L_{y'y'}(t, \overline{y}(t), \overline{y}'(t)) \geq 0$ für alle $t \in [0, b]$. Dies bedeutet

$$0 \leq \overline{y}'(t) \leq \sqrt{3}\,,\ t \in [0, b]\,. \tag{4.15}$$

Beachte, dass die Weierstraßsche Exzess–Funktion nichtnegativ ist unter der der Bedingung (4.15).

Betrachte nun die Schar der Lösungen von (4.13) ($\alpha > 0$!). Führen wir dazu den Parameter q durch den Steigungswinkel ψ einer Trajektorie durch

$$q := \cot\ \psi = \frac{1}{y'}$$

ein. Dann ergibt sich aus (4.13), die Identität

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dq}{dt}$$

heuristisch nutzend, die folgende Darstellung dieser Schar:

$$y(q; \alpha, \beta) = \frac{\alpha(1+q^2)^2}{q}\,,\ t(q; \alpha, \beta) = \alpha(q^2 + \frac{3}{4}q^4 - \ln q) + \beta\,,\ q \in (0, \infty)\,;\ \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}\,. \tag{4.16}$$

Diese Schar – wir beschreiben sie als $z(\cdot; \alpha, \beta)$, $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$, – geht durch Streckung und Verschiebung aus der einen Extremalen

$$Y(q) := y(q; 1, 0) = \frac{(1+q^2)^2}{q}\,,\ T(q) := t(q; 1, 0) = (q^2 + \frac{3}{4}q^4 - \ln q)\,,\ q \in (0, \infty)\,, \tag{4.17}$$

hervor. Damit findet man auch die Begründung dafür dass eine Extremale zu verschiedenen Parametern α, α' nicht aneinandergefügt werden, kann da ja keine Ecken existieren. Wir haben nun

$$\lim_{q\to\infty} \frac{Y(q)}{T(q)} = 0\,,\ \lim_{q\to 0} \frac{Y(q)}{T(q)} = \infty\,.$$

Betrachte die Kurve

$$(0,\infty) \ni q \longmapsto (T(q), Y(q)) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Wegen $Y'(q^*) = 0$ für $q^* = \frac{1}{\sqrt{3}}$ haben wir in $Q^* := (T(q^*), Y(q^*))$ eine „Spitze“; der Schnittwinkel dort ist $\frac{\pi}{6}$, wie man leicht nachrechnet.

Nun ist die Frage zu klären, ob eine Lösung der Randwertaufgabe (4.14) eine Lösung der Aufgabe ist. Da die obige Schar $z(\cdot;\alpha,\beta)$ ein Feld in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$ ist, ist der Weg dies zu verifizieren, angelegt. Dies erledigt man nun so, wie wir die Methode von Weierstraß zu Beginn des Abschnitts vorgestellt haben. In der Abbildung 4.7 haben wir nochmal den Integrationsweg skizziert, wie wir das Widerstandsintegral von $\overline{y}$ mit dem Widerstandsintegral von einer zulässigen Trajektorie y vergleichen können.

4.7 Übungen

1.) Sei $L : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei das Integralfunktional $I(y)$ definiert durch

$$I(y) := \int_a^b L(t, y(t), y'(t))dt\,,\ y \in \hat{C}^1[a,b]\,.$$

Zeige: $I : \hat{C}^1[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, wenn in $\hat{C}^1[a,b]$ die Norm $\|\cdot\|_{1,\infty}$ Verwendung findet.

2.) Zeige, dass für die folgenden Funktionen L das Variationsproblem $\hat{P}_L$ nur Lösungen in $C^1[a,b]$ besitzten kann:

(a) $L(t,y,y') := \sqrt{1+y'^2}\,;$

(b) $L(t,y,y') := \sqrt{y^2+y'^2}\,;$

(c) $L(t,y,y') := e^t(1+y^2+y'^2)\,;$

(d) $L(t,y,y') := 4y'^2 + 2yy' - y^2 + t\,.$

(e) $L(t,y,y') := y'^2 + y'^3\,.$

3.) Finde alle Kandidaten für Ecken bei dem Variationsproblem $\hat{P}_L$ für folgende Funktionen L :

(a) $L(t,y,y') := t\sqrt{1+y'^2}\,;$

(b) $L(t,y,y') := (y'-1)^2(y'+1)^2\,;$

(c) $L(t,y,y') := y^2(1+y'^2)\,.$

4.) Finde lokale schwache Minima beim Variationsproblem $\hat{P}_L$ für folgende Funktionen L und die angeführten Randbedingungen:

(a) $L(t,y,y') := (y'^2-1)^2\,,\ y(-1) = y(1) = 0\,;$

(b) $L(t,y,y') := y'^4 - 8y'^2\,,\ y(0) = 0, y(3) = 0\,.$

5.) Gegeben ist eine Slalomstrecke:

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, \sin 2\pi x \leq y \leq \frac{1}{2} + \sin 2\pi x\}.$$

Man bestimme die kürzeste Verbindung von $A = (0, 0)$ nach $B = (1, 0)$ auf S und zeige, dass die Extremale stetig differenzierbar ist. Ferner gebe man Bedingungsgleichungen für die auftretenden Sprungstellen an.

6.) Betrachte $L(t, y, y') := y'^2$. Berechne die Extremalen und zeige, dass jede Extremale eine Lösung (starkes Minimum) des zugehörigen Variationsproblems mit geeigneten Randbedingungen ist.

7.) Löse das Variationsproblem P_L mit $L(t, y, y') := y^2 - y'^2$ und $y(0) = 0, y(b) = 1$.

8.) Betrachte das Variationsproblem P_L mit $L(t, y, y') := y'^3$. Zeige, dass das Problem ein schwach lokales Minimum, aber kein stark lokales Minimum besitzt.

9.) Betrachte

$$\begin{cases} \text{Minimiere } \int\limits_0^1 \frac{y(t)}{y'(t)^2} dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } y(0) = 1, y(1) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

a) Zeige: $y_1(t) := (\frac{1}{2}t - 1)^2$ und $y_2(t) = (\frac{3}{2}t - 1)^2$ sind zulässige Extremalen.

b) Zeige: Die Schar $z(t; \lambda) := (\lambda t - 1)^2, \lambda \in \mathbb{R}$, läßt sich als Zentralfeld auffassen. Welches Gebiet G wird überdeckt? Welche der Extremalen y_1, y_2 ist einbettbar ?

10.) Betrachte

$$\begin{cases} \text{Minimiere } \int\limits_0^b y(t)\sqrt{1 + y'(t)^2} dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } y(0) = 1, y(1) = y_0, y(b) = y_b. \end{cases}$$

Zeige: Die Schar

$$z(t; d) := d \cos h(d^{-1}(t - t_0))$$

läßt sich als ein Zentralfeld auffassen.

11.) Zeige: Die Funktion $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \ni (x, y) \longmapsto \sqrt{x(1 + y^2)} \in \mathbb{R}$ ist strikt konvex, d.h. die Hessematrix ist positiv definit.

12.) Betrachte $L(t, y, y') := \sqrt{y(1 + y'^2}$, $t \in [0, 1], y, y' \in \mathbb{R}$.

a) Welcher Gleichung genügen die Extremalen ?

b) Sei $G := \{(t, v) \in \mathbb{R}^2 | t >, v > \frac{t^2}{4}\}$. Gib ein Zentralfeld an, das G überdeckt.

13.) Betrachte $L(t, y, y') := t^2 y'^2, t \in \mathbb{R}, y, y' \in \mathbb{R}$.

a) Finde ein Feld, das $G := \{(\tau, u) | \tau > 0, u > 0\}$ überdeckt, und berechne die zugehörige Gefällefunktion.

b) Zeige, dass ein Gradientenfeld vorliegt.

14.) Betrachte $L(t, y, y') := f(t, y)\sqrt{1 + y'^2}$, $t \in [a, b], y, y' \in \mathbb{R}$ mit einer glatten Funktion f. Finde ein Feld und berechne die zugehörige Gefällefunktion.

15.) Betrachte

$$\begin{cases} \text{Minimiere } \int\limits_b^a y'(t)^2 dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } y(a) = y_a, y(b) = y_b. \end{cases}$$

a) Zeige: Die Extremale $\overline{y}(t) := y_a + \frac{y_b - y_a}{b - a}(t - a), t \in [a, b]$, ist in ein Hilbert–Feld einbettbar. Ist $\overline{y}$ eine Lösung der Aufgabe ?

b) Kann es Ecken geben ?

16.) Man zeige, dass $\overline{y}(t) := \frac{1}{3}e^{2t}, t \in [0, 1]$, ein starkes Minimum liefert für

$$\begin{cases} \text{Minimiere } \int\limits_0^1 (y'(t)^2 + y(t)^2 + 2y(t)e^{2t}) dt \\ \text{unter den Nebenbedingungen } y(0) = \frac{1}{3}, y(1) = \frac{1}{3}e^2. \end{cases}.$$

Kapitel 5

Existenzfragen

Die nun zu diskutierende Frage nach der Existenz von Lösungen bei Variationsaufgaben, wird traditionsgemäß zusammengefasst unter **direkten Methoden** der Variationsrechnung. Hier spielen nun funktionalanalytische Hilfsmittel und insbesondere die Konvexität eine wesentliche Rolle; Eindeutigkeit lässt sich damit auch erklären. In diesem Kontext wird dann auch die Ableitung der Eulerschen Differentialgleichung eine wohleingeordnete Aufgabenstellung. Die funktionalanalytischen Hilfsmittel stellen wir in einem Anhang zusammen.[1]

5.1 Aufgabenstellung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene, beschränkte, nichtleere Menge. Später wird die topologische/geometrische Qualität des Randes $\partial\Omega$ von Ω eine nicht unwesentliche Rolle spielen. Dabei sind dann Voraussetzungen über $\partial\Omega$ anzuführen.

Wir wollen das Problem

$$P_L \begin{cases} \text{Minimiere } J(u) := \int\limits_a^b L(x, u(x), Du(x))dx \\ \text{unter den Nebenbedingungen } u \in U_{ad} \end{cases}$$

betrachten. Dabei ist

$$L : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{d,m} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ Du(x) := \big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\big)_{1\le i\le m, 1\le j\le d}\,,\ U_{ad} := \{u \in Y\,|\,u|_{\partial\Omega} = u_0\}\,.$$

U_{ad} ist die Menge der zulässigen Funktionen auf Ω, wobei u_0 das Randverhalten einer zulässigen Funktion u beschreibt.

Hier muss die Wahl von Y noch offen bleiben. Jedenfalls ist nun die Wahl von

$$Y = \hat{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^m) \text{ oder } Y = C^1(\Omega; \mathbb{R}^m) \text{ oder } Y = C^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$$

nicht passend, um zu Existenzsätzen zu kommen. Diese Klarheit ist im wesentlichen Weierstraß zu verdanken, der dies erkannt hat und daraus dann den Begriff der Kompaktheit im unendlichdimensionalen Raum geklärt hat.

[1] Wir halten uns eng an [Da].

