

Differentialgleichungen

J. Baumeister

25. Oktober 1999

¹Dies sind noch unvollständige und oberflächlich korrigierte Aufzeichnungen eines Skripts zur Vorlesung Differentialgleichungen SS 99 an der Johann Wolfgang Goethe–Universität Frankfurt am Main. Die Kapitel 7 - 9 wurden nicht vorgetragen.

Inhaltsverzeichnis

1	Differentialgleichungen 1. Ordnung	1
1.1	Das Richtungsfeld expliziter Differentialgleichungen 1. Ordnung	1
1.2	Lösungsrezept: Getrennte Variablen	4
1.3	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	7
1.4	Exakte Differentialgleichungen	12
1.5	Implizite Differentialgleichungen 1. Ordnung	15
2	Existenzsätze	19
2.1	Aufgabenstellung und Beispiele	19
2.2	Die Anfangswertaufgabe als Integralgleichung	22
2.3	Der Fixpunktsatz von Banach	23
2.4	Der Satz von Picard–Lindelöf	26
2.5	Fortsetzung von Lösungen	32
2.6	Diskussion eines Populationsmodells	34
3	Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern	38
3.1	Das Lemma von Gronwall	38
3.2	Stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten	41
3.3	Stetige Abhängigkeit von Parametern	42
3.4	Differenzierbare Abhängigkeit	44
4	Lineare Systeme	47
4.1	Das Exponential einer Matrix	47
4.2	Autonome Systeme	49
4.3	Der vollständige Überblick im ebenen Fall	52
4.4	Nichtautonome Systeme	52
4.5	Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung	58
4.6	Potenzreihenlösungen	62
4.7	Laplace–Transformation	64
5	Stabilität bei autonomen Systemen	68
5.1	Autonome Systeme und Trajektorien	68
5.2	Stabilitätsbegriffe	73
5.3	Stabilität bei linearen Systemen	75
5.4	Das Routh–Hurwitz–Kriterium	77
5.5	Ein Störungsresultat	80
5.6	Die Methode von Ljapunov	83

5.7	Ljapunov's Matrixgleichung	89
6	Periodische Lösungen	91
6.1	Periodische Punkte	91
6.2	Periodische Lösungen bei linearen Systemen	92
6.3	Floquetdarstellung	95
6.4	Existenz periodischer Lösungen: Ein Störungsresultat	99
6.5	Der Brouwer'sche Fixpunktsatz	102
7	Differentialgleichungen und Mechanik	106
7.1	Die Keplerschen Gesetze und Newton's Gravitationsgesetz	106
7.2	Das Zweikörperproblem	108
7.3	Eine relativistische Lösung	113
7.4	Konservative Systeme	116
7.5	Dissipative Systeme	121
8	Zur Theorie von Poincare–Bendixon	124
8.1	Limesmengen und Attraktoren	124
8.2	Das Theorem von Poincare–Bendixon	130
9	Stabilität periodischer Lösungen	132
9.1	Limesmengen	132
9.2	Ebene autonome Systeme	135
9.3	Die Lienardsche Differentialgleichung	141
9.4	Stabilität	142
9.5	Stabilität periodischer Lösungen	146
9.6	Orbitale Stabilität: Der autonome Fall	148

Einleitung

Wie eine Vorlesung über Differentialgleichungen anfangen ?

Natürlich bei Newton's Massenanziehungsgesetz ! Damit gelang es NEWTON (1642-1727), Hypothesen für die Planetenbewegungen (EUDOXOS, ARISTARCHOS, PTOLEMÄUS, KOPERNIKUS, KEPLER) und Beobachtungen (Chinesen, Mayas, Araber) und Aufzeichnungen eines Tycho BRAHE (1546-1601) ein gültiges Modell zur Seite zu stellen. Alexander POPE dichtete im 18. Jahrhundert:

Nature and Nature's law lay hid in night!
God said: Let Newton be! and all was light.

Der Titel von Newton's Hauptwerk (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687) verrät: Es geht nicht darum, die Aussenwelt zu beschreiben; es gilt zu verstehen, was sie "im Innersten" zusammenhält. Das Gravitationsgesetz von Newton erlaubt es, die Bewegungen der Planeten innerhalb gewisser Fehlergrenzen vorauszusagen, aber weder Kepler (1571-1630) noch Newton kann die Frage beantworten, warum die Planeten "herumrennen". Newton begründet eine neue Wissenschaft, zu der bisher die größten Mathematiker ihren Beitrag leisteten:

Euler, Lagrange, Laplace Poincaré, Birkhoff
Siegel, Kolmogorov, Arnold, Moser, Smale.

Das klassische Werkzeug, seit Newton ausgefeilt und vervollkommenet, ist die Differentialgleichung. Sie ist die mathematische Sprache, in der sich der Determinismus ausdrückt: Wenn ein System von einer Differentialgleichung beherrscht wird, ist seine Entwicklung vollständig in seinem gegenwärtigen Zustand enthalten. POINCARÉ (1854–1912) war es, der erkannte, dass die quantitativen Methoden, die Ausdruck dieses Determinismus waren, nur begrenzt in der Lage waren, zuverlässige Vorhersagen für die Zukunft zu treffen. Er begründete die qualitative Theorie von Differentialgleichungen, die in unserer Zeit, in der Computersimulation „so einfach“ ist, eindrucksvolle Erfolge feiert.

Wir wollen nicht anfangen mit einer Definition

„Eine Differentialgleichung ist gegeben durch ... mit einer Abbildung ...“

sondern zunächst in unserem Kontext nur festhalten:

Eine Differentialgleichung ist eine in jedem einzelnen Augenblick gültige Relation zwischen der Position eines beweglichen Körpers, seiner Beschleunigung und seiner Geschwindigkeit. Die Differentialgleichung integrieren oder lösen bedeutet, die Bahn des Körpers und seine Bewegung aus ihr abzuleiten.

Kapitel 1

Differentialgleichungen 1. Ordnung

In diesem Kapitel entwickeln wir keine größere Theorie, sondern geben nur einige Rezepte für die Lösung spezieller Typen von Daten. Es dient dazu, die Vielfalt der möglichen Fälle zu erkennen, einige Typen von DGL kennenzulernen und einige klassische DGL zu lösen. Später greifen wir gelegentlich auf Ergebnisse zurück, wenn wir konkretes Beispielmateriale behandeln.

1.1 Das Richtungsfeld expliziter Differentialgleichungen 1. Ordnung

Die allgemeine DGL 1. Ordnung hat die Form

$$F(t, y, y') = 0 \tag{1.1}$$

wobei $F : D \rightarrow \mathbb{R} (D \subset \mathbb{R}^3)$ eine gegebene Abbildung ist. In der Form (1.1) nennt man die DGL eine **implizite** DGL. Wir betrachten zunächst nur **explizite DGLen 1. Ordnung**, d.h. DGLen von der Form

$$y' = f(t, y) \tag{1.2}$$

wobei $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$.

Sie heisst explizit, da y' als Funktion der Variablen t, y explizit dargestellt ist. Bei der Umwandlung von impliziten DGLen in explizite DGLen ist der Satz über implizite Funktionen nützlich. Die Funktion f in (1.2) heisst **rechte Seite** der DGL (1.2).

Vereinbarung: Ein Intervall I ist stets eine zusammenhängende Teilmenge in \mathbb{R} , deren Inneres nicht leer ist.

Wir wiederholen:

Definition 1.1

Sei I ein Intervall in \mathbb{R} und $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. y heisst **Lösung von** (1.2) in I , wenn für alle $t \in I$ gilt:

$$(t, y(t)) \in D, y \text{ ist differenzierbar in } t, y'(t) = f(t, y(t)).$$

□

Das Intervall I in Definition (1.1) kann offen, halboffen oder abgeschlossen sein und ins Unendliche reichen oder nicht. Es ist klar, dass eine Lösung im Intervall I auch eine Lösung in jedem Intervall J mit $J \subset I$ ist.

Das Aufsuchen der Lösungen von (1.2) kann man **graphisch** angehen. Dieses Vorgehen geht aus von der Beobachtung, dass durch (1.2) die Steigung p in einem Lösungspunkt $(t, y) \in D$ gegeben ist.

Definition 1.2

- a) Ein Zahlentripel $(t, y, p) \in D \times \mathbb{R}$ mit $p = f(t, y)$ heisst **Linielement der DGL (1.2)**
- b) Die Gesamtheit der Linielemente bildet das **Richtungsfeld der DGL (1.2)** □

Graphisches Lösen der DGL (1.2) bedeutet, das Richtungsfeld von (1.2) zu zeichnen, in dem man an „jeden“ Vektor $(t, y) \in D$ eine Richtung p anheftet und „alle“ Kurven aufsucht, die auf das Richtungsfeld passen, d.h. deren Steigung mit der Richtung des Richtungsfeldes übereinstimmt.

Abbildung 1.1: Ein Richtungsfeld

Beispiel 1.3 Betrachte die DGL $y' = y - t + 1$. Die aus der Wertetabelle

t	-1	-1	0	0	1	1	...
y	-1	0	-1	0	0	1	...
p	1	2	0	1	0	1	...

abgeleitete Skizze 1.1 gibt schon einen guten Überblick über die Lösungsgesamtheit. □

Dieses „graphische Verfahren“ sieht auf den ersten Blick unsicher und ungenau aus. Man muss sich aber vor Augen halten, dass man bei der Lösung von (1.2) mit Rechenmaschinen – wir kommen darauf zurück – auch nicht mehr Information hat und trotzdem die Lösungen sehr genau berechnen kann.

Satz 1.4

Sei y eine Lösung von (1.2) in I und sei $(t_0, y_0) \in D$ mit $y(t_0) = y_0$. Ist f n -mal stetig differenzierbar in (t_0, y_0) , so ist y $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbar in t_0 . (Für $n = 0$ ist gemeint: f stetig in (t_0, y_0) impliziert y stetig in (t_0, y_0) .)

Beweis:

Sei $h : I \ni t \mapsto f(t, y(t)) \in \mathbb{R}$. Wir beweisen durch vollständige Induktion nach n die Aussage „ y ist n -mal stetig differenzierbar“.

$n = 0$: y ist stetig, da differenzierbar. Also ist auch h stetig in (t_0, y_0) , und daher auch y' , da $y'(t) = h(t), t \in I$.

n : Aus der Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass y n -mal stetig differenzierbar in (t_0, y_0) ist. Dann ist aber auch h in (t_0, y_0) n -mal stetig differenzierbar ist, also auch y' . Dies bedeutet: y ist $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbar. ■

Satz 1.4 ist ein typischer **Regularitätssatz**: Aus einer bestimmten Regularität (hier: n -mal differenzierbar) gegebener Größen (hier: f) wird auf die Regularität gesuchter Größen geschlossen (hier: y). Bei der Behandlung partieller Differentialgleichungen gehört die Frage der Regularität der Lösung mit zu den schwierigsten Problemen.

In vielen Fällen ist man nicht an allen Lösungen (allgemeine Lösung) interessiert, sondern nur an einer Lösung, die durch einen bestimmten Punkt $(t_0, y_0) \in D$ verläuft (siehe Abschnitt 1.2). Man bezeichnet diese Aufgabe als **Anfangswertaufgabe** (kurz **AWA**), denn (t_0, y_0) entspricht in der Praxis dem Ausgangspunkt eines Prozesses, einer Messung, ... Die zugehörige AWA lautet also

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0 \quad (1.3)$$

wobei $f : D \mapsto \mathbb{R}, (t_0, y_0) \in D$.

Für einen ersten Überblick über die Lösung(en) von (1.3) genügt eine lokale Betrachtung.

Definition 1.5

Eine **lokale Lösung** von (1.3) ist eine Lösung y von $y' = f(t, y)$, die in einem Intervall $I := (t_0 - a, t_0 + a), a > 0$, definiert ist und $y(t_0) = y_0$ erfüllt. \square

Beispiel 1.6

$$y' = f(t), y(t_0) = y_0; \quad (1.4)$$

hierbei ist $f : D \mapsto \mathbb{R}$ stetig, wobei D ein Intervall in \mathbb{R} ist.