Beispiel 5.1
$d = m = 1$ und $L(x,u,p) := \sqrt{\dfrac{1+|p|^2}{2gu}}$.
Dies ist das von uns schon hinlänglich betrachtete Problem der Brachistochrone.

$d > 1, m = 1$ und $L(x,u,p) := |p|^2$.
Wie wir unten sehen werden, führt dieses Variationsproblem auf das Dirichletproblem.

$d > 1, m = 1$ und $L(x,u,p) := \sqrt{1+|p|^2}$.
Das zugehörige Variationsproblem wird als Minimalflächenproblem (siehe 1.5) bezeichnet.

$d = m > 1$ und $L(x,u,p) := g(\det(p))$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Dieses Problem taucht in der Elastizitätstheorie auf. □

Als Fragen im Zusammenhang mit P_L stehen an:

- Existenz einer Lösung in einem passenden Raum $Y := Y^{\text{Existenz}}$.
- Eindeutigkeit einer Lösung in einem passenden Raum $Y := Y^{\text{Eindeutigkeit}}$.
- Regularität einer Lösung („Ecken“ , ...).
- Gültigkeit der Eulerschen Gleichung in einem Raum $Y := Y^{\text{Euler}}$.

Es liegt auf der Hand, dass wir einen Raum Y finden wollen, der eine positive Antwort auf möglichst alle obigen Fragen simultan gestattet.

Ein Existenzsatz basiert grundsätzlich aus drei Beobachtungen/Schritten:

1. Man kann sich ohne Mühe eine **Minimalfolge** $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ verschaffen: $\lim_n J(y^n) = \inf_n J(y^n)$.
2. Man bemühe sich um die Konvergenz einer Teilfolge $(y^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$; $\overline{y}$ sei der Grenzwert dieser Teilfolge (**Kompaktheitsargument**).
3. Es lässt sich $J(\overline{y}) \le \liminf_k J(y^{n_k})$ nachweisen (**Stetigkeitssargument**).

Im Abschnitt 5.2 wird deutlich werden, wie die obigen Argumente zum Nachweis von Existenz zusammengesetzt werden können. Hier verkleiden wir die Argumentierung etwas.

Satz 5.2
Sei X ein topologischer Raum, $X \ne \emptyset$, und sei $I : X \longrightarrow (-\infty,\infty]$, $I \not\equiv \infty$. Es gelte:

$$N_r(I) := \{x \in X | I(x) \le r\} \text{ ist kompakt für alle } r \in \mathbb{R}\,. \tag{5.1}$$

Dann ist I nach unten beschränkt und es existiert $\overline{x} \in X$ mit

$$I(\overline{x}) = \inf_{x\in X} I(x)\,.$$

Beweis:
Sei $I^* := \inf_{x\in X} I(x) < \infty$. Wähle eine Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$r_n > r_{n+1} > I^*\,,\; n \in \mathbb{N}\,, \lim_n r_n = I^*\,.$$

Kein Zweifel, eine solche Wahl ist möglich. Setze $N_n := N_{r_n}(I)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\emptyset \neq N_n \supset N_{n+1} \text{ und } N_n \text{ kompakt für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Dann ist aber nach dem Cantorschen Durchschnittssatz $N := \bigcap N_n \neq \emptyset$. Wähle $\overline{x} \in N$. Dann ist $\overline{x} \in N_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher $I(\overline{x}) \leq r_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies zeigt $I(\overline{x}) \leq I^*$, d.h. $I(\overline{x}) = I^*$. Klar, $I^* = I(\overline{x})$ ist eine untere Schranke. ■

Die Voraussetzung (5.1) kann ersetzt werden durch

$$N_r(I) \text{ abgeschlossen für alle } r \in \mathbb{R}\,;\ N_{r^*}(I) \text{ ist kompakt und nichtleer für ein } r^* \in \mathbb{R}\,. \tag{5.2}$$

Klar, $I^* = \inf_{x\in X} I(x) = \inf_{x\in\widetilde{X}} I(x)$ mit $\widetilde{X} := N_{r^*}(I)$. Nun ist $\widetilde{X}$ selbst wieder ein topologischer Raum und die Niveaumengen $\widetilde{N}_r$ von $\widetilde{I} := I|_{\widetilde{X}}$ sind kompakt für alle $r \in \mathbb{R}$, da $N_r(I)$ abgeschlossen ist für alle $r \in \mathbb{R}$.
Die beiden Bedingungen in (5.2) sind widerstreitend. Die Bedingung $X\backslash N_r(I)$ offen für alle $r \in \mathbb{R}$ verlangt nach einer feinen Topologie, also nach einer Topologie auf X, die viele offene Mengen besitzt. Die Bedingung $N_{r^*}(I)$ ist kompakt für ein $r^* \in \mathbb{R}$ verlangt nach einer groben Topologie, damit Kompaktheit leicht eintreten kann.

5.2 Existenzaussagen

Wir betrachten zunächst ein abstraktes Optimierungsproblem, später kommen wir auf die konkrete Aufgabenstellung der Variationsrechnung zurück:

$$\text{Minimiere } I(x)\,.$$

Dabei ist $I : X \longrightarrow (-\infty,\infty]$ und X ein Banachraum. Es mag auf den ersten Blick nicht vernünftig zu sein, Werte ∞ für I zuzulassen, aber damit erfassen wir unter anderem Nebenbedingungen von der Form „$x \in K$“, indem wir etwa von $\widetilde{I} : \longrightarrow \mathbb{R}$ zu $I := \widetilde{I} + \delta_K$ mit

$$\delta_K(x) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \in K \\ \infty & \text{, falls } x \notin K \end{cases}$$

übergehen. Für die Begriffe „Dualraum, Reflexivität, (schwache) Unterhalbstetigkeit, Folgenkompaktheit, … “ verweisen wir auf den Anhang 5.5.

Satz 5.3
Sei X Banachraum und sei $I : X \longrightarrow (-\infty,\infty]$, $I \not\equiv \infty$. Es gelte:

a) X reflexiv;

b) I ist koerziv, d.h. $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} I(x) = \infty$;

c) I ist schwach unterhalbstetig.

Dann ist I nach unten beschränkt und es gibt $\overline{x}$ mit $I(\overline{x}) = \inf\limits_{x\in X} I(x)$.

Beweis:
Es gibt eine Minimalfolge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\lim_n I(x^n) = I^* := \inf_{x\in X} I(x)$. Da I koerziv ist, ist $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Da X reflexiv ist, enthält $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Satz 5.30 eine schwach konvergente Teilfolge $(x^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$; $\overline{x} := w\text{–}\lim_k x^{n_k}$. Da I schwach unterhalbstetig ist, gilt $I(\overline{x}) \leq \liminf_{k\in\mathbb{N}} I(x^{n_k}) = I^*$. Klar, $I^* = I(\overline{x})$ ist eine untere Schranke. ■

Aus Beispiel 5.4 (siehe unten) wird klar, dass auf die Tatsache, dass die Einheitskugel in X eine Kompaktheitseigenschaft besitzt, in Satz 5.3 im allgemeinen nicht verzichtet werden kann.

Eigentlich benötigen wir im Beweis zu Satz 5.3 nur die Existenz **einer** Minimalfolge, die beschränkt ist; die Koerzivität sichert die Beschränktheit jeder Minimalfolge. Üblicherweise wird die Koerzivität etwas schärfer gefasst:

$$I(x) \geq \alpha\|x\|^\gamma + \beta\,,\ x \in X \quad (\alpha > 0, \gamma > 0, \beta \geq 0)\,. \tag{5.3}$$

Diese Bedingung ist im konkreten Fall nicht ganz einfach zu verifizieren.

Die Unterhalbstetigkeit wird noch genauer untersucht werden. Soviel ist schon zu sagen: Konvexität wird eine wesentliche Rolle spielen.

Beispiel 5.4 Betrachte mit dem nichtreflexiven Banachraum $X := C[0,1]$ – die Norm ist die Maximumnorm – das Problem

$$\text{Minimiere } I(x) := \|x\| + \delta_K(x)\,,$$

wobei

$$K := \left\{ u \in X \,\middle|\, \int_0^{\frac{1}{2}} u(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 u(t)dt \right\}.$$

Klar, I ist koerziv. Da offenbar K abgeschlossen und konvex ist, ist

$$N_r(I) := \{u \in K \,|\, \|u\| \leq r\}\,,\ r \in \mathbb{R}\,,$$

abgeschlossen und konvex für alle $r \in \mathbb{R}$, also auch schwach abgeschlossen für alle $r \in \mathbb{R}$; siehe Satz 5.24. Dann ist I schwach unterhalbstetig.
Nun wollen wir zeigen, dass das Problem keine Lösung besitzt. Wegen

$$I(u) = \|u\| \geq \int_0^1 |u(t)|dt \geq \int_0^{\frac{1}{2}} u(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 u(t)dt = 1\,,\ u \in K\,,$$

gilt $I^* \geq 1$. Betrachte in X die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$u_n(t) := \begin{cases} \dfrac{n}{n-1} & \text{, falls } t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ -\dfrac{n^2}{n-1}(t - \frac{1}{2}) & \text{, falls } t \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) \\ -\dfrac{n}{n-1} & \text{, falls } t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}.$$

Dann gilt $\lim_n I(u_n) = 1$, und es gilt daher $I^* = 1$. Annahme: Es gibt $\overline{x} \in K$ mit $I(\overline{x}) = 1$. Dann gilt

$$1 = \|\overline{x}\| \geq \int_0^1 |\overline{x}(t)|dt \geq \int_0^1 \overline{x}(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \overline{x}(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 \overline{x}(t)dt = 1\,,$$

was $1 = \|\overline{x}\|$ bedeutet. Daraus liest man ohne Mühe ab, dass dann

$$\overline{x}(t) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ -1 & \text{, falls } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

gelten muss, was für die stetige Funktion $\overline{x}$ nicht möglich ist. □

Bemerkung 5.5 Die obigen drei Beobachtungen (Minimalfolge, Kompaktheit, Unterhalbstetigkeit) sind für numerische Betrachtungen nicht ausreichend, da nur sichergestellt wird, dass eine Teilfolge einer Minimalfolge konvergiert, und das auch nur in einer schwachen Topologie, wie wir unten sehen werden. Wünschenswert aus numerischer Sicht ist, dass jede Minimalfolge konvergiert. Dies sicherzustellen gelingt nur durch sehr starke Konvexitätsforderungen. □

Kommen wir nun zur Aufgabenstellung in der Variationsrechnung. Wir wollen ein Problem der Form

$$P_L \begin{cases} \text{Minimiere } J(u) := \int\limits_{\Omega} L(x, u(x), Du(x))dx \\ \text{unter den Nebenbedingungen } u \in U_{ad} \end{cases}$$

auf Existenz hin untersuchen. Der entscheidende Punkt ist die Wahl des Raumes Y in der Definition von

$$U_{ad} := \{u \in Y | u|_{\partial\Omega} = u_0\},$$

um möglichst folgende Zielvorgaben sicherzustellen:

- Y ist ein reflexiver Banachraum mit $\hat{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \subset Y$.
- $I := J + \delta_{U_{ad}}$ koerziv.
- $I := J + \delta_{U_{ad}}$ schwach unterhalbstetig.
- Nebenbedingungen „$u = u_0$ in $\partial\Omega$“ machen einen Sinn.

Soviel sei schon gesagt: Wir werden diese, was die Reflexivität betrifft nicht ganz erreichen, wir werden daher die Unterhalbstetigkeit etwas stärker fassen müssen.

Naheliegend ist sicher von $\hat{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ auszugehen und Y als Vervollständigung davon einzuführen. Diese Vervollständigung ist im allgemeinen Fall ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $d > 1$) keine einfache Unternehmung. Wir betreiben dies nur für $d = 1$ und erfassen daher damit nur die Aufgabenstellungen, die wir in den vorhergehenden Kapiteln betrachtet haben. Die Nebenbedingungen „$u = u_0$ in $\partial\Omega$“ nehmen dann die Form $u(a) = u_a, u(b) = u_b$ an. Diese können wir nun o.E. auf den Fall $u_a = u_b = 0$ reduzieren, was wir im folgenden auch so halten wollen. Die Nebenbedingungen $u(a) = u(b) = 0$ können wir uns dann in den Raum eingearbeitet denken; also $y \in Y \implies y(a) = y(b) = 0$.

Definition 5.6
Eine Funktion $y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ heisst **absolut stetig**, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle Zerlegungen $Z : a \le t_0 < \cdots < t_n \le b$ gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) < \delta \implies \sum_{i=1}^{n-1} |y(t_{i+1}) - y(t_i)| < \epsilon \right)$$

Wir setzen $AC([a, b]; \mathbb{R}^d) := \{y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^d | y \text{ absolut stetig}\}$. □

Wegen der Äqualenz der euklidischen Norm und der Maximumnorm in $\mathbb{R}^d$ ist folgender Sachverhalt sofort klar:

$$y = (y_1, \ldots, y_d) \in AC([a,b];\mathbb{R}^d) \iff y_1, \ldots, y_d \in AC([a,b];\mathbb{R}^1)$$

Eine weitere Beobachtung ist

Lemma 5.7
Sei $y \in AC([a,b];\mathbb{R}^d)$. Dann ist y fast überall differenzierbar, die Ableitung y' ist in $L_1([a,b];\mathbb{R}^d)$ und es gilt:

$$y(t_2) - y(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} y'(s)ds\,,\ a \le t_1 \le t_2 \le b\,. \tag{5.4}$$

Beweis:
Den Beweis dieser Tatsache findet man in Büchern über Maßtheorie.[2]

Darauf bauen nun die folgende Definitionen auf:

Definition 5.8
Wir setzen

$$H^{1,p}([a,b];\mathbb{R}^d) := \{y \in AC([a,b];\mathbb{R}^d) | y' \in L_p([a,b];\mathbb{R}^d)\}\,,\ 1 \le p \le \infty\,,$$

und definieren auf $H^{1,p}([a,b];\mathbb{R}^d)$ die Norm

$$\|y\|_{1,p} := \|y\|_p + \|y'\|_p\,,\ y \in H^{1,p}([a,b];\mathbb{R}^d)\,.$$

$\square$

Man sieht mit Lemma 5.7, dass $H^{1,1}([a,b];\mathbb{R}^d) = AC([a,b];\mathbb{R}^d)$ gilt. Ferner ist nun auch klar, dass $Y := H^{1,p}([a,b];\mathbb{R}^d)$ der geeignete Raum sein kann, Integralfunktionale der Variationsrechnung vernünftig zu studieren. Allerdings ist der Raum $H^{1,p}([a,b];\mathbb{R}^d)$ nur dann reflexiv, wenn wir $1 < p < \infty$ voraussetzen, denn dann ist

$$H^{1,p}([a,b];\mathbb{R}^d)^* = H^{1,q}([a,b];\mathbb{R}^d) \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,,$$

wobei die kanonische Paarabbildung in dieser Gleichsetzung zu

$$\langle x, y\rangle := \int_a^b x(t)y(t)dt + \int_a^b x'(t)y'(t)dt$$

wird; dies erbt $H^{1,p}([a,b];\mathbb{R}^d)$ von $L_p([a,b];\mathbb{R}^d)$.

Nun ist es so, dass das „Rechnen" in $H^{1,p}([a,b];\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, wesentlich schwerer fällt als in $H^{1,\infty}([a,b];\mathbb{R}^d)$, denn Abschätzungen gestalten sich hier leichter. Daher ist naheliegend, doch $Y := H^{1,\infty}([a,b];\mathbb{R}^d)$ zu verwenden. Dies gelingt auch, denn $H_{1,\infty}([a,b];\mathbb{R}^d)$ ist der Dualraum von $H^{1,1}([a,b];\mathbb{R}^d)$, und die Einheitskugel in $H^{1,\infty}([a,b];\mathbb{R}^d)$ ist daher schwach*–folgenkompakt.

[2] Siehe etwa: Hewitt, E., Stromberg, K., Real and Abstract Analysis, Springer–Verlag, 1969

Nun können wir ein erstes richtungsweisendes Existenzresultat beweisen. Dazu müssen wir noch die Nebenbedingungen einarbeiten. Dies geschieht, indem wir den linearen Teilraum

$$H_0^{1,p}([a,b];\mathbb{R}^d) := \{y \in H^{1,p}([a,b];\mathbb{R}^d) | y(a) = y(b) = 0\}\,,\ 1 \le p \le \infty\,,$$

einführen. Da dieser lineare Teilraum abgeschlossen ist, bleiben die obigen Aussagen zur Reflexivität bzw. Folgenkompaktheit bestehen.

Lemma 5.9
Betrachte $J : H_0^{1,\infty}([a,b];\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ und es gelte:

a) J ist koerziv, d.h. $\lim\limits_{\|y\|_{1,\infty}\to\infty} J(y) = \infty$;

b) J ist schwach*–unterhalbstetig.

Dann gibt es $\overline{y}$ mit $J(\overline{y}) = \inf\{J(y) | y \in H_0^{1,\infty}([a,b];\mathbb{R}^d)\}$.

Beweis:
Ist nach unseren Vorüberlegungen schon klar. ∎

Es bleibt nun die Frage nach der Gültigkeit der Voraussetzungen a) und b) im Lemma 5.9. Dabei kommt die Konvexität wesentlich ins Blickfeld. Die Frage der Gateaux–Differenzierbarkeit von J, die ja für die Ableitung der Eulerschen Differentialgleichung wesentlich ist, übergehen wir.

5.3 Unterhalbstetigkeit von Integralfunktionalen

Lemma 5.10
Sei $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $H_0^{1,\infty}([a,b];\mathbb{R}^d)$. Dann sind äquivalent:

a) $y^n \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{y}$.

b) $\sup\limits_n \|y^n\|_{1,\infty} < \infty$ und $\lim\limits_n \int\limits_c^d |(y^n)'(t) - \overline{y}'(t)|dt = 0$ für alle Teilintervalle $[c,d]$ von $[a,b]$.

Beweis:
Zu a) $\Longrightarrow$ b).
Betrachte die Operatoren $T_n : H^{1,1}([a,b];\mathbb{R}^d) \ni x \longmapsto \langle x, y^n\rangle \in \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung konvergiert $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\langle x, \overline{y}\rangle$ für alle $x \in H^{1,1}([a,b];\mathbb{R}^d)$. Nach dem Satz von Banach–Steinhaus (siehe Satz 5.33) gilt $\sup_n \|T_n\| < \infty$. Nach Definition gilt $\|T_n\| = \|y^n\|_{1,\infty}$, $n \in \mathbb{N}$. Ist nun $[c,d]$ ein Teilintervall von $[a,b]$. Da die charakteristische Funktion $\chi_{[c,d]}$ in $L_1([a,b];\mathbb{R}^d)$ liegt, folgt die zweite Aussage aus der Tatsache, dass $L_1([a,b];\mathbb{R}^d)^* = L_\infty([a,b];\mathbb{R}^d)$ gilt.
Zu b) $\Longrightarrow$ a).
Sei $\varepsilon > 0$. Sei $g \in L_1([a,b];\mathbb{R}^d)$. Dann gibt es Teilintervalle $D_1,\dots,D_k$ von $[a,b]$ mit

$$\int\limits_a^b |g(t) - \sum_{i=1}^k a_i \chi_{D_i}(t)|dt < \varepsilon \text{ mit } |a_1|,\dots,|a_k| \le 2\|g\|_1\,.$$

Es folgt nun

$$\begin{aligned}
\Big|\int_a^b (g(t)(y^n)'(t) - g(t)\overline{y}(t))dt\Big| &\leq \int_a^b |g(t) - \sum_{i=1}^k a_i\chi_{D_i}(t)||(y^n)'(t) - \overline{y}(t)|dt \\
&\quad +2\|g\|_1 \sum_{i=1}^k \int_a^b \chi_{D_i}|(y^n)'(t) - \overline{y}(t)|dt \\
&\leq c\int_a^b |g(t) - \sum_{i=1}^k a_i\chi_{D_i}(t)|dt + 2\|g\|_1 \sum_{i=1}^k \int_a^b \chi_{D_i}|(y^n)'(t) - \overline{y}(t)|dt
\end{aligned}$$

mit einer Konstante c, woraus man die gewünschte Aussage ableitet. ∎

Hier ist ein weiteres Hilfsmittel.

Lemma 5.11 (Lemma von Riemann–Lebesgue)
Sei $g \in L_\infty[a,b]$ und betrachte davon die auf $\mathbb{R}$ periodisch fortgesetzte Funktion G. Definiere damit die Folge $(g^n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $g^n(t) := G(nt)$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt $g^n \stackrel{*}{\rightharpoonup} \overline{g}$, wobei $\overline{g}$ der Mittelwert von g ist, also

$$\overline{g} = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b g(t)dt\,.$$

Beweis:
Wir wollen die Aussage beweisen durch Heranziehen der Charakterisierung in Lemma 5.10.
Wir haben offenbar $\|g^n\|_1 \leq \|g\|_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $[c,d]$ ein Teilintervall von $[a,b]$. Wir können p,q finden mit $[c,d] = p + [qa,qb]$; um die Schreibweise zu vereinfachen, nehmen wir o.E. $p = 0$ an. Nun haben wir

$$\begin{aligned}
\Big|\int_c^d (g^n(t) - \overline{g})dt\Big| &\leq \int_{[qa,qb]} |g(nt) - \overline{g}|dt = \int_{[nqa,nqb]} \frac{1}{n}|g(t) - \overline{g}|dt \\
&= \int_{[\lfloor nq\rfloor a,\lfloor nq\rfloor b]} \frac{1}{n}|g(t) - \overline{g}|dt + \int_{[nq-\lfloor nq\rfloor a,nq-\lfloor nq\rfloor b]} \frac{1}{n}|g(t) - \overline{g}|dt \\
&= \int_a^b \frac{\lfloor nq\rfloor}{n}|g(t) - \overline{g}|dt + \int_{[nq-\lfloor nq\rfloor a,nq-\lfloor nq\rfloor b]} \frac{1}{n}|g(t) - \overline{g}|dt \\
&= \int_{[nq-\lfloor nq\rfloor a,nq-\lfloor nq\rfloor b]} \frac{1}{n}|g(t) - \overline{g}|dt
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lim_n \int_c^d (g^n(t) - \overline{g})dt = 0\,.$$

∎

Beispiel 5.12 Aus dem Lemma von Riemann–Lebesgue folgt z.B., dass

$$\sin(n\,\cdot) \overset{*}{\rightharpoonup} \theta \text{ in } L_\infty[0,1]$$

gilt. □

Betrachte die folgenden **Hypothesen:**

H1) $L : [a,b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

H2) $|L(t,u,\xi)| \le \kappa(t,|u|,|\xi|)$ für alle $(t,u,\xi) \in [a,b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ wobei $\kappa(\cdot,|u|,|\xi|) \in L_1[a,b]$ und $\kappa(t,\cdot,|\xi|), \kappa(t,|u|,\cdot)$ monoton wachsend für alle $(t,u,\xi) \in [a,b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

H3) $L(t,u,\xi) \ge \langle a(t),\xi\rangle + b(t)$ für alle $(t,u,\xi) \in [a,b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, mit $a \in L_1([a,b];\mathbb{R}^d)$ und $b \in L_1[a,b]$.