Die (einzige) Lösung ist

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s) ds, t \in D,$$

wie uns der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung lehrt. Das Richtungsfeld ist unabhängig von y . \square

Beispiel 1.7

$$y' = \sqrt{|y|}, y(t_0) = y_0. \quad (1.5)$$

Das Richtungsfeld ist offenbar unabhängig von t . Wir betrachten den Fall $t_0 = 0, y_0 = 0$. Sicherlich ist $y \equiv 0$ eine Lösung (triviale Lösung). Lösungen neben dieser trivialen Lösung sind

$$y_1(t) := \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}, y_2(t) := \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 & , t \geq 0 \\ -\frac{1}{4}t^2 & , t < 0 \end{cases}.$$

\square

1.2 Lösungsrezept: Getrennte Variablen

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit folgendem Spezialfall von (1.3):

$$\boxed{y' = f(t)g(y), y(t_0) = y_0} \quad (1.6)$$

dabei sind f, g geeignet definierte Funktionen. In heuristischer Weise können wir wie folgt rechnen: Ist y eine Lösung, dann gilt

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t), \text{ d.h. } \int_{t_0}^t \frac{y'(s)}{g(y(s))} ds = \int_{t_0}^t f(s) ds,$$

und mit der Variablensubstitution $r = y(s)$ folgt unter Einbeziehung des Anfangswertes:

$$\int_{y_0}^y \frac{dr}{g(r)} = \int_{t_0}^t f(s) ds \quad (1.7)$$

Das **Rezept** zur Lösung von (1.6) sieht so aus:

- Rechne die „Gleichung“ (1.7) aus.
- Löse in (1.7) nach y auf (Satz über implizite Funktionen !?).
- Bestätige, dass auf diesem Weg eine Lösung erhalten wurde.

Man beachte, dass die Formel (1.7) im konkreten Fall stets einer Rechtfertigung bedarf. Im Sonderfall „ $g(y_0) = 0$ “ ist eine Lösung sicherlich gegeben durch

$$y(t) \equiv y_0.$$

Beispiel 1.8

$$y' = 1 + y^2, y(0) = 1. \quad (1.8)$$

(1.7) lautet hier:

$$\int_1^y \frac{1}{1+r^2} dr = \int_0^t ds$$

Daraus erhält man $\arctan(y) = t + \frac{\pi}{4}$ oder aufgelöst

$$y(t) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (1.9)$$

Man verifiziert, dass durch Formel (1.9) eine Lösung der vorgelegten AWA in $(-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ gegeben ist. \square

Beispiel 1.9 Auf Verhulst (siehe Abschnitt 1.3) geht das folgende Populationsmodell zurück:

$$y' = (a - by)y, y(0) = y_0;$$

hierbei sind – entsprechend zum angewandten Hintergrund – $y_0, a, b > 0$. Die Formel (1.7) lautet:

$$\int_{y_0}^y \frac{dr}{(a - br)r} = \int_0^t ds$$

Mit Partialbruchzerlegung erhält man daraus

$$\begin{aligned} t &= \int_{y_0}^y \frac{dr}{(a - br)r} = \int_{y_0}^y \frac{\frac{b}{a}}{(a - br)} dr + \int_{y_0}^y \frac{\frac{1}{a}}{r} dr \\ &= -\frac{1}{a} \ln(a - by) + \frac{1}{a} \ln(a - by_0) + \frac{1}{a} \ln y - \frac{1}{a} \ln y_0 \\ &= \frac{1}{a} \ln \frac{(a - by_0)y}{(a - by)y_0} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{(a - by_0)y}{(a - by)y_0} = e^{at}$$

und schließlich als „Lösungsdarstellung“

$$y(t) = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1 - ce^{-at}}; \quad c := \frac{y_0 - \frac{a}{b}}{y_0} \quad (1.10)$$

Man stellt fest:

- In (1.10) ist eine Lösung für die AWA gegeben.
- Die Population „konvergiert“ gegen $\frac{a}{b}$ d.h. $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{a}{b}$.

□

Wir wollen nun einige Typen von DGL behandeln, die sich durch eine geeignete Substitution auf den eben behandelten Fall zurückführen lassen. Die Transformation der Anfangswerte lassen wir weg.

$$\boxed{y' = f(at + by + c); \quad a, b, c \in \mathbb{R}.} \quad (1.11)$$

Substitution: $u := at + by + c$

Daraus: $u' = a + by' = a + bf(u)$

DGL für u : $u' = a + bf(u)$

Lösung nach (1.7)!

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{t}\right)} \quad (1.12)$$

Substitution: $u := \frac{y}{t}$
 Daraus: $y = tu, y' = tu' + u$
 DGL für u : $u' = \frac{1}{t}(f(u) - u)$

Lösung nach (1.7)!

$$\boxed{y' = f\left(\frac{at + by + c}{\alpha t + \beta y + \gamma}\right)} \quad (1.13)$$

Fall A : $\det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0$, d.h. etwa $(a, b) = \lambda(\alpha, \beta)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Substitution: $u = \alpha t + \beta y$
 Daraus: $u' = \alpha + \beta y'$
 DGL für u : $u' = \alpha + \beta f\left(\frac{\lambda u + c}{u + \gamma}\right)$

Lösung nach (1.7)!

Fall B $\det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0$, d.h. es gibt genau eine Lösung \hat{t}, \hat{y} von

$$a\hat{t} + b\hat{y} + c = 0, \alpha\hat{t} + \beta\hat{y} + \gamma = 0 \quad (1.14)$$

Substitution: $u := y - \hat{y}, s := t - \hat{t}$
 Daraus: $u' = y' = f\left(\frac{a(s + \hat{t}) + b(u + \hat{y}) + c}{\alpha(s + \hat{t}) + \beta(u + \hat{y}) + \gamma}\right) = f\left(\frac{as + bu}{\alpha s + \beta u}\right)$
 DGL für u : $u' = f\left(\frac{a+bu}{\alpha+\beta u}\right)$

Lösung nach Spezialfall (1.12).

Beispiel 1.10 Löse die AWA

$$y' = \frac{3t - y - 5}{-t + 3y + 7}, y(2) = 0.$$

Hier liegt der Spezialfall (1.13) vor. Da

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 9 - 1 = 8 \neq 0,$$

gilt, liegt Fall B vor und wir haben dort $\hat{t} = 1, \hat{y} = -2$.

Substitution: $s := t - 1, u := y + 2$. Die AWA für u lautet:

$$u' = \frac{3 - \frac{u}{s}}{-1 + 3\frac{u}{s}}, u(1) = 2.$$

Substitution: $v := \frac{u}{s}$

AWA für v :

$$v' = \frac{3}{s} \cdot \frac{1 - v^2}{3v - 1}, v(1) = 2$$

Lösung mit (1.7):

$$\int_2^v \frac{3r - 1}{1 - r^2} dr = 3 \int_1^s \frac{d\sigma}{\sigma} = \ln s^3$$

Partialbruchzerlegung ergibt:

$$\ln s^3 = \int_2^v \frac{dr}{1 - r} - 2 \int_2^v \frac{dr}{1 + r} = \ln \frac{9}{(v - 1)(v + 1)^2}, (v - 1)(1 + v)^2 = \frac{9}{s^3}.$$

Rücktransformation:

$$v = \frac{u}{s} : (u - s)(u + s)^2 = 9$$

$$u = y + 2, s = t - 1 : (y - t + 3)(y + t + 1)^2 = 9$$

Also erhalten wir in

$$(y - t + 3)(y + t + 1)^2 = 9 \tag{1.15}$$

eine Formel für die Lösung in impliziter Form. □

Abschließend noch eine historische Anmerkung: Die Methode „Trennung der Variablen“ wurde von G.W. Leibniz 1691 benutzt und von Johann Bernoulli (1667–1748) systematisch formuliert. Da ungefähr gleichzeitig bekannt wurde, dass $\ln t$ die Stammfunktion von $\frac{1}{t}$ ist,¹ ließen sich schnell eine Vielzahl von DGLen lösen.

1.3 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten hier DGLen in der Form

$$\boxed{y' + a(t)y = b(t)} \tag{1.16}$$

dabei seinen $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, I ein Intervall.

DGLen vom Typ (1.16) heißen **linear**, da die abhängigen Variablen y', y linear auftreten.

¹Eine Schlampererei! $\ln t$ für $t \mapsto \ln t, \frac{1}{t}$ für $t \mapsto \frac{1}{t}$.

Definition 1.11

Die DGL (1.16) heisst **homogen**, falls $b(t) = 0$ für alle $t \in I$, anderenfalls **inhomogen**. \square

Die AWA für die homogene DGL lautet:

$$y' + a(t)y = 0, y(t_0) = y_0, t_0 \in I. \quad (1.17)$$

Wir können sie durch die Trennung der Variablen sofort lösen:

$$\int_{y_0}^y \frac{dr}{r} = - \int_{t_0}^t a(s)ds \quad \text{d.h.} \quad \ln \frac{y}{y_0} = - \int_{t_0}^t a(s)ds,$$

also aufgelöst

$$y(t) = y_0 \exp\left(- \int_{t_0}^t a(s)ds\right), t \in I. \quad (1.18)$$

Satz 1.12

Sei $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$y(t) := y_0 \exp\left(- \int_{t_0}^t a(s)ds\right), t \in I, \quad (1.19)$$

die einzige Lösung von (1.17).

Beweis:

(1) Man stellt sofort fest, dass in (1.19) in der Tat eine Lösung vorliegt.

(2) Sei $A(t) := \int_{t_0}^t a(s)ds$. Sei \bar{y} eine beliebige Lösung von (1.17) in I . Für $t \in I$ erhalten wir

$$\frac{d}{dt}(\bar{y}(t)e^{A(t)}) = \bar{y}'(t)e^{A(t)} + \bar{y}(t)a(t)e^{A(t)} = e^{A(t)}(\bar{y}'(t) + a(t)\bar{y}(t)) = 0$$

Dies bedeutet: Es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit $\bar{y}(t)e^{A(t)} = c$ für alle $t \in I$. Wegen $\bar{y}(t_0) = y_0$ gilt $c = y_0$ und daher:

$$\bar{y}(t) = y_0 e^{-A(t)}, t \in I. \quad \blacksquare$$

Satz 1.13

Seien $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $A(t) := \int_{t_0}^t a(s)ds, t \in I$. Dann ist

$$y(t) := y_0 e^{-A(t)} + \int_{t_0}^t e^{-A(t)+A(s)} b(s)ds, t \in I, \quad (1.20)$$

die einzige Lösung der Gleichung (1.16) mit Anfangswert $y(t_0) = y_0$..

Beweis:

- (1) In (1.20) liegt eine Lösung vor. Nachrechnen!
 (2) Sei \bar{y} eine Lösung von (1.16) mit Anfangswert $y(t_0) = y_0$. Dann ist $z := y - \bar{y}$ eine Lösung der homogenen Aufgabe

$$z' + a(t)z = 0, z(t_0) = 0.$$

(Dies ist die wichtige Konsequenz der Linearität.) Nach Satz 1.12: $z(t) = 0, t \in I$, d.h. $\bar{y} = y$. ■

Bemerkung 1.14

- (1) Es ist nicht nötig, sich die Formel (1.20) zu merken. Man kann sie rekonstruieren aus der Tatsache, dass für jede Lösung y von (1.16)

$$\frac{d}{dt}(y(t)e^{A(t)}) = e^{A(t)}b(t), y(t)e^{A(t)} - y(t_0)e^{A(t_0)} = \int_{t_0}^t e^{A(s)}b(s)ds, t \in I,$$

gelten muss.

- (2) Man beachte die Parallelität zur linearen Algebra: Die Lösung der inhomogenen Aufgabe (1.16) setzt sich additiv aus der allgemeinen Lösung der homogenen Aufgabe

$$y' + a(t)y = 0$$

und einer speziellen Lösung ($y(t_0) = 0!$) der inhomogenen Aufgabe

$$y' + a(t)y = b(t)$$

zusammen. □

Bestimmte (nichtlineare) DGLen lassen sich auf lineare DGLen zurückführen. Als erstes behandeln wir die **Bernoullische DGL**:

$$\boxed{y' + g(t)y + h(t)y^\alpha = 0} \quad (1.21)$$

dabei seien $g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Da wir lineare DGLen 1. Ordnung bereits beherrschen, können wir O.E. $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ annehmen. Ist y eine Lösung von (1.21), so gilt in formaler Rechnung

$$\begin{aligned} (y^{1-\alpha})' &= (1-\alpha)y^{-\alpha}y', \\ (1-\alpha)y^{-\alpha}(y' + g(t)y + h(t)y^\alpha) &= 0, \\ (y^{1-\alpha})' + (1-\alpha)g(t)y^{1-\alpha} + (1-\alpha)h(t) &= 0 \end{aligned}$$

Wenn wir also $z := y^{1-\alpha}$ setzen, so löst z die lineare DGL

$$z' + (1-\alpha)g(t)z = (\alpha-1)h(t) \quad (1.22)$$

Ein **Rezept** zur Lösung davon (1.21) ist daher:

- Löse (1.22) gemäß Satz 1.13: Lösung z

- Setze $y := z^{\frac{1}{1-\alpha}}$
- Prüfe nach, wo durch y eine Lösung von (1.21) definiert ist ($z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ definiert?)

Beispiel 1.15 Löse

$$y' + \frac{1}{3}y + \frac{t}{3}y^4 = 0, y(0) = 2$$

Es ist: $\alpha = 4, g(t) := \frac{1}{3}, h(t) := \frac{t}{3}, I := \mathbb{R}$.
 (1.22) lautet hier (mit Anfangswerten)

$$z' - z = t, z(0) = y(0)^{-3} = \frac{1}{8}$$

Mit (1.20) folgt:

$$z(t) = e^t z(0) + \int_0^t s e^{t-s} ds = \frac{1}{8} e^t - e^{t-s} s \Big|_0^t + \int_0^t e^{t-s} ds = \frac{9}{8} e^t - (t+1)$$

Also gilt $y(t) = z(t)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{9}{8} e^t - (t+1)\right)^{-\frac{1}{3}}$. Die Lösung ist definiert, solange der Klammerausdruck von Null verschieden ist. \square

Eine weitere nichtlineare DGL, die wir hier behandeln können, ist die **Riccatische DGL**:

$$\boxed{y' + b(t)y + c(t)y^2 = a(t)} \quad (1.23)$$

dabei seien $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

Beachte: Der Fall $a \equiv 0$ ist in (1.21) enthalten.

Es ist i.a. nicht möglich, die allgemeine Lösung von (1.23) anzugeben. Kennt man jedoch eine Lösung von (1.23), so kann man die „übrigen“ Lösungen berechnen. Der folgende Satz gibt an, wie man vorzugehen hat.

Satz 1.16

Seien y, y_1 Lösungen von (1.23) im Intervall I . Dann ist $u := y - y_1$ Lösung der Bernoulli-DGL

$$u' + (b(t) + 2c(t)y_1(t))u + c(t)u^2 = 0 \quad (1.24)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} u' &= y' - y_1' = -b(t)y - c(t)y^2 + a(t) + b(t)y_1 + c(t)y_1^2 - a(t) \\ &= -b(t)(y - y_1) - c(t)(y - y_1)(y + y_1) \\ &= -b(t)u + c(t)u(u + 2y_1) \end{aligned}$$

■

Es ist aus den obigen Betrachtungen unmittelbar klar, daß $y_1 + u$ eine Lösung von (1.23) ist, wenn y_1 eine Lösung von (1.23) und u eine Lösung von (1.24) ist. Ein **Rezept** zur Lösung von (1.23) ist daher:

- Rate eine Lösung y_1 von (1.23).

- Löse die Bernoulli-DGL (1.24) (Rezept siehe oben): Lösung u .
- Setze $y := y_1 + u$. Man erhält so eine weitere Lösung von (1.23).

Wie kann man sich eine „spezielle“ Lösung y_1 von (1.23) verschaffen? In vielen Fällen kommt man mit folgender Faustregel aus:

„Man mache einen Lösungsansatz von dem Typ von Funktionen, dem die Koeffizienten a, b, c der DGL (1.23) angehören (Typen: Polynome, Potenzreihen, trigonometrische Funktionen,...).

Beispiel 1.17

$$y' + (2t - 1)y - y^2 = 1 - t + t^2$$

Die Koeffizienten der DGL sind Polynome 2. Grades. Man macht daher den Ansatz – beachte, daß y^2 vorkommt –

$$y_1(t) := a_0 + a_1 t$$

und versucht die „Parameter“ a_0, a_1 so zu bestimmen, dass y_1 eine Lösung wird:

$$a_1 + (2t - 1)(a_0 + a_1 t) - (a_0 + a_1 t)^2 = 1 - t + t^2$$

Koeffizientenvergleich bedeutet:

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 - a_0^2 - 1 &= 0 \\ 2a_1 - a_1^2 - 1 &= 0 \\ 2a_0 - a_1 - 2a_0 a_1 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Eine Lösung ist

$$a_0 = 0, a_1 = 1.$$

Also ist $y(t) := t$ eine Lösung. Die Bernoulli-DGL (1.24) lautet

$$u' - u - u^2 = 0$$

und die zugehörige lineare DGL (1.22) lautet:

$$z' + z = -1.$$

Die allgemeine Lösung davon ist

$$z(t) = -1 + ce^{-t} \quad (c = z(0) + 1)$$

und es folgt $u(t) = \frac{1}{ce^{-t} - 1}$. Also lautet die allgemeine Lösung der gegebenen DGL

$$y(t) = t + \frac{1}{ce^{-t} - 1}$$

Man beachte das Problem des Definitionsbereiches! □

1.4 Exakte Differentialgleichungen

Den folgenden Überlegungen liegt folgende Beobachtung zugrunde: Wenn eine stetig differenzierbare Funktion G auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ gegeben ist, dann hat die Differentialgleichung

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial y} y' = 0$$

oder kurz

$$G_t + G_y y' = 0 \quad (1.25)$$

eine sehr anschauliche geometrische Bedeutung: Nach der Kettenregel gilt nämlich, dass jede Lösung y von (1.25) auf einer Höhenlinie

$$G(t, y) = c \quad (c \in \mathbb{R}) \quad (1.26)$$

verläuft.

Die Höhenlinien von G liefern also direkt die Lösungskurven und man muß bei der genaueren Diskussion und praktischen Auswertung eines konkreten Falles nur daran denken, dass eine Höhenlinie im allgemeinen nicht eine für alle t erklärte Funktion definiert (Satz über implizite Funktionen!).

Abbildung 1.2: Höhenlinien

Wir betrachten nun allgemein DGLen der folgenden Bauart

$$\boxed{M(t, y) + N(t, y)y' = 0} \quad (1.27)$$

dabei seien $M, N : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$ offen.

Definition 1.18

Die DGL (1.27) heisst **exakt**, wenn es $G : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $G_t := \frac{\partial G}{\partial t} = M, G_y := \frac{\partial G}{\partial y} = N$. \square

Nach unserer Vorüberlegung ist die Frage nach Lösungen der DGL (1.27) geklärt, wenn man folgende Fragen positiv beantworten kann:

- Ist die DGL (1.27) exakt ?
- Ist eine „Stammfunktion“ G von M, N angebar, d.h. gibt es $G : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $G_t = M, G_y = N$?
- Ist die Gleichung $G(t, y) = c$ nach y auflösbar ?

Der folgende Satz ist hilfreich für die ersten beiden Fragen, die letzte Frage lässt sich klären mit dem Satz über implizite Funktionen.

Satz 1.19

Sei $D = (a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2$ und seien $M, N : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Dann sind äquivalent:

(a) Es gibt $G : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit stetigen partiellen Ableitungen G_t, G_y, G_{yt}, G_{ty} so dass gilt:

$$G_t = M, G_y = N$$

(b) Es gilt das sogenannte **Integrabilitätskriterium**:

$$M_y = N_t$$

Beweis:

(a) \implies (b) Aus der Analysis wissen wir: $G_{yt} = G_{ty}$. Also $M_y = G_{ty} = G_{yt} = N_t$.

(b) \implies (a) Sei $(t_0, y_0) \in D$ beliebig und definiere eine „Stammfunktion“ von M, N durch

$$G(t, y) := \int_{t_0}^t M(s, y) ds + \int_{y_0}^y N(t_0, r) dr \quad (1.28)$$

Man rechnet nach : $G_t = M, G_y = N$. ■

Hinter der Formel (1.28) im Beweis zu Satz 1.19 verbirgt sich das Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} v d\gamma$$

wobei v das Vektorfeld (M, N) und γ eine Kurve von t_0 nach t parallel zur t -Achse und von y_0 nach y parallel zur y -Achse ist. Diesem Vektorfeld wird also mittels (1.28) ein skalares Feld G zugeordnet. Dies ist sinnvoll, da wegen des Integrabilitätskriteriums das Integral wegunabhängig ist.

Beispiel 1.20 Gegeben sei die AWA

$$3y + e^t + (3t + \cos y)y' = 0, y(0) = \pi$$

Die DGL ist exakt in $D := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, denn:

$$\begin{aligned} M(t, y) &= 3y + e^t, & M_y(t, y) &= 3; \\ N(t, y) &= 3t + \cos y, & N_t(t, y) &= 3; \end{aligned}$$

Wähle $(t_0, y_0) = (0, \pi)$. Mit (1.28):

$$G(t, y) = \int_0^t (3y + e^s) ds + \int_{\pi}^y \cos r dr = 3yt + e^t + \sin y$$

Also hat man nun Auflösungen von

$$G(t, y) = c \quad \text{d.h.} \quad 3yt + e^t + \sin y = c$$

aufzusuchen. Da eine Lösung y mit $y(0) = \pi$ gesucht wird, hat man dies für $c = 0$ zu tun. Also wird eine Lösung der AWA implizit gegeben durch:

$$3yt + \sin y = -e^t \quad (1.29)$$

Setzt man $F(t, y) := 3yt + \sin y$, so gilt $F_y(0, \pi) = -1$. Dies zeigt, dass (1.29) auflösbar ist in einer Umgebung von $(0, \pi)$. (Satz über implizite Funktionen.) \square

Aus dem Integrabilitätskriterium erkennt man, dass exakte DGLen wohl nicht sehr häufig unmittelbar vorliegen. Die Kunst wäre nun, eine nichtexakte DGL in eine äquivalente exakte DGL zu verwandeln. In vielen Fällen ist dies in der Tat möglich.

Beispiel 1.21 Betrachte erneut das Populationsmodell

$$y' - (a - by)y = 0$$

Diese DGL ist nicht exakt, denn

$$M(t, y) = -(a - by)y, \quad M_y \neq 0, \quad N(t, y) = 1, \quad N_t \equiv 0$$

Die „äquivalente“ DGL

$$1 - \frac{1}{(a - by)y} y' = 0$$

ist jedoch exakt !

Definition 1.22

Eine Funktion $m : D \rightarrow \mathbb{R}$ heisst **integrierender Faktor** der DGL (1.27), wenn gilt:

$$m(t, y) \neq 0 \text{ für alle } (t, y) \in D, \quad (1.30)$$

und

$$m(t, y)M(t, y) + m(t, y)N(t, y)y' = 0 \quad (1.31)$$

ist exakt. \square

Das Integrabilitätskriterium für die DGL (1.31) lautet

$$m_y M + m M_y = m_t N + m N_t \text{ in } D. \quad (1.32)$$

Um für den allgemeinen Fall einen integrierenden Faktor zu finden, müssten wir bei Verwendung von Satz 1.19 die partielle DGL (1.32) lösen. Dies ist jedoch i.a. nicht einfacher als (1.2) selbst zu lösen.

Beispiel 1.23

$$y + 2ty' = 0$$

Die obige DGL ist nicht exakt, jedoch die mit y multiplizierte Gleichung

$$y^2 + 2tyy' = 0$$

ist es, denn:

$$M(t, y) = y^2, M_y(t, y) = 2y, N(t, y) = 2ty, N_t(t, y) = 2y.$$

Dies bedeutet, dass $m(t, y) := y$ ein integrierender Faktor ist, wenn man $y = 0$ ausschließt. Wählt man $(t_0, y_0) = (1, 1)$, so erhält man (siehe (1.28))

$$G(t, y) = ty^2 - 1$$

und als eine Lösung

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, t > 0.$$

□

1.5 Implizite Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten nun einige Spezialfälle der allgemeinen impliziten DGL 1. Ordnung:²

$$F(t, y, y') = 0 \tag{1.33}$$

dabei ist $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $D \subset \mathbb{R}^3$.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei y eine Lösung von (1.33) in I . Dazu ist eine Kurve \mathcal{C} in \mathbb{R}^2 mit der Parameterdarstellung

$$\mathcal{C} : I \ni t \mapsto (t, y(t)) \in \mathbb{R}^2 \tag{1.34}$$

gegeben. Wir wollen nun zu einer Parameterdarstellung von \mathcal{C} mit $p := y'(t)$ als Parameter übergehen. Der Zusammenhang wird hergestellt durch

$$\dot{y}(p) = p \cdot \dot{t}(p); \tag{1.35}$$

dabei bedeutet $\dot{y}(p) = \frac{dy}{dp}(p)$, $\dot{t}(p) = \frac{dt}{dp}(p)$. Dies erhält man formal aus

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dp}$$

²Nicht vorgetragen

Beispiel 1.24 Betrachte

$$(y')^2 - 1 + y^2 = 0.$$

Eine Lösung in $[0, \pi]$ ist $y(t) := \sin t$. Die Darstellung (1.34) lautet:

$$[0, \pi] \ni t \mapsto (t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$$

Aus $p = y'(t) = \cos t$ folgt

$$t = \arccos p, y = \sqrt{1 - p^2}, -1 \leq p \leq 1,$$

und daraus

$$\dot{t}(p) = \frac{-1}{\sqrt{1 - p^2}}, \dot{y}(p) = \frac{-2}{\sqrt{1 - p^2}}.$$

□

Der Übergang von der kanonischen Parameterdarstellung (1.34) zur Darstellung mit dem Parameter p ist möglich, wenn die Gleichung

$$p = y'(t)$$

nach t auflösbar ist. Eine hinreichende Bedingung ist

$$y \text{ zweimal stetig differenzierbar, } y'(t) \neq 0, t \in I.$$

Dies bedeutet, dass „Geradenstücke“ wohl ein Problem darstellen. Nach dem Wechsel der Parameterdarstellung schreibt sich (1.1) so:

$$F(t(p), y(p), p) = 0 \tag{1.36}$$

Unser Vorgehen besteht nun darin, aus den Gleichungen (1.35) und (1.36) die Kurve \mathcal{C} in der Parameterdarstellung

$$p \mapsto (t(p), y(p))$$

zu ermitteln. Dieses Vorgehen demonstrieren wir an ausgewählten Beispielen.