Lemma 5.13
Es seien die Bedingungen H1), H2) erfüllt und sei $L(t,u,\cdot)$ konvex für alle $(t,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}^d$.. Dann ist J wohldefiniert und schwach*–unterhalbstetig.

Beweis:
J ist wohldefiniert, da $t \longmapsto L(t,y(t),y'(t))$ für jedes $y \in H_0^{1,\infty}([a,b];\mathbb{R}^d)$ meßbar ist und wegen

$$J(y) \le \int_a^b \kappa(t,\|y\|_\infty,\|y'\|_\infty)dt < \infty \text{ für alle } y \in H_0^{1,\infty}([a,b];\mathbb{R}^d)$$

auch nicht entartet ist.
Sei $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\overline{y} = w^* - \liminf_n y^n$ existiert. O.E. $L(t,u,\xi) \ge 0$ für alle $(t,u,\xi) \in [a,b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, denn man kann $t \longmapsto \langle a(t),\cdot\rangle + b(t)$ subtrahieren; beachte dabei, dass $\xi \longmapsto \langle a(t),\xi\rangle + b(t)$ schwach*–unterhalbstetig ist. O.E. (wegen $L \ge 0$) ist $l := \liminf_n J(y^n) < \infty$ und wir können $l = \lim_n J(y^n)$ annehmen.
Sei $\varepsilon > 0$. Wir wollen eine bezüglich des Lebesgue–Maßes μ auf $[a,b]$ messbare Menge $\Omega_\varepsilon \subset [a,b]$, eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $N \in N$ konstruieren mit

$$\mu([a,b]\backslash\Omega_\varepsilon) < \varepsilon, \int_{\Omega_\varepsilon} |L(t,u_{n_k}(t),\xi_{n_k}(t)) - L(t,\overline{u}(t),\xi_{n_k}(t))|dt < \varepsilon|b-a| \text{ für alle } k \ge N. \quad (5.5)$$

Aus (5.5) folgt die Behauptung dann in folgender Weise: Sei

$$\chi_\varepsilon(t) := \begin{cases} 1 & ,t \in \Omega_\varepsilon \\ 0 & ,t \notin \Omega_\varepsilon \end{cases}, \; g(t,\xi) := \chi_\varepsilon(t)L(t,\overline{u}(t),\xi).$$

Dann ist g messbar und $g(t,\cdot)$ konvex für fast alle $t \in [a,b]$. Weiterhin stellen wir mit

$$G(\xi) := \int_a^b g(t,\xi(t))dt\,, \xi \in L_\infty([a,b];\mathbb{R}^d),$$

fest, dass wegen $\xi_{n_k} \longrightarrow \overline{\xi}$ in $L_\infty([a,b];\mathbb{R}^d)$ dann

$$\lim_k G(\xi_{n_k}) := \lim_k \int_a^b \chi_\varepsilon(t)L(t,\overline{u}(t),\xi_{n_k}(t))dt \ge G(\overline{\xi}) = \int_a^b \chi_\varepsilon(t)L(t,\overline{u}(t),\overline{\xi}(t))dt \quad (5.6)$$

gilt. Mit (5.5) erhalten wir für genügend großes k :

$$\begin{aligned}\int_a^b \chi_\varepsilon(t)L(t,u_{n_k}(t),\xi_{n_k}(t))dt &\geq \int_a^b \chi_\varepsilon(t)L(t,\overline{u}(t),\xi_{n_k}(t))dt \\ &\quad - \int_a^b \chi_\varepsilon(t)|L(t,u_{n_k}(t),\xi_{n_k}(t)) - L(t,\overline{u}(t),\xi_{n_k}(t))|dt \\ &\geq \int_a^b \chi_\varepsilon(t)L(t,\overline{u}(t),\xi_{n_k}(t))dt - \varepsilon|b-a|\end{aligned}$$

Da $L \geq 0$ vorausgesetzt ist, folgt

$$\int_a^b L(t,u_{n_k}(t),\xi_{n_k}(t))dt \geq \int_a^b \chi_\varepsilon(t)L(t,\overline{u}(t),\xi_{n_k}(t))dt - \varepsilon|a-b|\,.$$

Für $k \to \infty$ folgt mit (5.6)

$$l = \lim_n \int_a^b L(t,u_{n_k}(t),\xi_{n_k}(t))dt \geq \int_a^b \chi_\varepsilon(t)L(t,u(t),\overline{\xi}(t))dt$$

Für $\varepsilon \longrightarrow 0$ folgt mit dem Satz der monotonen Konvergenz von Lebesgue das Ergebnis.
Wir haben nun also noch Ω_ε so zu konstruieren, dass (5.5) gilt.
Da $u_n \to \overline{u}$ und $\xi_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} \overline{\xi}$ in $L_\infty([a,b];\mathbb{R}^d$ gilt, gibt es $M_\varepsilon > 0$ (unabhängig von n), so dass für $n \in \mathbb{N}$ folgende Aussagen gelten:

$$\begin{aligned}\mu(K^1_{\varepsilon,n}) &< \frac{\varepsilon}{6} \qquad \text{für } K^1_{\varepsilon,n} := \{t \in [a,b]|\,|\overline{u}(t)|, |\overline{u}_n(t)| \geq M_\varepsilon\}, \\ \mu(K^2_{\varepsilon,n}) &< \frac{\varepsilon}{6} \qquad \text{für } K^2_{\varepsilon,n} := \{t \in [a,b]|\,|\xi_n(t)| \geq M_\varepsilon\}.\end{aligned}$$

Also

$$\mu([a,b]\backslash\Omega^1_{\varepsilon,n}) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } \Omega^1_{\varepsilon,n} := [a,b]\backslash(K^1_{\varepsilon,n} \cup K^2_{\varepsilon,n}).$$

Wegen H1), H2) gibt es $\delta > 0$, so dass

$$|u(t) - v(t)| < \delta \implies |L(t,u(t),\xi) - L(t,v(t),\xi)| < \varepsilon$$

für alle $t \in \Omega_{\varepsilon,n}$. Wegen $u_m \to \overline{u}$ in $L_\infty([a,b];\mathbb{R}^d)$ finden wir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$\mu([a,b]\backslash\Omega^2_{\varepsilon,n}) < \frac{\varepsilon}{3}, n \geq N_\varepsilon \text{ für } \Omega^2_{\varepsilon,n} := \{t \in [a,b]|\,|u_n(t) - \overline{u}(t)| < \delta\}$$

gilt. Also mit $\Omega_{\varepsilon,n} := \Omega^1_{\varepsilon,n} \cup \Omega^2_{\varepsilon,n}$ haben wir

$$\mu([a,b]\backslash\Omega_{\varepsilon,n}) < \varepsilon\,, \int_{\Omega_{\varepsilon,n}} |L(t,\overline{u}(t),\xi_n(t)) - L(t,u_n(t),\xi_n(t))|dt < \varepsilon|b-a|,$$

für alle $n \geq N_\varepsilon$. Wähle nun $\varepsilon_j := \frac{\varepsilon}{2^j}, j \in \mathbb{N}$, und setze

$$\Omega_\varepsilon := \bigcap_{j=1}^\infty \Omega_{\varepsilon_j,N_{\varepsilon_j}}\,.$$

Diese Menge Ω_ε ist nun geeignet. ∎

Satz 5.14
Seien die Bedingungen H1), H2) erfüllt. Dann sind äquivalent:

a) *J ist schwach*–unterhalbstetig.*

b) *Es gibt $g \in C([a,b]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$, $h \in C([a,b]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ mit*

$$L(t,u,\xi) = \langle g(t,u),\xi\rangle + h(t,u) \text{ für alle } (t,u,\xi) \in [a,b]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d .$$

Beweis:
Zu a). Wende Satz auf L und $-L$ an.
Zu b). Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass $y^n \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{y}$ in $H_0^{1,\infty}([a,b];\mathbb{R}^d)$ sofort $y^n \longrightarrow \overline{y}$ in $L_1([a,b];\mathbb{R}^d)$ ergibt; die Aussage folgt nun mit der Stetigkeit von g und h. ∎

Lemma 5.15
Sei J schwach*–unterhalbstetig auf $H_0^{1,\infty}([a,b];\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\frac{1}{b-a}\int_c^d L(t_0,u_0,\xi_0+\varphi'(s))ds \geq L(t_0,u_0,\xi_0)$$

für alle Teilintervalle $[c,d]$ von $[a,b]$, für alle $(t_0,u_0,\xi_0) \in [a,b]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ und für alle $\varphi \in H_0^{1,\infty}([a,b];\mathbb{R}^d)$.

Beweis:
Wir beweisen die Aussage nur für den Spezialfall $L(t,u,\xi) = l(\xi)$, der allgemeine Fall ist technisch ein ganzes Stück aufwendiger.
Sei $[c,d]$ ein Teilintervall von $[a,b]$, sei $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ und sei $\varphi \in H_0^{1,\infty}([a,b];\mathbb{R}^d)$. Wir setzen $\varphi_0 \in \mathbb{R}^d$ periodisch von $[a,b]$ auf $\mathbb{R}$ fort. Aus Lemma können wir folgern:

$$\frac{1}{n}\varphi(n\,\cdot) \overset{*}{\rightharpoonup} \theta \text{ in } H_0^{1,\infty}([a,b];\mathbb{R}^d) .$$

Definiere $\widetilde{u}$ durch $\widetilde{u}(t) := \xi_0 t$, $t \in [a,b]$, und setze

$$u^n(t) := \begin{cases} \widetilde{u}(t) & \text{, falls } t \in [a,b]\backslash[c,d] \\ \widetilde{u}(t) + \frac{1}{n}\varphi(nt) & \text{, falls } t \in [c,d] \end{cases} .$$

Damit haben wir $u^n \overset{*}{\rightharpoonup} \widetilde{u}$ in $H_0^{1,\infty}([a,b];\mathbb{R}^d)$. Nun gilt

$$\begin{aligned} J(u^n) &= \int_{[a,b]\backslash[c,d]} l(\xi_0)dt + \int_{[c,d]} l(\xi_0+\varphi'(nt))dt \\ &= l(\xi_0)(|c-a|+|b-d|) + \int_c^d l(\xi_0+\varphi'(t))dt \end{aligned}$$

und mit der schwach*–Unterhalbstetigkeit von J folgt die behauptete Ungleichung.

∎

5.4 Konvexität von Integralfunktionalen

Es geht um die Konvexität von $J : H_0^{1,\infty}([a,b];\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ (und ihre Konsquenz für die Unterhalbstetigkeit von J). Von Interesse ist dabei, inwieweit mögliche Varianten der Konvexität von L hier maßgeblich sind. Zunächst in Beispielen.

Beispiel 5.16 Wir stellen einfache Bedingungen an $L : [a,b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ auf, die die Konvexität von J zur Konsequenz haben.
• Ist $L(t,\cdot,\cdot)$ konvex, dann ist auch J konvex.
• Ist L von der Form

$$L(t,u,\xi) = l(t,\xi) \text{ mit } l(t;\cdot) \text{ konvex für alle } t \in [a,b],$$

so ist J konvex.
• Im Spezialfall

$$L(t,u,\xi) = l(u)\xi$$

verschwindet J identisch, denn

$$\int_a^b l(y(t))y'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\Lambda(y(t))dt = \Lambda(y(b)) = \Lambda(y(a)) = 0$$

mit $\Lambda(u) := \int_a^b l(s)ds.$ □

Mit dem folgenden Beispiel zeigen wir, dass die Konvexität von L nicht notwendig ist für die Konvexität von J.

Beispiel 5.17 Betrachte

$$L(t,u,\xi) := g(u) + h(\xi)$$

mit $g(u) := \frac{1}{2}(u^2-1)^2, h(\xi) := \xi^2$. Offenbar ist g nicht konvex, während h konvex ist. Aber J ist konvex auf $H_0^{1,\infty}([0,1];\mathbb{R}^d)$, wie eine einfache Betrachtung zeigt.

Satz 5.18
Seien die Bedingungen H1), H2) erfüllt und sei J schwach*–unterhalbstetig auf $H_0^{1,\infty}([a,b];\mathbb{R}^d)$. Dann ist $L(t,u,\cdot)$ konvex für alle $(t,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}^d$.

Beweis:
Sei $(t_0,u_0) \in [a,b] \times \mathbb{R}^d$. Seien $r \in [0,1], \xi,\eta \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt

$$\begin{aligned} rL(t_0,u_0,\xi) + (1-r)L(t_0,u_0,\eta) &= \frac{1}{b-a}\int_a^{a+r(b-a)} L(t_0,u_0,\xi)ds + \frac{1}{b-a}\int_{a+r(b-a)}^b L(t_0,u_0,\eta)ds \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b L(t_0,u_0,r\xi+(1-r)\eta+g(s))ds \end{aligned}$$

mit

$$g(s) := \begin{cases} (1-r)(\xi-\eta) & , s \in [a, a+r(b-a)] \\ -r(\xi-\eta) & , \text{sonst} \end{cases}$$

Offenbar ist $\varphi \in H_0^{1,\infty}([a,b];\mathbb{R}^d)$, falls $\varphi(t) := \int\limits_a^t g(s)ds, t \in [a,b]$. Damit folgt

$$\begin{aligned} rL(t_0,u_0,\xi) + (1-r)L(t_0,u_0,\eta) &= \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b L(t_0,u_0,r\xi+(1-r)\eta+\varphi'(s))ds \\ &\geq L(t_0,u_0,r\xi+(1-r)\eta), \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Unterhalbstetigkeit von J folgt. ■

5.5 Anhang: Funktionalanalysis

Wir unterstellen Kenntnisse über Vektorräume – wir beschäftigen uns ausschliesslich mit Vektorräumen mit Skalarraum $\mathbb{R}$ – und normierten Vektorräumen.

Definition 5.19
Sei X ein normierter Raum mit Norm $\|\cdot\|$.

a) Eine Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heisst **konvergent** mit Grenzwert $\overline{x}$, wenn $\lim_n \|x^n - \overline{x}\| = 0$ gilt. (Manchmal sagen wir auch „stark konvergent“, um den Unterschied zur schwachen Konvergenz, die wir unten einführen, klarzumachen.)

b) Sei $A \subset X$. $\overline{x} \in X$ heisst **Randpunkt** von A, wenn es eine Teilfolge in A gibt, deren (starker) Grenzwert $\overline{x}$ ist; wir schreiben $\overline{x} \in \overline{A}$. A heisst (stark) **abgeschlossen**, wenn $A = \overline{A}$ gilt.

c) X heisst ein **Banachraum**, wenn jede starke Cauchyfolge einen Grenzwert in X besitzt.

□

Definition 5.20
Sei X ein normierter Raum mit Norm $\|\cdot\|$. Der Vektorraum

$$X^* := \{\lambda : X \longrightarrow \mathbb{R} | \lambda \text{ linear, stetig } \}$$

heisst der (stetige) Dualraum von X. □

Sei X ein Banachraum mit Dualraum X^*. Wir schreiben $\langle\lambda, x\rangle$ für die Anwendung von λ auf $x \in X$ und nennen $\langle\cdot,\cdot\rangle$ die **kanonische Paarabbildung** auf $X^* \times X$. Da X als Banachraum vorausgesetzt ist, ist X^* selbst wieder ein Banachraum; die Norm ist folgendermaßen definiert:

$$\|\lambda\| := \|\lambda\|_{X^*} := \sup_{x\in X, \|x\|\leq 1} |\langle\lambda, x\rangle|, \lambda \in X^*. \tag{5.7}$$

Die Wohldefiniertheit von $\|\lambda\|$ für $\lambda \in X^*$ folgt aus der Stetigkeit von λ in $x = \theta$. Wir haben nun

$$|\langle\lambda, x\rangle| \leq \|\lambda\| \, \|x\|, \, (\lambda, x) \in X^* \times X.$$

Bemerkung 5.21 Ist X ein Banachraum, so ist in natürlicherweise auch $X \times \mathbb{R}$ ein Banachraum und der Dualraum $(X \times \mathbb{R})^*$ kann mit $X^* \times \mathbb{R}$ identifiziert werden in folgendem Sinne: Zu $\Lambda \in (X \times \mathbb{R})^*$ definiere $\lambda^\Lambda \in X^*$ und $r^\Lambda \in \mathbb{R}$ durch

$$\langle\lambda, x\rangle := \langle\Lambda, (x,0)\rangle, \, r^\Lambda := \langle\Lambda, (\theta, 1)\rangle.$$

□

Was die Reichhaltigkeit eines Dualraums X^* von X betrifft, haben wir folgendes Resultat:

Satz 5.22
Sei X ein Banachraum mit Dualraum X^* und sei $x \in X$. Dann gibt es $\lambda \in X^*$ mit

$$\langle \lambda, x \rangle = \|x\| \, , \; \|\lambda\| \le 1 \, . \tag{5.8}$$

Das obige Resultat ist eine Konsequenz des Satzes von **Hahn–Banach**. Dieser Satz lässt sich auch als **Trennungssatz** verstehen. Dabei kommt in ausgeprägter Weise die Konvexität ins Spiel.

Definition 5.23
Sei X ein reeller Vektorraum. Eine Teilmenge A von X heisst **konvex**, wenn

$$ax + (1-a)y \in A \text{ für alle } a \in [0,1], x, y \in A$$

gilt. □

Satz 5.24
Sei X ein Banachraum, sei $K \subset X$ abgeschlossen und konvex und sei $x_0 \in X \backslash K$. Dann gibt es $\lambda \in X^*$ mit

$$\langle \lambda, x \rangle \le 1 \textit{ für alle } x \in K \, , \; \langle \lambda, x_0 \rangle > 1 \, .$$

Sei X ein Banachraum. Mit Funktionalen $\lambda \in X^*$ lassen sich Hyperebenen $H_{\lambda,\alpha}$ und Halbräume $H^+_{\lambda,\alpha}, H^-_{\lambda,\alpha}$ einführen ($\lambda \in X^*, \alpha \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} H_{\lambda,\alpha} &= \{x \in X | \langle \lambda, x \rangle = \alpha\} \, , \\ H^+_{\lambda,\alpha} &= \{x \in X | \langle \lambda, x \rangle \ge \alpha\} \, , \\ H^-_{\lambda,\alpha} &= \{x \in X | \langle \lambda, x \rangle \le \alpha\} \, . \end{aligned}$$

Eine Konsequenz aus Satz 5.24 ist

Folgerung 5.25
Sei X ein Bachraum, sei $K \subset X$ abgeschlossen und konvex. Dann gilt

$$K = \bigcap \{H^+_{\lambda,\alpha} | K \subset H^+_{\lambda,\alpha}\} \, .$$

Siehe Abbildung 5.1.

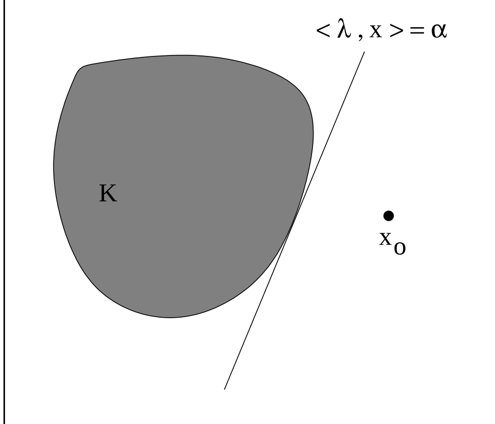

Abbildung 5.1: Trennungssatz

Definition 5.26
Eine Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heisst **schwach konvergent** mit Grenzwert $\overline{x}$, wenn $\lim_n \langle \lambda, x^n - \overline{x} \rangle = 0$ gilt für alle $\lambda \in X^*$; wir schreiben $\overline{x} = w - \lim\limits_n x^n$. □

Man leitet ohne Mühe aus Satz 5.24 ab, dass der Grenzwert einer schwach konvergenten Folge (wie ein starker Grenzwert auch) eindeutig bestimmt ist. Mit Folgerung 5.25 folgt ein wichtiger Sachverhalt über konvexe Mengen:

Folgerung 5.27
Sei X ein Bachraum, sei $K \subset X$ konvex. Dann ist K abgeschlossen genau dann, wenn K schwach abgeschlossen ist.

Sei X ein Bachraum mit Dualraum X^* und **Bidualraum** $X^{**} := (X^*)^*$. Dann haben wir folgende Abbildung

$$J_X : X \ni x \longmapsto \mu_x \in X^{**}, \langle \mu_x, \lambda \rangle := \langle \lambda, x \rangle , \tag{5.9}$$

die wir die **kanonische Einbettung** von X in seinen Bidualraum nennen.