Beispiel 1.25 Betrachte

$$g(y') - t = 0;$$

dabei sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir haben

$$t(p) = g(p), \dot{y}(p) = pg'(p),$$

und erhalten daraus

$$t(p) = g(p), y(p) = \int_{p_0}^p rg'(r)dr + c$$

□

Beispiel 1.26 Als nächstes Beispiel betrachten wir

$$g(y') - y = 0;$$

dabei sei $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir haben

$$y(p) = g(p), t(p) = \int_{p_0}^p \frac{g'(r)}{r} dr + c$$

Im Spezialfall

$$y' - y = 0$$

haben wir

$$y(p) = p, t(p) = \ln p + c.$$

Daraus erhält man dann

$$t(p) = \ln y(p) + c, y(t) = \tilde{c}e^t$$

□

Beispiel 1.27 Als weiteres Beispiel betrachten wir die sogenannte **Clairautsche DGL**:

$$y = ty' + g(y'); \quad (1.37)$$

dabei sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir haben

$$y(p) = tp + g(p), \dot{y}(p) = pt'(p)$$

und erhalten daraus

$$t(p) = -g'(p), y(p) = -g'(p)p + g(p) \quad (1.38)$$

Man beachte, dass für jedes $c \in \mathbb{R}$

$$y_c(t) := tc + g(c), t \in \mathbb{R}, \quad (1.39)$$

eine Lösung ist. □

Beispiel 1.28

$$y = ty' + e^{y'}.$$

(1.38) lautet

$$t(p) = -e^p, y(p) = e^p(1 - p) \quad (1.40)$$

und dies impliziert

$$y(t) = t(\ln(-t) - 1), t < 0. \quad (1.41)$$

Die Schar (1.39) ist hier:

$$y_c(t) = ct + e^c, t \in \mathbb{R}; c \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung (1.40) stellt also die Einhüllende (**Envelope**) der Schar (1.41) dar. □

Beispiel 1.29 Unser letztes Beispiel ist die **d'Alembertsche DGL**:

$$y = tf(y') + g(y'); \quad (1.42)$$

dabei seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir haben

$$y(p) = t(p)f(p) + g(p), \dot{y}(p) = p\dot{t}(p)$$

und erhalten daraus

$$\begin{aligned} \dot{y}(p) &= \dot{t}(p)f(p) + t(p)f'(p) + g'(p) \\ \dot{t}(p) &= \frac{1}{p - f(p)}t(p)f'(p) + g'(p) \quad , \text{ falls } p - f(p) \neq 0. \end{aligned}$$

□

Kapitel 2

Existenzsätze

In diesem Paragraphen behandeln wir AWAen für Systeme von gewöhnlichen DGLen 1. Ordnung in quantitativer Hinsicht: Existenz, Eindeutigkeit, Abhängigkeit der Lösung von Daten. Das Hilfsmittel ist der Banachsche Fixpunktsatz.

2.1 Aufgabenstellung und Beispiele

Im Kapitel 1 haben wir hauptsächlich DGLen der Form

$$y' = f(t, y) \quad f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

betrachtet. Am Populationsmodell 1.9 sehen wir, dass diese Allgemeinheit nicht ausreicht:

$$\begin{cases} y' = (az - b)y \\ z' = (c - dy)z \end{cases} \quad (2.1)$$

Da beide gesuchten Funktionen y, z in beiden rechten Seiten auftreten, kann man nicht erwarten, dass die beiden DGLen unabhängig voneinander gelöst werden können.

Wir betrachten nun:

$$y' = f(t, y) \quad (2.2)$$

Dabei ist $f : D \mapsto \mathbb{R}^n; D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Die Koordinatenfunktionen von f seien stets f_1, \dots, f_n . Wir bezeichnen (3.1) als ein **System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1.Ordnung**, häufig schreiben wir kurz DGL dafür.

Definition 2.1

Eine Abbildung $y : I \mapsto \mathbb{R}^n, I$ Intervall, mit Koordinatenfunktionen y_1, \dots, y_n heisst **Lösung** auf I , falls gilt:

- i) $(t, y(t)) \in D$ und y ist differenzierbar in $t \in I$;
- ii) $y'(t) = f(t, y(t)), t \in I$.

□

In Komponenten aufgeschrieben bedeutet „ $y'(t) = f(t, y(t))$ “ :

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{aligned}$$

Unmittelbar aus der Definition der Differenzierbarkeit folgt, dass $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann differenzierbar ist, wenn alle Komponentenfunktionen $y_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar sind.

Beispiel 2.2 Die explizite DGL n -ter Ordnung

$$y^{(n)} = g(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), g : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R},$$

lässt sich in ein System 1. Ordnung umschreiben:

$$y_1' = y_2, y_2' = y_3, \dots, y_{n-1}' = y_n, y_n' = g(t, y_1, \dots, y_n). \quad (2.3)$$

□

Beispiel 2.3 Eine Lösung des Systems

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch $y : \mathbb{R} \ni t \mapsto (t^2, 2t) \in \mathbb{R}$. Eigentlich haben wir es ursprünglich mit der DGL 2. Ordnung $y'' = 2$ zu tun, die gemäß Beispiel 2.2 umgeschrieben ist. □

Beispiel 2.4 Der Flug eines Raumgleiters (space shuttle) wird durch folgendes System von DGLen beschrieben:¹

$$\begin{aligned} v' &= -c_1 e^{-\beta h} v^2 - c_2 \left(\frac{R}{r+h} \right)^2 \sin \gamma \\ h' &= v \sin \gamma \\ \gamma' &= c_3 e^{-\beta h} v \cos \mu - \left(\frac{c_2 R^2}{v(R+h)^2} - \frac{v}{R+h} \right) \cos \gamma \\ \chi' &= c_3 e^{-\beta h} v \frac{\sin \mu}{\cos \gamma} - \frac{v}{R+h} \cos \gamma \cos \chi \tan \lambda \\ \lambda' &= \frac{v}{R+h} \cos \gamma \sin \chi \\ \vartheta' &= \frac{v}{R+h} \frac{\cos \gamma \cos \chi}{\cos \lambda} \end{aligned}$$

Dabei sind: v : Geschwindigkeit; h : Höhe; γ : Neigungswinkel der Flugbahn; χ, λ, ϑ : weitere Winkel; μ : Steuervariable; R Erdradius; c_1, c_2, c_3, β positive Konstanten. □

¹Num. Math. 26 (1976), 327-343

Kommt die unabhängige Variable t („Zeit“) in der rechten Seite des Systems (2.2) nicht vor, so heisst das System **autonom**. Formal sind autonome Systeme kein Spezialfall, denn durch Hinzufügen einer DGL zu einem System der Form (2.2) kann man dieses System in ein autonomes System umschreiben. Wir führen die „Zeit“ t als eine abhängige Variable y_{n+1} ein; die DGL dafür lautet:

$$y'_{n+1} = 1$$

Das resultierende System

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \\ y'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(y_{n+1}, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(y_{n+1}, y_1, \dots, y_n) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

ist autonom. Ein Zusammenhang der Lösungen von (2.4) und (2.2) läßt sich leicht finden.

Beispiel 2.5

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix}; \text{ Lösung: } y(t) = (t^2, 2t)$$

Das zugehörige autonome System lautet:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \text{ Lösung: } y(t) = (t^2, 2t, t)$$

Die zum System (2.2) gehörende **Anfangswertaufgabe (AWA)** lautet:

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0; \quad (2.5)$$

dabei sind $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^{n+1}, (t_0, y_0) \in D$.

Die Bedingung $y(t_0) = y_0$ bedeutet, dass zum (Anfangs-)Zeitpunkt t_0 das System sich im Zustand y_0 befindet.

An ein mathematisches Modell, das einen in Wirklichkeit ablaufenden kontinuierlichen Vorgang beschreiben soll, stellt man in der Regel die folgenden drei Forderungen:

1. Existenz: Das mathematische Modell soll eine Lösung besitzen.
2. Eindeutigkeit: Die Lösung soll eindeutig sein.
3. Stetige Abhängigkeit: Die Lösung soll stetig von „Daten“ (z.B. Anfangswerte, Parameter der rechten Seite) abhängen.

Sind 1,2,3 erfüllt, so spricht man von einem **sachgerecht gestellten** („well-posed“) **Problem** (Hadamard 1902)

2.2 Die Anfangswertaufgabe als Integralgleichung

Um die AWA (2.5) zu lösen, schreiben wir sie in eine Integralgleichung (IGL) um:

Lemma 2.6

Sei f stetig in D . Dann sind für eine stetige Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, I Intervall, äquivalent:

a) y ist in I Lösung der AWA (2.5):

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$$

b) y ist Lösung der IGL

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, t \in I. \quad (2.6)$$

Beweis:

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

a) \implies b) Für $1 \leq i \leq n$ und $s \in I$ gilt:

$$y'_i(s) = f_i(s, y(s)) \quad (2.7)$$

Da die rechte Seite in (2.7) eine stetige Funktion in s ist, dürfen wir integrieren und erhalten:

$$y_i(t) = y_i(t_0) + \int_{t_0}^t f_i(s, y(s)) ds, t \in I.$$

b) \implies a) Aus (3.4) folgt zunächst $y(t_0) = y_0$,

$$y_i(t) = y_i(t_0) + \int_{t_0}^t f_i(s, y(s)) ds, t \in I, 1 \leq i \leq n.$$

y_i ist als Stammfunktion einer stetigen Funktion differenzierbar, und es gilt:

$$y'_i(t) = f_i(t, y(t)), t \in I, 1 \leq i \leq n.$$

■

Der Hauptgrund, weshalb man die Behandlung der IGL (4.10) der direkten Behandlung der AWA (2.5) vorzieht, ist, dass für stetige Funktionen y die rechte Seite von (4.10) wieder eine stetige Funktion definiert, d.h. man kann durch

$$(Ty)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad (2.8)$$

einen „Integraloperator“ T definieren, der stetige in stetige (sogar stetig differenzierbare Funktionen) abbildet; das Integral ist natürlich komponentenweise zu bilden. Das Lösen der AWA (2.5) ist dann mit Lemma 2.6 zurückgeführt auf das Lösen von

$$y = Ty, \quad (2.9)$$

d.h. der Bestimmung eines **Fixpunktes** von T . Dies ist der Ansatzpunkt für die umfangreiche Theorie über Fixpunkte, die den überwiegenden Teil der **nichtlinearen Funktionsanalysis** ausmacht.

Beispiel 2.7 Betrachte $y' = y^2$, $y(0) = 0$

Die Fixpunktgleichung (4.10) bzw. (2.9) hat die Form

$$y(t) = (Ty)(t) := \int_0^t y(s)^2 ds, t \in I.$$

Wählt man etwa $I = [0, 1]$, $y_0(t) := t$, $t \in I$, so liefert die naheliegende Iteration

$$y_{n+1} := Ty_n, n \in \mathbb{N}.$$

folgende Folge:

$$y_1(t) = t, y_2(t) = \frac{1}{3}t^3, y_3(t) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{7}t^7, \dots$$

Man beachte, dass die Folge „sehr schnell“ gegen die Lösung $y \equiv 0$ in $[0, 1]$ konvergiert. \square

2.3 Der Fixpunktsatz von Banach

Wir begnügen uns damit, Existenzsätze für die Fixpunktgleichung (2.9) zu formulieren, die mit dem Fixpunktsatz von Banach beweisbar sind. Zunächst eine kurze Wiederholung von Begriffen, die wir zu seiner Formulierung benötigen:

Definition 2.8

Sei X ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ heisst **Norm auf X** , wenn

i) $\|x\| = 0 \iff x = \theta$ (θ Nullvektor in X)

ii) $\|\kappa x\| = |\kappa| \|x\|$ $\kappa \in \mathbb{R}, x \in X$.

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in X$.

gilt. X heisst dann zusammen mit $\|\cdot\|$ ein **normierter Raum**

Bekanntlich hat man auf \mathbb{R}^n folgende Schar von Normen (p -Normen):

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{falls } p \in [1, \infty) \\ \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, & \text{falls } p = \infty \end{cases}$$

Im folgenden schreiben wir für $\|x\|_\infty, x \in \mathbb{R}^n$, stets $|x|$.