Definition 5.28
Sei X ein Bachraum. X heisst **reflexiv** genau dann, wenn die kanonische Einbettung $J_X : X \longrightarrow X^{**}$ surjektiv ist. □

Reflexivität eines Banachraumes X wird impliziert durch die geometrische Eigenschaft, dass die Einheitskugel gleichmässig konvex ist in folgendem Sinne:

$$\forall \varepsilon \, \exists \, \delta > 0 \, \forall \, x, y \in X \, (\|x - y\| < \varepsilon \implies \frac{1}{2}\|x + y\| \geq \delta) \, .$$

Definition 5.29
Sei X ein Banachraum. Eine Teilmenge A von X heisst **(schwach) folgenkompakt**, wenn jede Folge in A eine (schwach) konvergente Teilfolge enthält, deren Grenzwert in A liegt. □

Satz 5.30 (Satz von Eberlein–Shmulyan)
Ein Banachraum X ist reflexiv genau dann, wenn die Einheitskugel in X schwach folgenkompakt ist.

In nicht–reflexiven Banachräumen ist die schwache Folgenkompaktheit von beschränkten Mengen nicht gegeben. Dies kann auf gewisse Weise gerettet werden.

Definition 5.31
Sei X ein Banachraum mit Dualraum X^*.

a) Eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst **schwach*–konvergent** mit Grenzwert $\overline{\lambda}$, wenn $\lim\langle \lambda_n, x\rangle = \langle \overline{\lambda}, x\rangle$ gilt; wir schreiben $\overline{x} = w^* - \lim_n x^n$ oder $x_n \xrightarrow{*} \overline{x}$.

b) Eine Teilmenge Λ von X^* heisst **schwach*–folgenkompakt**, wenn jede Folge in Λ eine schwach*–konvergente Teilfolge enthält, deren Grenzwert in Λ liegt.

□

Folgerung 5.32
Sei X ein Banachraum mit Dualraum X und sei X separabel, d.h. in X gibt es eine abzählbare Menge A mit $\overline{A} = X$. Dann ist die Einheitskugel in X^* schwach–folgenkompakt.*

Ein weiteres wichtiges Resultat in der Funktionalanalysis ist der Satz von Banach–Steinhaus, den wir in einer hier passenden Fassung präsentierung.

Satz 5.33 (Satz von Banach–Steinhaus)
Seien X, Y Banachräume und sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge linearer stetiger Operatoren. Es gelte:

a) $\sup_n |\langle \lambda, T_n x \rangle| < \infty$ *für alle* $x \in X, \lambda \in Y^*$;

b) $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert für alle* $x \in X$ *(in* X*).*

Dann gilt $\sup_n \|T_n\| < \infty$.

Abschliessend noch ein Ergebnis über Lipschitz–stetige Funktionen. Es besagt, dass Lipschitz-stetige Funktionen von Teilmengen auf den ganzen Raum fortgesetzt werden können, ohne die Lipschitzkonstante zu vergrössern.

Satz 5.34 (Fortsetzung nach Mac Shane)
Sei X *ein Banachraum, sei* Y *eine Teilmenge von* X *und sei* $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit*

$$|f(x) - f(y)| \leq l\|x - y\| \text{ für alle } x, y \in Y .$$

(l *ist die Lipschitzkonstante von* f *auf* Y*.) Dann ist*

$$\widetilde{f} : X \ni x \longmapsto \sup\{f(y) - l\|x - y\| | y \in Y\} \in \mathbb{R}$$

eine Lipschitz–stetige Abbildung mit Lipschitz–Konstante l *und* $\widetilde{f}|_Y = f$.

Beweis:
Als erstes beobachten wir, dass in der Definition von $\widetilde{f}(x)$ dank der Lipschitz–Stetigkeit von f das Supremum in $y = x$ angenommen wird. Damit ist $\widetilde{f}$ wohldefiniert. Seien $u, v \in X$; sei o.E. $f(u) \geq f(v)$. Wir haben

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(u) - f(v) \\ &= \sup\{f(w) - l\|u - w\| | w \in Y\} - \sup\{f(z) - l\|v - z\| | z \in Y\} \\ &\leq \sup\{l\|v - w\| - l\|u - w\| | w \in Y\} \\ &\leq l\|u - v\| . \end{aligned}$$

■

5.6 Anhang: Konvexe Funktionen

Bezeichnung: Sei X ein Banachraum und sei $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$. Wir setzen:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f) &:= \{x \in X | f(x) < \infty\} \quad (\textbf{effektiver Definitionsbereich}) ; \\ \mathrm{epi}(f) &:= \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} | f(x) \leq r\} \quad (\textbf{Epigraph}) . \end{aligned}$$

Definition 5.35
Sei X ein Banachraum und sei $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$.

a) f heisst **(schwach) unterhalbstetig** in $\overline{x}$, wenn $f(\overline{x}) \leq \liminf_n f(x_n)$ gilt für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, die (schwach) konvergent gegen $\overline{x}$ sind.

b) Sei X Dualraum des Banachraumes Y, d.h. $X = Y^*$. f heisst **schwach*–unterhalbstetig** in $\overline{x}$, wenn $f(\overline{x}) \leq \liminf_n f(x_n)$ gilt für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, die schwach*–konvergent gegen $\overline{x}$ sind.

□

Folgerung 5.36
Sei X ein Banachraum und sei $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$. Dann sind äquivalent:

a) *f ist unterhalbstetig.*

a) *epi(f) ist abgeschlossen.*

a) *$N_r(f)$ ist abgeschlossen für alle $r \in \mathbb{R}$.*

Definition 5.37
Sei X ein Banachraum und sei $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$. Wir definieren f^*, f^{**}, f^e durch:

$$\begin{aligned} f^*(\lambda) &:= \sup_{x\in X}\{\langle\lambda, x\rangle - f(x)\}\,,\ \lambda \in X^* \ \ (\textbf{Fenchel–Konjugierte})\,; \\ f^{**}(x) &:= \sup_{\lambda\in X^*}\{\langle\lambda, x\rangle - f^*(\lambda)\}\,,\ x \in X \ \ (\textbf{Bipolare})\,; \\ f^e(x) &:= \sup\{g(x) | g \le f, g \text{ konvex}\}\,,\ x \in X\,. \end{aligned}$$

□

Die Fenchel–Konjugierte ist uns schon im Zusammenhang mit der Hamiltonfunktion und der Legendre–Transformation begegnet.

Satz 5.38
Sei X ein Banachraum und sei $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$, $f \not\equiv \infty$. Dann haben wir:

a) *f^* ist konvex und unterhalbstetig.*

b) *Ist f konvex und unterhalbstetig, dann ist dom$(f^*) \neq \emptyset$.*

c) *$f^{**} \le f^e \le f$.*

d) *Ist f konvex und unterhalbstetig, dann ist $f^{**} = f^e = f$.*

f) *$(f^{**})^* = f^*$.*

Beweis:
Zu a).
Betrachte zu $x \in X$ $q_x : X^* \ni \lambda \longmapsto \langle\lambda, x\rangle - f(x) \in \mathbb{R}$. Sicherlich ist q_x konvex, unterhalbstetig, ja sogar stetig. Also ist $f^* = \sup_{x\in X} q_x$ konvex und unterhalbstetig.
Zu b).
Da $f \not\equiv \infty$ gilt, gibt es $(\tilde{x}, \tilde{r}) \in (X \times \mathbb{R}) \backslash \mathrm{epi}(f)$. Wir betrachten $A := \mathrm{epi}(f)$, $B := \{(\tilde{x}, \tilde{r})\}$. Der Trennungsatz 5.24 liefert $\lambda \in X^*, \xi \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle\lambda, x\rangle + \xi r > a \text{ für alle } (x, r) \in A\,, \tag{5.10}$$
$$\langle\lambda, \tilde{x}\rangle + \xi\tilde{r} < a\,. \tag{5.11}$$

Setzen wir $x := \tilde{x}, r := f(\tilde{x})$ in (5.10), dann folgt

$$\langle\lambda, \tilde{x}\rangle + \xi f(\tilde{x}) > a > \langle\lambda, \tilde{x}\rangle + \xi\tilde{r}\,,$$

was sofort $\xi > 0$ impliziert. Wir können daher offenbar $\xi := 1$ in (5.10), (5.11) setzen. Dann erhalten wir

$$\langle\lambda, x\rangle + f(x) > a \text{ für alle } x \in X\,,\ \text{d.h. } \langle -\lambda, x\rangle - f(x) < -a \text{ für alle } x \in X\,,$$

und wir haben $f^*(\lambda) \not\equiv \infty$.
Zu c).
Die Aussage $f^e \leq f$ ist trivial. Wegen

$$f(x) \;\geq\; \langle\lambda, x\rangle - f^*(\lambda) \text{ für alle } \lambda \in X^*, x \in X\,,$$

folgt $f^{**} \leq f^e$.
Zu d).
Sei $\widetilde{\lambda} \in \mathrm{dom}(f^*)$ (siehe b)). Dann ist g, definiert durch $g(x) := f(x) - \langle\widetilde{\lambda}, x\rangle + f^*(\widetilde{\lambda})$, konvex, unterhalbstetig, und es gilt $g \geq 0$ und $g \not\equiv \infty$. Wir haben dann $g^{**}(x) = f^{**}(x) - \langle\widetilde{\lambda}, x\rangle + f^*(\widetilde{\lambda})$. Also ist zur Gültigkeit von $f^{**} = f$ nur noch zu zeigen $g^{**} = g$, wozu wegen $g^{**} \leq g$ (siehe c)) nur $g^{**} \geq g$ erforderlich ist. Es reicht daher aus, unter den Voraussetzungen

$$f \geq 0\,,\ f \text{ konvex, unterhalbstetig}\,,$$

zu zeigen: $f^{**} \geq f$.
Annahme: Es gibt $\widetilde{x} \in X$ mit $f^{**}(\widetilde{x}) < f(\widetilde{x})$.
Setze $A := \mathrm{epi}(f)$, $B := \{(\tilde{x}, f^{**}(\widetilde{x}))\}$. Der Trennungsatz 5.24 liefert $\lambda \in X^*, \xi \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle\lambda, x\rangle + \xi r \;>\; a \text{ für alle } (x, r) \in A \tag{5.12}$$
$$\langle\lambda, \widetilde{x}\rangle + \xi f^{**}(\widetilde{x}) \;<\; a\,. \tag{5.13}$$

Setzen wir $x \in \mathrm{dom}(f)$ in (5.12) ein und betrachten wir den Grenzübergang $r \to \infty$, so sehen wir $\xi \geq 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann folgt (wegen $f \geq 0$)

$$\langle\lambda, x\rangle + (\xi + \varepsilon) f(x) > a \text{ für alle } x \in \mathrm{dom}(f)\,,$$

$$\langle -\frac{1}{\xi + \epsilon}\lambda, x\rangle - f(x) < \frac{-a}{\xi + \epsilon} \text{ für alle } x \in \mathrm{dom}(f)\,,$$

d.h.