In unserem Zusammenhang interessieren spezielle Normen im Vektorraum der stetigen Funktionen:

Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ kompakt (abgeschlossen und beschränkt); wir setzen:

$$C(G; \mathbb{R}^n) := \{v : G \rightarrow \mathbb{R}^n \mid v \text{ stetig in } G\}$$

Definiert man Addition und Skalarmultiplikation punktweise

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x), x \in G, \\ (\kappa f)(x) &:= \kappa f(x), x \in G, \end{aligned}$$

so ist $C(G; \mathbb{R}^n)$ offensichtlich ein reeller Vektorraum.

Für die Behandlung der IGL (4.10) benötigen wir eine Norm in $C(G; \mathbb{R}^n)$. Diese definieren wir in einer Weise, die Spielraum läßt, den wir später nutzen werden:

Sei $\omega \in C(G; \mathbb{R})$ gegeben; wir setzen für $f \in C(G; \mathbb{R}^n)$:

$$\|f\|_\omega := \max_{x \in G} |\omega(x)f(x)| \quad (2.10)$$

Lemma 2.9

Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ kompakt, sei $\omega \in C(G; \mathbb{R})$ und es gelte: $\omega(x) > 0, x \in G$. Dann wird in (2.10) eine Norm $\|\cdot\|_\omega$ auf $C(G; \mathbb{R}^n)$ definiert.

Beweis:

Die Definition (2.10) ist sinnvoll, da G kompakt ist (Existenz von \max !). Wir zeigen nur die Dreiecksungleichung: Seien $f, g \in C(G; \mathbb{R}^n)$; für $x \in G$ gilt

$$\omega(x)|f(x) + g(x)| \leq \omega(x)|f(x)| + \omega(x)|g(x)| \leq \|f\|_\omega + \|g\|_\omega.$$

Daraus folgt:

$$\|f + g\|_\omega \leq \|f\|_\omega + \|g\|_\omega.$$

■

Eine Funktion ω , wie sie zur Beschreibung von $\|\cdot\|_\omega$ in Lemma 2.9 verwendet wurde, heisst **Gewichtsfunktion**. Beispiele sind etwa:

$$\omega(x) := \exp(-|x|), \quad \omega(x) := 1 + |x|.$$

Die aus der Analysis in \mathbb{R} und \mathbb{R}^n bekannten topologischen Begriffe Konvergenz, Stetigkeit usw. lassen sich wörtlich auf normierte Räume übertragen:

Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Wir wiederholen:

- i) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergiert gegen** x ($x = \lim_n x_n$), wenn $\lim_n \|x_n - x\| = 0$ gilt.
- ii) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heisst **Cauchyfolge**, wenn $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N (\|x_m - x_n\| < \epsilon)$ gilt.
- iii) X heisst **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge in X gegen ein $x \in X$ konvergiert. Ein vollständiger normierter Raum heisst **Banachraum**.

- iv) Eine Teilmenge A von X heisst **abgeschlossen**, wenn aus $x_n \in A, n \in \mathbb{N}, \lim_n x_n = x$ schon $\implies x \in A$ folgt.

Lemma 2.10

Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ kompakt, sei $\omega \in C(G; \mathbb{R})$ und es gelte $\omega(x) > 0, x \in G$. Dann ist $(C(G; \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_\omega)$ ein Banachraum.

Beweis:

Wegen Lemma 2.9 ist nur die Vollständigkeit zu zeigen. Das Ergebnis ist wohlbekannt im Spezialfall $\omega = \omega_1$ mit $\omega_1(x) = 1, x \in G$. Sei $\alpha := \inf_{x \in G} \omega(x), \beta := \sup_{x \in G} \omega(x)$. Dann gilt

$$\alpha \|f\|_{\omega_1} \leq \|f\|_\omega \leq \beta \|f\|_{\omega_1}, f \in (G; \mathbb{R}^n).$$

Also folgt die Behauptung aus dem Spezialfall. ■

Definition 2.11

Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $U \subset X$. Eine Abbildung $T : U \rightarrow X$ heisst **Lipschitz-stetig** mit **Lipschitz-Konstante L** , wenn

$$\|Tx - Ty\| \leq L\|x - y\| \text{ für alle } x, y \in U$$

gilt. □

Nun sind wir in der Lage, den Banachschen Fixpunktsatz aufzuschreiben und zu beweisen:

Satz 2.12

Sei $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum, $U \subset X$ abgeschlossen und sei $T : U \rightarrow U$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L < 1$. Dann gilt:

- 1) Es gibt genau ein $x \in U$ mit $Tx = x$
- 2) Für die Fixpunktiteration

$$x^{n+1} := Tx^n, x^0 \in U \text{ beliebig} \tag{2.11}$$

gilt:

$$\|x - x^n\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x^1 - x^0\|, n \in \mathbb{N}, \text{ und } x = \lim_n x^n. \tag{2.12}$$

Beweis:

Eindeutigkeit: Seien $x, z \in U$ mit $Tx = x, Tz = z$.

$$\|x - z\| = \|Tx - Tz\| \leq L\|x - z\|$$

Wegen $L < 1$ folgt daraus $x = z$.

Existenz: Es gilt

$$\|x^{n+1} - x^n\| = \|Tx^n - Tx^{n-1}\| \leq L\|x^n - x^{n-1}\| \leq \dots \leq L^n \|x^1 - x^0\|$$

und daraus

$$\begin{aligned} \|x^{n+k} - x^n\| &= \left\| \sum_{j=0}^{k-1} (x^{n+k-j} - x^{n+k-j-1}) \right\| \leq \sum_{j=0}^{k-1} \|x^{n+k-j} - x^{n+k-j-1}\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-1} L^{n+k-j-1} \|x^1 - x^0\| \leq L^n \|x^1 - x^0\| \sum_{j=0}^{k-1} L^{k-j-1} \\ &\leq \frac{L^n}{1-L} \|x^1 - x^0\| \end{aligned}$$

Nun folgt, dass $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Da X Banachraum ist, gibt es $x \in X$ mit $x = \lim_n x_n$. Da U abgeschlossen ist, gilt $x \in U$. Wir zeigen $Tx = x$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\|x - Tx\| = \|x - x^{n+1} + x^{n+1} - Tx\| \leq \|x - x^{n+1}\| + \|x^{n+1} - Tx\| \leq \|x - x^{n+1}\| + L\|x^n - x\|.$$

Da $x = \lim_n x_n$ ist, folgt $\|x - Tx\| = 0$.

Die Abschätzung in (2.12) folgt nun aus der erhaltenen Abschätzung mit $k \rightarrow \infty$. ■

2.4 Der Satz von Picard–Lindelöf

Wir beziehen uns auf die AWA (2.5) und die zugehörige IGL (4.10).

Satz 2.13

Sei $D' := [t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n \subset D$, $a > 0$. Es gelte:

- i) f ist stetig in D' .
- ii) $\exists L > 0 \forall (t, y), (t, \bar{y}) \in D' (|f(t, y) - f(t, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|)$

Dann besitzt die Anfangswertaufgabe (2.5)

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$$

genau eine Lösung in $I := [t_0, t_0 + a]$.

Beweis:

Wir benützen den Banachschen Fixpunktsatz 2.12 und zeigen damit, dass die zugehörige IGL (4.10)

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, t \in I$$

genau eine Lösung $y \in C(I; \mathbb{R}^n)$ besitzt. Wir wählen:

Banachraum: $X := C(I; \mathbb{R}^n)$, $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\omega$, wobei $\omega(t) := e^{-2Lt}$, $t \in I$.

Abbildung $T : U := C(I; \mathbb{R}^n)$, $T : U \rightarrow U$ definiert durch

$$(Ty)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, t \in I.$$

Zu überprüfen ist die Lipschitz–Stetigkeit von T :

$$\begin{aligned}
 |(Tx)(t) - (Ty)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right| \\
 &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\
 &\leq \int_{t_0}^t L|x(s) - y(s)| e^{-2Ls} e^{2Ls} ds \\
 &\leq \int_{t_0}^t L\|x - y\| e^{2Ls} ds = L\|x - y\| \int_{t_0}^t e^{2Ls} ds \\
 &\leq \|x - y\| \frac{1}{2} e^{2Lt}
 \end{aligned}$$

Also

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| e^{-2Lt} \leq \frac{1}{2} \|x - y\|$$

und daher

$$\|Tx - Ty\| \leq \frac{1}{2} \|x - y\|.$$

T ist also L -stetig mit L -Konstante $\frac{1}{2}$.

Nach Satz 2.12 gibt es genau ein $y \in C(I; \mathbb{R}^n)$, mit $y = Ty$. Aus Lemma 2.6 folgt: y ist die einzige Lösung der AWA. ■

Bemerkung 2.14

Eine entscheidende Voraussetzung in Satz 2.26 ist die Bedingung

$$\exists L > 0 \forall (t, y), (t, \bar{y}) \in D' (|f(t, y) - f(t, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|).$$

In Worten : f ist L -stetig bezüglich y gleichmäßig bezüglich t . □

Bemerkung 2.15

Der Fixpunktsatz 2.12 ist konstruktiv. Auf Satz 2.26 übertragen bedeutet dies, dass die Iteration

$$x^0 \in C(I; \mathbb{R}^n), x^{n+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, x^n(s)) ds, t \in I,$$

bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\omega$ gegen eine Lösung konvergiert. Als Startfunktion wählt man i.a. $x^0 := y_0$. □

Beispiel 2.16 Betrachte die Anfangswertaufgabe $y' = y, y(0) = 1$ mit Lösung $y(t) = e^t, t \in \mathbb{R}$.

Hier ist $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(t, y) = y, y_0 = 1$, und wegen $|f(t, y) - f(t, \bar{y})| = |y - \bar{y}|$ ist f

L -stetig in y gleichmäßig bezüglich t . Als „Picard-Iterierte“ ergeben sich ausgehend von $x^0 := 1$:

$$x^1(t) = 1 + \int_0^t x^0(s) ds = 1 + t, \quad x^2(t) = 1 + \int_0^t (1+s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}, \dots, \quad x^n(t) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} t^j.$$

Also stellt x^n gerade die n -te Partialsumme der Reihenentwicklung der Lösung $t \mapsto e^t$ dar. \square

Beispiel 2.17 Betrachte die Anfangswertaufgabe $y' = y^2, y(0) = 1$.

Hier ist Satz 2.26 nicht anwendbar, da

$$|f(t, y) - f(t, \bar{y})| = |y - \bar{y}| |y + \bar{y}|$$

gilt. Die Lösung $y(t) = (1 - t)^{-1}$ hat einen Pol in $t = 1$. \square

Bei differenzierbarer rechter Seite f kann man eine einfache hinreichende Bedingung für die L -Stetigkeit von f formulieren:

Lemma 2.18

Sei $D' \subset D$ konvex (d.h. $\lambda d + (1 - \lambda)\tilde{d} \in D'$ falls $d, \tilde{d} \in D', \lambda \in [0, 1]$) und seien die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j}, 1 \leq i, j \leq n, \quad (f_i \text{ Koordinaten von } f)$$

stetig und beschränkt in D' . Dann gilt:

$$\exists L > 0 \forall (t, y), (t, \bar{y}) \in D' (|f(t, y) - f(t, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|)$$

Beweis:

Sei $M \in \mathbb{R}$ mit $|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t, y)| \leq M, (t, y) \in D', 1 \leq i, j \leq n$. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung liefert für $1 \leq i \leq n$:

$$f_i(t, y) = f_i(t, \bar{y}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t, \bar{y} + \vartheta_i(y - \bar{y}))(y_j - \bar{y}_j), \vartheta_i \in (0, 1), (t, y), (t, \bar{y}) \in D'.$$

Daraus folgt für $(t, y), (t, \bar{y}) \in D'$:

$$|f_i(t, y) - f_i(t, \bar{y})| \leq M \sum_{j=1}^n |y_j - \bar{y}_j| \leq Mn|y - \bar{y}|.$$

Dies bedeutet mit $L := Mn$

$$|f_i(t, y) - f_i(t, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|, (t, y), (t, \bar{y}) \in D'$$

■

Der Satz 2.26 behandelt den Fall, dass D einen Streifen $[t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n$ enthält, d.h. die rechte Seite ist in einem Streifen des \mathbb{R}^{n+1} definiert. Wir wollen nun den schwierigeren Fall betrachten, dass D nur ein Rechteck enthält.

Satz 2.19

Sei $D' := [t_0, t_0 + a] \times B \subset D$, wobei $a > 0$ und $B := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - y_0| \leq r\}$ mit $r > 0$.
Es gelte

i) f ist stetig in D' ;

ii) $\exists L > 0 \forall (t, y), (t, \bar{y}) \in D' (|f(t, y) - f(t, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|)$.

Dann besitzt die AWA

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$$

genau eine Lösung in $I := [t_0, t_0 + \alpha]$, wobei $\alpha := \min(a, \frac{r}{M})$, $M := \max_{(t,y) \in D} |f(t, y)|$ ist.

Beweis:

Wir wenden erneut den Banachschen Fixpunktsatz 2.12 an. Dazu setzen wir:

$$X := C(I; \mathbb{R}^n);$$

$$\|\cdot\| := \|\cdot\|_\omega \text{ wobei } \omega(t) := e^{-2Lt}, t \in I;$$

$$U := \{x \in X \mid |x(t) - y_0| \leq M|t - t_0|, t \in I\}$$

und

$$(Ty)(t) := y + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, t \in I.$$

Wir wissen schon, daß $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist. Ferner ist offenbar U abgeschlossen, denn es gilt ja die Abschätzung

$$e^{2L(t_0+a)} \|x\|_\omega \geq \|x\|_\infty := \max_{t \in I} |x(t)|$$

für jedes $x \in X$.

Ist $x \in U$, so gilt $(t, x(t)) \in D', t \in I$, denn:

$$|x(t) - y_0| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq M \frac{r}{M} = r.$$

Wir haben $T(U) \subset U$, denn für $x \in U$ erhalten wir

$$|Tx(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \leq M \int_{t_0}^t ds = M(t - t_0), t \in I.$$

Wie im Beweis zu Satz 2.26 folgt, daß T L -stetig ist mit Lipschitzkonstante $L = \frac{1}{2}$.
Die Anwendung von Satz 2.12 ergibt zusammen mit Lemma 2.6 die Behauptung. ■

Bemerkung 2.20

Die Sätze 2.26 und 2.19 gelten auch rückwärts in der Zeit. Man kehre die Zeit um und betrachte $y' = \tilde{f}(t, y), y(t_0) = y_0$, mit $\tilde{f}(t, y) := -f(2t_0 - t, y)$. □

Wir verwenden folgende **Bezeichnung**: $B_r(z) := \{w \in \mathbb{R}^m \mid |w - z| \leq r\}; r \geq 0$.

Definition 2.21

Die Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ heisst **lokal L -stetig bzgl. y gleichmäßig in t** , wenn gilt:

$$\forall (t, y) \in D \exists r > 0 \forall (\bar{t}, \bar{y}), (\bar{t}, \tilde{y}) \in D \cap B_r(t, y) (|f(\bar{t}, \bar{y}) - f(\bar{t}, \tilde{y})| \leq L|\bar{y} - \tilde{y}|)$$

□

Definition 2.22

Wir sagen, dass die AWA (2.5) eine **lokale Lösung** besitzt oder **lokal lösbar** ist, wenn es $\alpha > 0$ gibt, so dass 2.5 eine Lösung in $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ besitzt. □

Aus Satz 2.19 können wir nun als wichtigstes Ergebnis dieses Abschnitts den folgenden **lokalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz** ableiten.

Satz 2.23

Sei D offen², f stetig in D und sei f lokal L -stetig bezüglich y gleichmäßig in t . Dann ist die AWA

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0, (t_0, y_0) \in D,$$

lokal eindeutig lösbar.

Beweis:

Da D offen ist, gibt es ein Rechteck

$$[t_0 - a, t_0 + a] \times B_r(y_0) \subset D, r > 0, 0 < a,$$

in dem f L -stetig bzgl. y gleichmäßig in t ist. Anwendung von Satz 2.19 (siehe Bemerkung 2.20) liefert eine eindeutige Lösung in einem Intervall $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. ■

Beispiel 2.24 Betrachte die AWA $y' = y^2, y(t_0) = y_0$. Da die rechte Seite der DGL stetig differenzierbar ist, liegt lokale L -Stetigkeit vor. Also besitzt die AWA eine lokale Lösung, die eindeutig ist. Man beachte aber, dass die rechte Seite nicht (global) L -stetig bzgl. y gleichmäßig in t ist; siehe Beispiel 2.17. □

Beispiel 2.25 Für das Populationsmodell

$$y' = (az - b)y, z' = (c - dy)z$$

folgt, dass eine zugehörige AWA eine lokal eindeutige Lösungen besitzt. □

Man kann jeden der Sätze 2.26, 2.19, 2.23 als Satz vom Typ ‘‘Picard–Lindelöf’’ bezeichnen. Der Beweis geht auf Picard (1893) zurück. Die Fixpunktiteration findet sich bereits bei Liouville (1838) in Zusammenhang mit linearen DGLen 2. Ordnung. Wir beziehen uns auf die AWA (2.5) und die zugehörige IGL (4.10).

Satz 2.26

Sei $D' := [t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n \subset D, a > 0$. Es gelte:

² D ist offen, wenn $\mathbb{R}^{n+1} \setminus D$ abgeschlossen ist.

i) f ist stetig in D' .

ii) $\exists L > 0 \forall (t, y), (t, \bar{y}) \in D' (|f(t, y) - f(t, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|)$

Dann besitzt die Anfangswertaufgabe (2.5)

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$$

genau eine Lösung in $I := [t_0, t_0 + a]$.

Hier ist noch ein Satz 2.26 entsprechender Existenzsatz, der allerdings nur Existenz einer Lösung bereitstellt. Er stützt sich zur Lösung der zugehörigen Integralgleichung 4.10 auf den **Schauderschen Fixpunktsatz**.³

Satz 2.27 (Existenzsatz von Peano)

Sei $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und beschränkt. Dann gibt es zu $t_0 \in (a, b), y_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung $y : (t_0 - \tau, t_0 + \tau) \rightarrow \mathbb{R}^n, \tau > 0$ geeignet, der Anfangswertaufgabe (2.5):

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$$

Beweis:

Wir stecken den Rahmen ab:

$$C([a, b]; \mathbb{R}^n) := \{h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \mid h \text{ stetig}\};$$

$$\text{für } h \in C([a, b]; \mathbb{R}^n): \|h\|_\infty := \max_{t \in [a, b]} |h(t)|;$$

$$T : C([a, b]; \mathbb{R}^n) \ni x \mapsto y_0 + \int_0^{\cdot} f(s, x(s)) ds \in C([a, b]; \mathbb{R}^n).$$

Damit wird $C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ mit $\|\cdot\|_\infty$ zu einem vollständigen normierten Raum und wir haben nun mit $M := \sup_{(t, \xi) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n} |f(t, \xi)|$:

- $|(Tx)(t)| \leq |y_0| + (b - a)M, t \in [a, b]$, für $x \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$. Also ist das Bild von T beschränkt.
- Aus

$$|Tx(t_1) - Tx(t_2)| \leq |t_2 - t_1|M, t_1, t_2 \in [a, b],$$

für alle $x \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$, folgt, dass das Bild von T gleichgradig stetig ist.

Also liegt das Bild von T in einer kompakten Teilmenge von $C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ (Satz von Arzela/Ascoli). Nach dem Fixpunktsatz von Schauder besitzt T einen Fixpunkt. ■

Bemerkung 2.28

In Satz 2.27 haben wir nun einen Existenzsatz, der keine Eindeutigkeitsaussage macht. Man kann Eindeutigkeit einer (lokalen) Lösung der AWA 2.5 mit dem Kriterium von Bompiani/Perron (1925) nachweisen: Es herrscht Eindeutigkeit, falls gilt:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \omega(|x - y|) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |x - y_0| < r, |y - y_0| < r; \quad (2.13)$$

$$\omega : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig, } \omega \geq 0, \omega(0) = 0; \quad (2.14)$$

$$\varphi' = \omega(\varphi), \varphi(0) = 0 \text{ hat nur die triviale Lösung.} \quad (2.15)$$

³Siehe:

Eine Bedingung der Art (2.13) ist sicherlich erfüllt, wenn

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in K,$$

für jede Kugel $K \subset \mathbb{R}^n$ gilt. Dass die Anfangswertaufgabe

$$\varphi' = \omega(\varphi), \varphi(0) = 0$$

in dieser Situation ($\varphi(r) := Lr$) nur die triviale Lösung hat, ist dann klar. \square

2.5 Fortsetzung von Lösungen

In diesem Abschnitt wollen wir klären, wann sich lokale Lösungen auf größere Intervalle forsetzen lassen und wie weit dies möglich ist.

Satz 2.29

Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal L -stetig in y gleichmäßig in t . Für $(t_0, y_0) \in D$ betrachte die AWA

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0. \quad (2.16)$$

- i) Sind y^1, y^2 Lösungen von (2.16) im Intervall I mit $t_0 \in I$, so gilt $y^1(t) = y^2(t), t \in I$.
- ii) Es gibt ein offenes Intervall I^* und eine Lösung y von (2.16) in I^* , so dass für jede Lösung $z : I \rightarrow \mathbb{R}^n, t_0 \in I$, von (2.16) gilt: $I \subset I^*, y|_I = z$.

Beweis:

Sei $I = [a, b]$; andere Fälle behandelt man analog.

Wir zeigen nur $y^1|_{[t_0, b]} = y^2|_{[t_0, b]}$, analog beweist man $y^1|_{[a, t_0]} = y^2|_{[a, t_0]}$. Setze

$$t^* := \sup\{t \in [t_0, b] \mid y^1(s) = y^2(s), t_0 \leq s < t\}.$$

Annahme: $t^* < b$.

Da y^1, y^2 stetig sind, gilt $y^1(t^*) = y^2(t^*) =: y^*$. Mit Satz (2.23) erhalten wir ein $t_1 > t^*$, so dass die AWA

$$y' = f(t, y), y(t^*) = y^*$$

eindeutig lösbar in $[t^*, t_1]$ ist. Also muss

$$y^1(t) = y^2(t), t \in [t^*, t_1],$$

gelten. Dies ist im Widerspruch zur Definition von t^* .

Setze

$$\mathcal{F} := \{I \mid I \text{ Intervall}, t_0 \in I, \exists \text{ Lösung } y^I \text{ von (2.16) in } I\}, I^* := \cup_{I \in \mathcal{F}} I.$$

- a) Offensichtlich ist I^* wieder ein Intervall mit $t_0 \in I^*$.
- β) Wegen Satz (2.23) muss I^* offen sein, denn in einem Randpunkt von I^* , der zu I^* gehört, kann man Lösungen fortsetzen.

γ) Wir definieren $y : I^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$y(t) := y^I(t), \text{ falls } t \in I \text{ mit } I \in \mathcal{F}.$$

Wegen der Eindeutigkeit von Lösungen ist diese Definition sinnvoll. Für jedes $t \in I$ genügt y offensichtlich der IGL

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

y ist daher Lösung von (2.16) und nach Konstruktion ist I^* maximal. ■

I^* aus Satz 2.29 heisst **maximales Existenzintervall**. Das maximale Existenzintervall kann die Form

$$(-\infty, b), (a, b), (a, \infty), (-\infty, \infty)$$

haben.

Beispiel 2.30 Wir betrachten

Differentialgleichung:	$y' = 1 + y^2$	$y' = y^2$	$y' = y^2 - 1$
Anfangswerte:	$y(0) = 0$	$y(0) = 1$	$y(0) = 0$
Lösung:	$y(t) = \tan t$	$y(t) = \frac{1}{1-t}$	$y(t) = \tanh t$
Maximales Existenzintervall I^* :	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(-\infty, 1)$	$(-\infty, \infty)$

In allen Fällen ist die rechte Seite der DGL stetig differenzierbar (also lokal L -stetig), aber nicht L -stetig in $D = I \times \mathbb{R}$. □

Beispiel 2.31 Betrachte die AWA

$$y' = y^{-1}, y(0) = 1,$$

mit Lösung $y(t) := \sqrt{2t + 1}$ und maximalem Existenzintervall $I = (-\frac{1}{2}, \infty)$.

Hier ist $D = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ und

$$\lim_{t \rightarrow -\frac{1}{2}} (t, y(t)) = (-\frac{1}{2}, 0) \in \partial D \text{ } (\partial D \text{ Rand von } D).$$

□

Aus den Beispielen 2.30 lassen sich drei verschiedene Fälle für das Verhalten der Lösung y im maximalen Existenzintervall erkennen:

1. Die Lösung existiert für alle $t > t_0$.
2. Es gibt $b > t_0$ mit $\lim_{t \nearrow b} |y(t)| = \infty$
3. Es gibt $b > t_0$ mit $\lim_{t \nearrow b} \text{dist}(\partial D, (t, y(t))) = 0$; dabei ist ∂D der Rand von D und dist die **Abstandsfunktion**, d.h. $\text{dist}(\partial D, z) = \inf\{|w - z| \mid w \in \partial D\}$

Aus dem nächsten Satz kann man schließen, dass damit schon alle möglichen Fälle beschrieben sind.