$$f^*(-\frac{1}{\xi + \epsilon}\lambda) \leq \frac{-a}{\xi + \epsilon}\,.$$

Dies zeigt

$$f^{**}(\widetilde{x}) \;\geq\; \langle -\frac{1}{\xi + \epsilon}\lambda, \widetilde{x}\rangle - f^*(-\frac{1}{\xi + \epsilon}\lambda) \;\geq\; \langle -\frac{1}{\xi + \epsilon}\lambda, \widetilde{x}\rangle + \frac{a}{\xi + \epsilon}\,,$$

also $\langle\lambda, \widetilde{x}\rangle + f^{**}(\widetilde{x})(\xi + \epsilon) \geq a$. Mit Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ erhalten wir die widersprüchliche Aussage $\langle\lambda, \widetilde{x}\rangle + f^{**}(\widetilde{x})\xi \geq a$.
Zu e).
Wir haben

$$f^{**} \leq f\,,\ f^{***} \geq f^*\,,\ \langle\lambda, x\rangle - f^{**}(x) \leq f^*(\lambda) \text{ für alle } \lambda \in X^*, x \in X\,.$$

Daraus folgt $f^{***} := (f^{**})^* \leq f^*$. ■

Beispiel 5.39 Wir haben das Paar (siehe Beispiel 3.9)

$$f:\mathbb{R}\ni x \longmapsto \frac{1}{p}|x|^p \in \mathbb{R}\,,\ f^*:\mathbb{R}\ni \lambda \longmapsto \frac{1}{q}|x|^q \in \mathbb{R}\,,\ 1<p<\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\,.$$

Ferner haben wir folgende Paare:

$$f:\mathbb{R}\ni x \longmapsto |x| \in \mathbb{R}\,,\ f^*:\mathbb{R}\ni \lambda \longmapsto \delta_{[-1,1]}(\lambda)\in(-\infty,\infty]\,;$$

$$f:\mathbb{R}\ni x \longmapsto \delta_{[-1,1]}(x) \in (-\infty,\infty]\,,\ f^*:\mathbb{R}\ni \lambda \longmapsto |\lambda|\in\mathbb{R}\,.$$

□

Beispiel 5.40 Sei X ein Banachraum und sei $A\subset X$. Setze

$$f(x):=\delta_A(x):=\begin{cases}0 & \text{, falls } x\in A\\ \infty & \text{, falls } x\notin A\end{cases}.$$

Dann gilt offenbar

$$f^*(\lambda)=\sup_{x\in A}\langle\lambda,x\rangle\,,\ \lambda\in X^*\,.$$

Die Funktion f^* heisst **Stützfunktion** von A; siehe Abbildung 5.2 für den Fall eines Epigraphen einer Funktion. Durch die Beobachtung

$$f^{**}(x)=\delta_{\overline{co}(A)}(x)\,,\ f^e(x)=\delta_{co(A)}(x)$$

wird Satz 5.38 bestätigt. Hierbei ist $co(A)$ die konvexe Hülle von A und $\overline{co}(A)$ die abgeschlossene konvexe Hülle von A. □

Beispiel 5.41 Betrachte auf $X:=\mathbb{R}^{n,n}$ die Funktion $f(A):=\det(A)$. Man stellt fest:

$$f^*\equiv\infty\,,\ f^{**}\equiv-\infty\,.$$

Wie sieht f^e aus? □

Folgerung 5.42
Sei X ein Banachraum und sei $f:X\longrightarrow(-\infty,\infty]$ konvex und unterhalbstetig. Dann ist f auch schwach unterhalbstetig.

Kommen wir nun zur Differenzierbarkeit von (konvexen) Funktionen. Wir orientieren uns an der Richtungsdifferenzierbarkeit. Wir benötigen dazu noch den Begriff des Inneren $\mathrm{int}(A)$ einer Menge A in einem Banachraum:

$$\mathrm{int}(A):=X\backslash\overline{X\backslash A}\,.$$

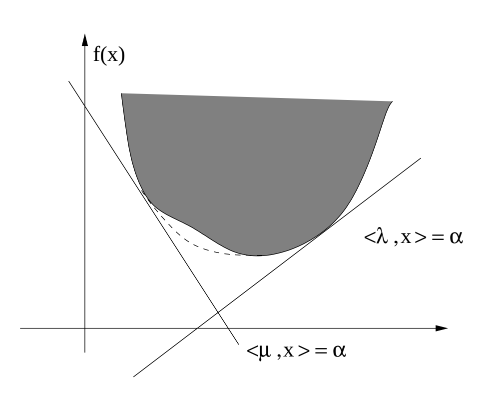

Abbildung 5.2: Stützfunktion

Definition 5.43
Sei X ein Banachraum und sei $f:X\longrightarrow(-\infty,\infty]$.

a) f heisst **Richtungs–differenzierbar** in $x\in\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$ in Richtung $y\in X$, wenn

$$f'(x;y):=\lim_{h\to 0}h^{-1}(f(x+hy)-f(x))$$

existiert.

b) f heisst **Gateaux–differenzierbar** in $x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$, wenn $f'(x;y)$ für alle $y \in X$ existiert und $f'(x) := f'(x;\cdot) \in X^*$ gilt.

c) f heisst **Gateaux–differenzierbar**, wenn $\mathrm{dom}(f) = X$ gilt und f Gateaux–differenzierbar ist für alle $x \in X$.

□

Ist $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ Richtungs–differenzierbar in $x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$ in Richtung $y \in X$, dann existiert die Grösse $\frac{d}{dt} f(x + \cdot\, y)\big|_{t=0}$, sie ist ja gleich $f'(x;y)$, und sie heisst **1. Variation** von f in x in Richtung von y. Diesem entsprechend heisst die Grösse (Existenz vorausgesetzt)

$$f''(x;y) := \frac{d^2}{dt^2} f(x + \cdot\, y)\big|_{t=0}$$

2. Variation von f in x in Richtung von y.

Satz 5.44
Sei X ein Banachraum und sei $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty)$ Gateaux–differenzierbar. Es sind äquivalent:

a) f ist konvex.

b) $f(y) \geq f(x) + \langle f'(x), y - x\rangle$ für alle $x, y \in X$.

c) $\langle f'(y) - f'(x), y - x\rangle \geq 0$ für alle $x, y \in X$.

Beweis:
Zu a) $\Longrightarrow$ b). Für $h \in (0,1)$ ($h \in (-1,0)$ analog) :

$$\begin{aligned} h^{-1}(f(x + h(y-x)) - f(x)) &= h^{-1}(f(hy + (1-h)x) - f(x)) \\ &\leq h^{-1}(hf(y) + (1-h)f(x) - f(x)) \leq f(y) - f(x)\,. \end{aligned}$$

Zu b) $\Longrightarrow$ a). Für $h \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(hx + (1-h)y) + \langle f'(hx + (1-h)y), x - (hx + (1-h)y)\rangle\,, \\ f(y) &\geq f(hx + (1-h)y) + \langle f'(hx + (1-h)y), y - (hx + (1-h)y)\rangle\,. \end{aligned}$$

Daraus leitet man (multipliziere mit h bzw. $(1-h)$ und addiere) das Ergebnis ab.
Zu b) $\Longrightarrow$ c), c) $\Longrightarrow$ b). Dies rechnet man leicht nach. ■

Bemerkung 5.45 Die Eigenschaft c) – ein Ersatz für die Semidefinitheit der zweiten Ableitung – in Satz 5.44 wird als Monotonie des Operators

$$X \ni x \longmapsto f'(x) \in X^*$$

bezeichnet. Sie ist Ausgangspunkt für die Theorie monotoner Operatoren. □

Lemma 5.46 (Identität von Moreau–Young)
Sei X ein Banachraum und sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ Gateaux–differenzierbar und konvex. Dann gilt:

$$f(x) + f^*(f'(x)) = \langle f'(x), x\rangle \text{ für alle } x \in X\,. \tag{5.14}$$

Beweis:
Seien $x, y \in X$. Aus der Definition von f^* ergibt sich:

$$f(x) + f^*(f'(x)) \geq \langle f'(x), x\rangle .$$

Aus b) in Satz 5.44 ergibt sich:

$$f(y) \geq f(x) + \langle f'(x), y - x\rangle , \text{ d.h. } \langle f'(x), x\rangle - f(x) \geq \langle f'(x), y\rangle - f(y) .$$

Daraus folgt

$$\langle f'(x), x\rangle - f(x) \geq f^*(f'(x)) .$$

■

Das obige Resultat haben wir im Zusammenhang mit der Legendre–Transformation in spezieller Form schon benutzt.

Satz 5.47
Sei X ein Banachraum und sei $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ Gateaux–differenzierbar in $\overline{x} \in int(dom(f))$. Dann gilt:

a) Ist $f(\overline{x}) = \inf\limits_{x\in X} f(x)$, so ist $f'(\overline{x}) = \theta$. Existiert die zweite Variation in x, dann gilt auch $f''(\overline{x}; y) \geq 0$ für alle $y \in X$.

b) Ist f konvex und ist $f'(\overline{x}) = \theta$, so ist $f(\overline{x}) = \inf\limits_{x\in X} f(x)$.

Beweis:
Zu a). Setze $g(t) := f(\overline{x} + tv), t \in \mathbb{R}$, mit $v \in X$. Dann ist $g(0) = \inf\{g(t)|t \in \mathbb{R}\}$ und daher $0 = g'(0) = \langle f'(\overline{x}), v\rangle$. Also $f'(\overline{x}) = \theta$. Die zweite Aussage folgt in ähnlicher Weise.
Zu b). Folgt aus $f(x) \geq f(\overline{x}) + \langle f'(\overline{x}), x - \overline{x}\rangle = f(\overline{x})$. ■

Beispiel 5.48 Sei $X := C[a, b]$, versehen mit der Maximumnorm. Wir betrachten das Funktional

$$f(x) := \int_a^b (\sin^3(t) + x(t)^2)dt \, , \; x \in X .$$

Es gilt

$$h^{-1}(f(x + hy) - f(x)) = 2\int_a^b x(t)y(t)dt + h\int_a^b y(t)^2dt \, , \text{ also } f'(x; y) = 2\int_a^b x(t)y(t)dt \, ,$$

und wir haben $f'(x; \cdot) \in X^*$. □

5.7 Übungen

1.) Unter den stetig differenzierbaren Funktionen $y : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit den Randwerten $y(-1) = -1, y(1) = 1$ sind diejenigen Funktionen gesucht, die dem Integral

$$\int_{-1}^{1} x^4 y'(x)^2 dx$$

den kleinsten Wert zuweisen. Gibt es eine Lösung?

2.) Sei X ein Banachraum und sei $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeige: Konvergiert $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark gegen $\overline{x}$, also $\lim_n \|x^n - \overline{x}\| = 0$, so konvergiert $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen $\overline{x}$. Gilt die Umkehrung? (Hinweis: Betrachte etwa in l_2 die Folge $(\delta_{nm})_{n\in\mathbb{N}}$.)

3.) Zeige folgende Rechenregeln für konvexe Funktionen:

(a) Summe und Produkt konvexer Funktionen sind konvex.

(b) Ist $(f_a)_{a\in A}$ eine Familie konvexer Funktionen, so ist auch $f := \sup_{a\in A} f_a$ eine konvexe Funktion.

4.) Sei X ein Banachraum und sei $f : X \longrightarrow (-\infty,\infty]$.