Satz 2.32

Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal L -stetig bezüglich y gleichmäßig in t . Sei y Lösung der AWA

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0 \quad ((t_0, y_0) \in D),$$

im maximalen Existenzintervall I . Dann gilt: Keine kompakte Teilmenge von D enthält den Graphen $\{(t, y(t)) | t \in I\}$ von y .

Beweis:

Sei $I = (a, b)$ (siehe Satz 2.29).

Annahme: $K \subset D$ kompakt mit $\{(t, y(t)) | t \in I\} \subset K$.

Da K beschränkt ist, gilt $-\infty < a < b < \infty$.

Da f stetig ist, existiert $M := \max_{(t,y) \in K} |f(t, y)|$ und für beliebige $t, \tau \in [t_0, b)$ gilt:

$$|y(t) - y(\tau)| = \left| \int_{\tau}^t f(s, y(s)) ds \right| \leq M|t - \tau|. \quad (2.17)$$

Es existiert $y_b := \lim_{t \nearrow b} y(t)$, denn:

Ist $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim t_n = b$, so ist $(y(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ wegen Abschätzung (2.17) eine Cauchyfolge, d.h. $y_b := \lim_n y(t_n)$ existiert. Ist $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls eine Folge mit $\lim_n s_n = b$, so gilt wegen (2.17) $\lim_n y(s_n) = y_b$ ($\lim_n y(t_n) - y(s_n) = 0!$).

Setzt man y zu \tilde{y} in folgender Weise

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t) & , t \in [t_0, b) \\ y_b & , t = b \end{cases}$$

fort, so gilt

$$\tilde{y}(t) = y_b + \int_b^t f(s, \tilde{y}(s)) ds, \quad t \in [t_0, b].$$

Da K abgeschlossen ist, ist $(b, y_b) \in K$, also $(b, y_b) \in D$. Nach Satz 2.23 gibt es eine Lösung der AWA

$$y' = f(t, y), y(b) = y_b$$

in einem Intervall $[b, b + \alpha]$, $\alpha > 0$. Dies ist jedoch im Widerspruch zur Definition von b . ■

2.6 Diskussion eines Populationsmodells

Wir betrachten hier die AWA für ein Populationsmodell für zwei Spezies (Modell von Volterra–Lotka):

$$\begin{cases} y' = (az - b)y & , y(0) = y_0 \\ z' = (c - dy)z & , z(0) = z_0 \end{cases} \quad (a, b, c, d > 0).$$

Aus Beispiel 3.20 wissen wir, dass lokal eindeutige Lösbarkeit vorliegt. Wir erledigen zunächst **Spezialfälle**:

- A) $y_0 < 0$ und/oder $z_0 < 0$: Uninteressant (Biologie !)
- B) $y_0 = 0, z_0 = 0$: Lösung : $y \equiv z \equiv \theta$.
- C) $y_0 = \frac{c}{d}, z_0 = \frac{b}{a}$: Lösung : $y \equiv \frac{c}{d}, z \equiv \frac{b}{a}$
- D) $y_0 > 0, z_0 = 0$: Lösung : $z \equiv \theta, y(t) = y_0 \exp(-bt), t \geq 0$.
- E) $y_0 = 0, z_0 > 0$: Lösung : $y \equiv \theta, z(t) = z_0 \exp(ct), t \geq 0$.

In den Fällen B) bis E) existiert also stets eine Lösung in $[0, \infty)$. Wir wenden uns nun dem verbliebenen interessantesten Fall zu:

$$y_0 > 0, y_0 \neq \frac{c}{d}, z_0 > 0, z_0 \neq \frac{b}{a}$$

Sei I das maximale Lösungsintervall und sei (y, z) die zugehörige (maximale) Lösung. Da I offen ist (siehe Satz 2.29), ist $I := I \cap [0, \infty)$ von der Form $[0, \alpha), 0 < \alpha \leq \infty$. Naheliegende Fragen sind:

- $\alpha = \infty$?
- Stirbt eine Spezies aus ?
- Liegt periodisches „Wachstum“ vor ?

Wir können sie vollständig beantworten.

Die Vorzeichenstruktur von y', z' teilt den 1. Quadranten der $y-z$ -Ebene in vier Sektoren auf:

Es gilt: $y(t) > 0, z(t) > 0, t \in I$.

Annahme:

$z(\tau) = 0, y(\tau) \geq 0, z(\tau) > 0, \tau \in [0, \tau); \tau \in I$. Abbildung 2.1: “Vorzeichenstruktur im Modell

Wegen $z'(\tau) = z''(\tau) = 0$ (folgt aus den DGLen)
hat man für die AWA

$$y' = (az - b)y, y(t_0) = \tilde{y}_0, z' = (c - dy)z, z(t_0) = 0$$

mit $\tilde{y}_0 = y(\tau), t_0 = \tau$ zwei lokale Lösungen (siehe D)). Dies ist im Widerspruch zur lokalen Eindeutigkeit. Den Fall

$$y(\tau) = 0, z(\tau) \geq 0, y(\tau) > 0, \tau \in [0, \tau), \tau \in I$$

diskutiert man analog.

Sei $\tau \in I$ mit $y(\tau) \neq \frac{c}{d}$. In einer Umgebung $V = (\tau - \epsilon, \tau + \epsilon)$ von τ gilt dann $z'(t) \neq 0, t \in V$. Also ist $t \mapsto z(t)$ umkehrbar in V . Wir können daher die Kurve

$$V \ni t \mapsto (y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^2$$

durch eine Parameterdarstellung mit dem Parameter z (\cdot bedeutet Ableitung bezüglich z) darstellen:

$$(az - b)y = (c - dy)z\dot{y}, y' = z'\dot{y}, (az - b)y = (c - dy)z\dot{y}.$$

Damit folgt

$$\left(a - \frac{b}{z}\right) - \left(\frac{c}{y} - d\right)y' = 0.$$

Dies ist eine DGL mit der unabhängigen Variablen z und der abhängigen Variablen y . Da sie exakt ist, erhält man nach (1.19) als „Stammfunktion“

$$\begin{aligned} G(z, y) &= \int_{z_0}^z \left(a - \frac{b}{s}\right) ds - \int_{y_0}^y \left(\frac{c}{r} - d\right) dr \\ &= a(z - z_0) + d(y - y_0) - \ln(z^b y^c) + \ln(z_0^b y_0^c) \end{aligned}$$

Es gilt: Die Lösung (y, z) daher ist in I implizit gegeben durch

$$\frac{y^c}{e^{dy}} \cdot \frac{z^b}{e^{az}} = K_0 \text{ wobei } K_0 := \frac{y_0^c}{e^{dy_0}} \cdot \frac{z_0^b}{e^{az_0}}. \tag{2.18}$$

Dies folgt aus den Vorüberlegungen, da lokal immer $z' \neq 0$ oder $y' \neq 0$ gilt.

Die Kurve $I \ni t \mapsto (y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^2$ bewegt sich im 1. Quadranten. Wir wollen nun sehen, dass sie im Uhrzeigersinn die Sektoren I,II,III, IV, I, ... durchläuft.

Sei $0 < y_0 < \frac{c}{d}, \frac{b}{a} < z_0$ ($(y_0, z_0) \in$ Sektor I), seien $u := (az_0 - b) > 0, v := (c - dy_0) > 0$ und sei $\tau \in I$ maximal mit der Eigenschaft

$$y(t) < \frac{c}{d}, z(t) > \frac{b}{a}, t \in I_1 := [0, \tau).$$

Da die Lösungskomponenten y und z in I_1 monoton wachsend sind, gilt für $t \in I_1$

$$\frac{d}{dt} \ln y(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} = az(t) - b \geq u, \quad \frac{d}{dt} \ln z(t) = \frac{z''(t)}{z(t)} = c - dy(t) \leq v,$$

und daher

$$y_0 e^{ut} \leq y(t) \leq \frac{c}{d}, t \in I_1, \quad z_0 e^{vt} \geq z(t) \geq \frac{b}{a}, t \in I_1$$

Es gilt: $I = [0, \infty)$ und die Lösung wechselt in endlicher Zeit im Uhrzeigersinn von einem Sektor zum benachbarten.

Aus (2.6) folgt, dass die Lösung, wenn sie im Sektor I startet, nach endlicher Zeit in den Sektor II laufen muss. Dabei ist berücksichtigt, dass das Lösungsintervall so groß sei, dass dieser Zeitpunkt eintritt. Analoge Betrachtungen angewendet in jedem Sektor implizieren $I = [0, \infty)$.

Wir setzen: $f(y) := y^c e^{-dy}, g(z) := z^b e^{-az}, y > 0, z > 0$. Man sieht sofort, dass f und g durch folgende Skizzen qualitativ richtig dargestellt sind:

Abbildung 2.2: Hilfsfunktionen

Wir setzen $M_y := f\left(\frac{c}{d}\right), M_z := g\left(\frac{b}{a}\right).$

Es gilt: Die Kurve $I \ni t \mapsto (y(t), z(t))$ ist geschlossen. Abbildung 2.3: Eine Lösung im Populationsmodell

Wir wissen, dass die Kurve $I \ni t \mapsto (y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^2$ auf der Kurve liegt, die durch (2.18) dargestellt wird. Wir

zeigen, dass die Kurve, die impliziert durch (2.18) beschrieben wird, geschlossen ist:
 $K_0 > M_y M_z$: Kein $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt (2.18).

$K_0 = M_y M_z$: $(y, z) = (\frac{c}{d}, \frac{b}{a})$ ist die eindeutige Lösung von (2.18).

$K_0 < M_y M_z$, d.h. $K_0 = \kappa M_z$ mit $\kappa \in (0, M_y)$. Die Skizzen in Abbildung 2.2 zeigen:

$$f(y_1) = f(y_2) = \kappa \text{ mit } y_1 < \frac{c}{d} < y_2, g(z) = \kappa M_z f(y)^{-1}$$

hat keine Lösung für $y < y_1, y > y_2$, genau eine Lösung für $y = y_1, y = y_2$, genau zwei Lösungen für $y \in (y_1, y_2)$; die Lösungen hängen stetig von y ab.

Den bisher dargestellten Sachverhalt haben wir in Abbildung 2.3 festgehalten. Weiterhin haben wir:

Es gilt: Es gibt ($T > 0$ Periode T) mit

$$y(t+T) = y(t), z(t+T) = z(t), t \in [0, \infty).$$

Kapitel 3

Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern

Wir wollen hier Resultate bereitstellen, die es uns ermöglichen, auch die dritte Forderung für ein sachgemäßes (korrekt) gestelltes Problem (siehe Abschnitt 2.1) zu diskutieren.

3.1 Das Lemma von Gronwall

Beispiel 3.1 Die AWA

$$y' = by, y(0) = a$$

hat die Lösung $y(t) := ae^{bt}, t \in \mathbb{R}$. „Stören“ wir die AWA zu

$$y' = by, y(0) = a + \epsilon,$$

so erhalten wir die Lösung $y_\epsilon(t) := (a + \epsilon)e^{bt}, t \in \mathbb{R}$, und damit

$$|y_\epsilon(t) - y(t)| = |\epsilon|e^{bt}, t \in \mathbb{R}.$$

Die Störung pflanzt sich also exponentiell fort. Auf jedem kompakten Intervall konvergiert y_ϵ für $\epsilon \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen y . \square

In diesem Abschnitt wollen wir ein Hilfsmittel bereitstellen, das uns die Abschätzung von Störungen in den Anfangswerten in den Lösungen für bestimmte rechte Seiten ermöglicht. Dies ordnet sich einem allgemeinen Problem unter:

Aus Ungleichung für die Daten (Anfangswerte) soll auf Ungleichungen für die Lösung geschlossen werden.

Die Abschätzungen nehmen wir an der einer AWA zugeordneten IGL vor.

Lemma 3.2

Sei $I := [t_0, t_1]$, seien $a, b, x, w : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $b(t) \geq 0$ für alle $t \in I$. Dann folgt aus

$$x(t) < a(t) + \int_{t_0}^t b(s)x(s)ds, \quad w(t) = a(t) + \int_{t_0}^t b(s)w(s)ds, \quad t \in I,$$

die Abschätzung

$$x(t) < w(t), t \in I.$$

Beweis:

Setze $t^* := \sup\{\tau \in I \mid x(t) < w(t) \text{ für alle } t \in [t_0, \tau)\}$. Da $b(t) \geq 0$ und $x(t) \leq w(t)$, $t \in [t_0, t^*)$ gilt, folgt

$$x(t^*) < a(t^*) + \int_{t_0}^{t^*} b(s)x(s)ds \leq a(t^*) + \int_{t_0}^{t^*} b(s)w(s)ds = w(t^*).$$

Annahme: $t^* < t_1$.