(a) Ist f **strikt konvex**, d.h. gilt

$$f((1-a)x + ay) < (1-a)f(x) + af(y) \text{ für alle } a \in (0,1), x \neq y.$$

so gibt es höchstens ein $\overline{x} \in X$ mit $f(\overline{x}) = \inf_{x\in X} f(x)$.

(b) Gib ein Beispiel einer strikt konvexen Funktion an.

5.) Sei X ein Banachraum und sei $f : X \longrightarrow (-\infty,\infty]$ unterhalbstetig. Beweise: $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = \infty$ genau dann, wenn es $\alpha > 0, \beta \geq 0$ gibt mit

$$f(x) \geq \alpha|x| - \beta \text{ für alle } x \in X.$$

6.) Sei X ein Banachraum und sei $f : X \longrightarrow (-\infty,\infty]$. Zeige: f ist (schwach) unterhalbstetig genau dann, wenn $N_r(f) := \{x \in X | f(x) \leq r\}$ (schwach) abgeschlossen ist für alle $r \in \mathbb{R}$.

7.) Sei X ein Banachraum und sei $f : X \longrightarrow (-\infty,\infty]$.

(a) $N_r(f) := \{x \in X | f(x) \leq r\}$ ist konvex für alle $r \in \mathbb{R}$, falls f konvex ist.

(b) Gib ein Beispiel dafür an, dass die Umkehrung von a) nicht gültig ist.

8.) Sei X ein Banachraum und sei $f : X \longrightarrow (-\infty,\infty]$ konvex. Zeige:

(a) $\{\overline{x} \in X | f(x) = \inf_{x\in X} f(x)\}$ ist konvex.

(b) $\overline{x} \in X$ ist ein lokales Minimum von f genau dann, wenn $\overline{x}$ globales Minimum ist.

9.) Sei $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow (-\infty,\infty]$ konvex. Berechne die konjugierte Funktion g^* für

(a) $g(x) := f(x) + a, x \in X$, $(a \in \mathbb{R})$;

(b) $g(x) := f(x - x_0), x \in X$, $(x_0 \in \mathbb{R}^d)$;

(c) $g(x) := f(x) + < x, x_0 >, x \in X$, $(x_0 \in \mathbb{R}^d)$.

Literaturverzeichnis

[Ak] AKHIESER, N.I.: The Calculus of Variations. Blaisdell Publ. Comp., New York–London, 1962

[Ba] BANGERT, V.: Geodätische Linien auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Jber. d. Dt. Math.–Verein. 87 (1985), 39-66

[Be] BRECHTKEN-MANDERSCHEID, U.: Einführung in die Variationsrechnung, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1983

[B1] BLISS, G.A.: Variationsrechnung, Teubner, Leipzig, 1932

[B2] BLISS, G.A.: Lectures on the Calculus of Variations, The University of Chicago Press, Chicago, London, 1946

[Bo] BOLZA, O.: Vorlesungen über Variationsrechnung, Teubner, Leipzig, 1902; Koehler & Amelang (Neudruck), Leipzig, 1949

[C1] CARATHÉODORY, C.: Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Teubner, Leipzig, 1935

[C2] CARATHÉODORY Contributions to the Calculus of Variations, University of Chicago Press, Chicago, 1930

[Ce] CESARI, L: Optimization–Theory and Applications, Springer–Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1983

[Cl] CLEGG, J.C.: Variationsrechnung, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1970

[Da] DACAROGNA, B: Direct Methods in the Calculus of Variations, Springer–Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1989

[El] ELSGOLC, L.E.: Variationsrechnung, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1970

[Ek] EKELAND, I.: Convexity Methods in Hamiltonian Mechanics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New-York, 1990

[ET] EKELAND, I, R. TEMAM: Convex Analysis and Variational Problems. North-Holland, Amsterdam, 1977

[Ep] EPHESER, H.: Vorlesung über Variationsrechnung, Vandenhoek & Ruprecht, Göttingen-Zürich, 1973

[Fo] FORSYTH, A.R.: Calculus of Variations, Cambridge University Press, Cambridge, 1927; Dover Publications, New York, 1960

[Fx] FOX, C.: An Introduction to the Calculus of Variations, Oxford University Press, Fair Lawn, 1950

[FN] FUCIK, S., NECAS, J., SOUCEK, V.: Einführung in die Variationsrechnung, Teubner, Leipzig, 1977

[Fu] FUNK, P.: Variationsrechnung und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1962

[Ge] GELFAND, I.M., FOMIN, S.V.: Calculus of Variations, Eaglewood Cliffs, Prentice Hall, New York, 1963

[Go] GOLDSTINE, H.H.: A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1980

[Gr] GRÜSS, G.: Variationsrechnung, Leipzig, 1938, Heidelberg: Quelle & Meyer, 1955

[Ha] HADAMARD, J.S.: Leçons sur le Calcul de Variations, Herman et Fils, Paris, 1910

[Kl] KLINGBEIL, E.: Variationsrechnung, Walter de Gruyter & Co, Berlin, 1962

[Kz] KLÖTZLER, R.: Mehrdimensionale Variationsrechnung, Birkhäuser–Verlag, Basel–Stuttgart, 1970

[Kn] KNESER, A.: Lehrbuch der Variationsrechnung, Vieweg, Braunschweig, 1900

[Ko] KOSCHMIEDER, L.: Variationsrechnung, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1962

[Mo] MORREY, C.B.: Multiple Integrals in the Calculus of Variations, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966

[Mr] MORSE, M: The Calculus of Variations in the Large, American Mathematical Society, Providence, 1934

[P1] PARS, L.A.: An Introduction to the Calculus of Variations, Heinemann, London, 1962

[P2] PARS, L.A.: Calculus of Variatons, Heinemann,London–Melbourne–Toronto, 1962

[Re] REKTORYS, K.: Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering, D. Reidel Publishing Company, Berlin 1975

[Ru] RUND, H.: The Hamilton-Jakobi-Theory in the Calculus of Variations, D. van Nordstrand Comp., London–Toronto–New York, 1966

[Sa] SAGAN, H.: Introduction to the Calculus of Variations, McGraw–Hill Book Company, New York, 1969

[Sm] SMITH, D. R.: Variational Methods in Optimization, Englewood Cliffs, Prentice–Hall, 1974

[St] STRUWE, M.: Variational Methods, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1980

[To] TONELLI, L.: Fondamenti di calcolo delle variazioni, Zanichelli, Bologna, 1921, 1923

[Tr] TROUTMAN, J. L.: Variational Calculus with Elementary Convexity, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1983

[We] WEINSTOCK, R.: Calculus of Variations, McGraw–Hill, New York–Toronto–London, 1952

[Ws] WEIERSTRASS, K.: Vorlesungen über Variationsrechnung, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1927

[An] ANAND, K.: Introduction to Control Systems, Pergamon Press, New York, 1974

[At] ATHANS, M., FALB, P.L.: Optimal Control, McGraw–Hill Book Company, New York, 1966

[Bn] BARNETT: Introduction to Mathematical Control Theory, Clarendon Press, Oxford, 1975

[Bl] BELLMAN, R.: Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, 1957

[BD] BELLMAN, R., DREYFUS, S.E.: Applied Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, 1962

[BK] BELLMAN, R., KALABA, R.: Dynamic Programming and Modern Control Theory, Academic Press, New York, 1965

[Bm] BELLMAN, R.: Introduction to the Mathematical Theory of Control Process, Academic Press, New York, 1967

[Bk] BERKOVITZ, L.D.: Introduction to Optimal Control Theory, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1974

[Bo] BOLTJANSKIJ, V.G.: Mathematische Methoden der optimalen Steuerung, Carl Hanser, München, 1972

[Br] BROKETT, R.W.: Finite Dimensional Linear Systems, J. Wiley, New York–London–Sidney–Toronto, 1970

[By] BRYSON, A.E., HO, Y.C.: Applied Optimal Control, Waltham: Ginn & Company, Washington D.C. 1969, Hemisphere Publishing Corporation, 1973

[Ci] CITRON, S.J.: Elements of Optimal Control, Holt, 1969

[Fl] FLEMMING, W.H., RISHEL, R.W.: Deterministic and Stochastic Control, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1975

[Fe] FÖLLINGER, O.: Nichtlineare Regelungen I,II, Oldenbourg–Verlag, München, 1987

[Fr] FRANCIS, B.A.: A Course in H_∞ Control Theory, Lect. Notes in Control and Information Sciences, Vol. 88, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1987

[Ga] GAMKRELIDZE, R.V.: Principles of Optimal Control Theory, Plenum Press, New York, London, 1973

[Gi] GIRSANOV, J.V.: Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems, Lect. Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 76a, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972

[He] HESTENES, M.R.: Calculus of Variations and Optimal Control Theory, John Wiley & Sons, New York–London–Sidney–Toronto, 1966

[Is] ISODORI, A.: Nonlinear Control Systems: an Introduction, Lect. Notes in Control and Inf. Sci., Vol. 72, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1985

[Jo] JOFFE, A.D., TIKHOMIROV, V.M.: Theory of Extremal Problems, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1979

[K1] KNOBLOCH, H.W., KAPPEL, F.: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Teubner-Verlag, Stuttgart, 1973

[K2] KNOBLOCH, H., KWAKERNAAK, H.: Lineare Kontrolltheorie, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1985

[Kr] KRABS, W.: Einführung in die Kontrolltheorie, Wisss. Buchgesellschaft, Darmstadt, 1978

[L1] LEITMANN, G.: An Introduction to Optimal Control, McGraw–Hill Book Company, New York, 1966

[L2] LEITMANN, G.: Einführung in die Theorie optimaler Steuerung und der Differentialspiele, Oldenbourg–Verlag, München, 1974

[L3] LEITMANN, G.: The Calculus of Variations and Optimal Control, Plenum Press, New York–London, 1981

[Le] LEWIS, F.L.: Optimal Control, J. Wiley, New York–London–Sidney–Toronto, 1986

[Ma] MACKI, J., STRAUSS, A.: Introduction to Optimal Control Theory, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1981

[Mc] MC CLAMROCH, N.H.: State Models of Dynamic Systems, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1980

[Na] NARENDA, K.S., ANNASWAMY, A.M.: Stable Adaptive Systems, Eaglewood Cliffs, Prentice–Hall, New York, 1989

[Pe] PETROV, I. P.: Variational Methods in Optimal Control Theory, Academic Press, New York, 1968

[PB] PONTRJAGIN, L.S., BOLTJANSKIJ, V.G., GAMKREDLIDZE, R.V., MISCHENKO, E.F.: Mathematische Theorie optimaler Prozesse, Oldenburg, München, 1964 (erste Ausgabe in Russisch, 1961)

[Rl] RUSSEL,J.L.: Mathematics of Finite-Dimensional Control Systems–Theory and Design, Marcel Dekker–Verlag, New York–Basel, 1979

[Wo] WOLOVICH, W.A.: Linear Multivariable Systems, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1974

[Wh] WONHAM, W.M.: Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1985

[Yo] YOUNG, L.C.: Calculus of Variations and Optimal Control Theory, W.B. Saunders Company, Philadelphia, 1969