Da $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $x(t^*) < w(t^*)$ ist, gibt es $\delta > 0$, so dass $x(t) < w(t)$, $t \in [t^*, t^* + \delta)$. Dies ist im Widerspruch zur Definition von t^* . ■

Satz 3.3

Sei $I := [t_0, t_1]$, seien $a, b, x : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, sei $b(t) \geq 0$, $t \in I$, und es gelte

$$x(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^t b(s)x(s)ds, \quad t \in I.$$

Dann gilt:

$$x(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^t a(s)b(s) \exp(B(t) - B(s))ds \quad \text{mit } B(t) := \int_{t_0}^t b(s)ds, \quad t \in I. \quad (3.1)$$

Beweis:

Sei $\epsilon > 0$. Setze $a_\epsilon(t) := a(t) + \epsilon$, $t \in I$. Dann gilt nach Voraussetzung

$$x(t) < a_\epsilon(t) + \int_{t_0}^t b(s)x(s)ds, \quad t \in I.$$

Setze $w_\epsilon(t) := a_\epsilon(t) + \int_{t_0}^t a_\epsilon(s)b(s) \exp(B(t) - B(s))ds$, $t \in I$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t a_\epsilon(s)b(s) \exp(B(t) - B(s))ds &= b(t) \int_{t_0}^t a_\epsilon(s)b(s) \exp(B(t) - B(s))ds + a_\epsilon(t)b(t) \\ &= b(t)w_\epsilon(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t b(s)w_\epsilon(s)ds, \quad t \in I. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$w_\epsilon(t) = a_\epsilon(t) + \int_{t_0}^t b(s)w_\epsilon(s)ds, \quad t \in I.$$

Nun folgt mit Lemma 3.2

$$\begin{aligned} w_\epsilon(t) &= a_\epsilon(t) + \int_{t_0}^t a_\epsilon(s)b(s) \exp(B(t) - B(s))ds \\ &= a(t) + \int_{t_0}^t a(s)b(s) \exp(B(t) - B(s))ds \\ &\quad + \epsilon \left(1 + \int_{t_0}^t b(s) \exp(B(t) - B(s))ds\right), t \in I. \end{aligned}$$

Da $x(t) < w_\epsilon(t)$ für alle $t \in I$ ist, folgt die Behauptung des Satz durch Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$. ■

Folgerung 3.4

Sei $I := [t_0, t_1]$, sei $c \in \mathbb{R}$, seien $b, x : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $b(t) \geq 0, t \in I$. Es gelte

$$x(t) \leq c + \int_{t_0}^t b(s)x(s)ds, t \in I.$$

Dann gilt

$$x(t) \leq c \exp(B(t)) \text{ mit } B(t) := \int_{t_0}^t b(s)ds, t \in I.$$

Beweis:

Aus Satz 3.3 folgt:

$$\begin{aligned} x(t) &\leq c + \int_{t_0}^t cb(s) \exp(B(t) - B(s))ds \\ &= c \left(1 + \exp(B(t)) \int_{t_0}^t b(s) \exp(-B(s))ds\right) \\ &= c \left(1 + \exp(B(t)) \left(-\exp(-B(s))\right)\Big|_{t_0}^t\right) \\ &= c \left(1 - \exp(B(t)) \exp(-B(t)) + \exp(B(t)) \exp(-B(t_0))\right) \\ &= c \exp(B(t)), t \in I. \end{aligned}$$

Satz 3.3 oder Folgerung 3.4 oder Varianten davon werden als **Lemma von GRONWALL** bezeichnet.¹ Hier ist ein eigenständig bewiesener Spezialfall:

¹Folgerung 3.4 mit $b = \text{const}$ wurde von Gronwall 1918 bewiesen.

Lemma 3.5 (Lemma von Gronwall)

Sei $x : [0, a] \mapsto \mathbb{R}$ stetig, und es gelte

$$x(t) \leq c + \int_0^t b(s)x(s)ds, \quad t \in [0, a], \quad (3.2)$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ und b stetig und nichtnegativ ist. Dann ist

$$x(t) \leq c \exp\left(\int_0^t b(s)ds\right), \quad t \in [0, a]. \quad (3.3)$$

Beweis:

Sei $\epsilon > 0$ und sei $\psi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\psi(t) := (c + \epsilon) \exp\left(\int_0^t b(s)ds\right), \quad t \in [0, a],$$

was bedeutet, daß ψ die AWA $\psi' = b(t)\psi$, $\psi(0) = c + \epsilon$ löst; also

$$\psi(t) = c + \epsilon + \int_0^t b(s)\psi(s)ds, \quad t \in [0, a].$$

Es gilt $x(0) < \psi(0)$.

Annahme: $\exists t_0 \in [0, a]$ mit $x(t_0) = \psi(t_0)$, $x(t) < \psi(t)$ für alle $t \in [0, t_0)$.

Dann ist $x(t_0) \leq c + \int_0^{t_0} b(s)x(s)ds < c + \epsilon + \int_0^{t_0} b(s)\psi(s)ds = \psi(t_0)$, was ein Widerspruch ist.

Also gilt $x(t) \leq \psi(t)$ für alle $t \in [0, a]$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. ■

3.2 Stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten

Satz 3.6

Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und L -stetig bzgl. y gleichmäßig in t mit L -Konstante L . Seien $y, z : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I := [t_0, t_1]$, Lösungen von

$$y' = f(t, y) \text{ mit } y(t_0) = y_0 \text{ bzw. } z(t_0) = z_0 \quad ((t_0, y_0), (t_0, z_0) \in D).$$

Dann gilt:

$$|y(t) - z(t)| \leq |y_0 - z_0| e^{L(t-t_0)}, \quad t \in I.$$

Beweis:

Unter Verwendung der IGL, die der DGL $y' = f(t, y)$ zugeordnet ist, folgt für $t \in I$

$$\begin{aligned} |y(t) - z(t)| &= \left| y_0 - z_0 + \int_{t_0}^t (f(s, y(s)) - f(s, z(s))) ds \right| \\ &\leq |y_0 - z_0| + \int_{t_0}^t |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds \\ &\leq |y_0 - z_0| + L \int_{t_0}^t |y(s) - z(s)| ds. \end{aligned}$$

Anwendung von Folgerung 3.4 mit $x(t) := |y(t) - z(t)|$, $b(t) := L$, $t \in I$, und $c := |y_0 - z_0|$ liefert die Behauptung. ■

Der Satz 3.6 zeigt, dass **stetige Abhängigkeit** von den Anfangswerten vorliegt.

Beispiel 3.7

$$\begin{aligned} y \text{ Lösung von } & y' = by, \quad y(0) = a \\ y_\epsilon \text{ Lösung von } & y' = by, \quad y(0) = a + \epsilon \text{ in } I = [0, t_1] \end{aligned}$$

Satz 3.6 liefert

$$|y(t) - y_\epsilon(t)| \leq |\epsilon| \exp(bt), \quad t \in I,$$

und wir sehen im Vergleich mit Beispiel 3.1, daß Satz 3.6 eine ziemlich scharfe Aussage macht. □

3.3 Stetige Abhängigkeit von Parametern

In diesem Abschnitt diskutieren wir die Fragestellung, wie es um die Abhängigkeit der Lösung von Veränderungen in der rechten Seite der DGL steht. Wir beschreiben solche Veränderungen parametrisch.

Beispiel 3.8 Betrachte das Populationsmodell

$$y' = (a - by)y, \quad y(0) = y_0 \quad (a > 0, b \geq 0).$$

Die zugehörige IGL lautet:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t (a - by(s))y(s) ds, \quad t \in I.$$

Fasst man den Term $-by^2$ als Störterm auf, so hat man also die Lösung von

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t ay(s) ds, \quad t \in I,$$

mit der Lösung von

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t (a - by(s))y(s)ds, t \in I,$$

zu vergleichen. □

Wir betrachten nun zum Studium der anstehenden Fragen eine hinreichend allgemeine Anfangswertaufgabe:

$$y' = f(t, y; \kappa), y(t_0) = g(\kappa); \quad (3.4)$$

dabei sind

$$D \subset \mathbb{R}^{n+1}, K \subset \mathbb{R}^m, f : D \times K \longrightarrow \mathbb{R}^n, g : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Die Menge K heisst **Parametermenge**.

Für jedes $\kappa \in K$ können wir (4.1) wieder in eine DGL umschreiben

$$y(t) = g(\kappa) + \int_{t_0}^t f(s, y(s); \kappa)ds, \quad (3.5)$$

deren Lösung in $C(I; \mathbb{R}^n)$ für ein geeignetes Intervall liegen soll.

Satz 3.9

Sei $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt, $D = I \times \mathbb{R}^n$, $I = [t_0, t_0 + a]$, $g : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $f : D \times K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und L -stetig bzgl. y gleichmäßig in t, κ . Dann gibt es genau ein $x \in C(I \times K, \mathbb{R}^n)$ mit

$$x(t; \kappa) = g(\kappa) + \int_{t_0}^t f(s, x(s; \kappa); \kappa)ds, t \in I, \kappa \in K.$$

Beweis::

Wir schließen wie zu Satz 2.26 mit dem Fixpunktsatz 2.12. Dazu wählen wir:

$$U := X := C(I \times K, \mathbb{R}^n);$$

$$\|u\| := \max_{(t, \kappa) \in I \times K} e^{-2Lt} |u(t; \kappa)|, \text{ wobei } L \text{ Lipschitzkonstante von } f \text{ ist;}$$

$$(Tx)(t; \kappa) := g(\kappa) + \int_{t_0}^t f(s, x(s; \kappa); \kappa)ds, (t, \kappa) \in I \times K.$$

Es gilt $T : X \longrightarrow X$. Wir überprüfen die L -Stetigkeit von T . Aus

$$\begin{aligned} |(Tu)(t; \kappa) - (Tv)(t; \kappa)| &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, u(s; \kappa); \kappa) - f(s, v(s; \kappa); \kappa))ds \right| \\ &\leq L \int_{t_0}^t e^{-2Ls} |u(s; \kappa) - v(s; \kappa)| e^{2Ls} ds \\ &\leq L \|u - v\| \frac{1}{2L} e^{2Lt} = \frac{1}{2} e^{2Lt} \|u - v\| \end{aligned}$$

schließen wir $\|T(u) - T(v)\| \leq \frac{1}{2}\|u - v\|$. Die Behauptung des Satzes folgt nun durch Anwendung von Satz 2.12. ■

Auf die Frage, ob die Anfangswertaufgaben sachgerecht gestellt sind, können wir nun eine Antwort geben:

Folgerung 3.10

Seien die Voraussetzungen von Satz 3.9 erfüllt. Dann hängen die eindeutig bestimmten Lösungen $y(\cdot; \kappa); : [t_0, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}^n$ von

$$y' = f(t, y; \kappa), y_0(t_0) = g(\kappa)$$

stetig von κ ab, d.h.

$$\lim_{\mu \rightarrow \kappa} y(t; \mu) = y(t; \kappa) \text{ gleichmäßig in } I.$$

Beweis:

Nach Satz 3.9 existiert eine eindeutige Lösung $y \in C(I \times K)$ der IGL

$$y(t; \kappa) = g(\kappa) + \int_{t_0}^t f(s, y(s; \kappa); \kappa) ds, t \in I, \kappa \in K,$$

und für jedes (feste) $\kappa \in K$ ist $y(\cdot; \kappa)$ wegen Lemma 2.6 eine eindeutig bestimmte Lösung der AWA

$$y' = f(t, y; \kappa), y(t_0) = g(\kappa).$$

Da $I \times K$ kompakt ist, ist $y : I \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$ gleichmäßig stetig. Also

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 (|(s, \nu) - (t, \kappa)| < \delta \implies |y(s; \nu) - y(t; \kappa)| < \epsilon)$$

und daher insbesondere

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 (|\nu - \kappa| < \delta \implies |y(t; \nu) - y(t; \kappa)| < \epsilon \text{ für alle } t \in I).$$

■

3.4 Differenzierbare Abhängigkeit

Wir beziehen uns wieder auf die Aufgabenstellung (3.4), beschränken uns aber auf $m = 1$, d.h. \mathbb{R} ist Parameterraum.

Sei $y(\cdot; \kappa), \kappa \in K$, die Lösungsschar der AWA (3.4). Für jeden Zeitpunkt t wollen wir nach der Existenz von

$$\lim_{\mu \rightarrow \kappa} \frac{1}{\mu - \kappa} (y(t; \mu) - y(t; \kappa)) = \frac{\partial y}{\partial \kappa}(t; \kappa) =: z(t; \kappa)$$

fragen. Nehmen wir an, dass $z(t; \kappa)$ für jedes $t \in I$ existiert und setzen wir $u := z(\cdot; \kappa)$, $v := y(\cdot; \kappa)$, so erhalten wir in formaler Rechnung:

$$\begin{aligned} u(t_0) &= \frac{\partial y}{\partial \kappa}(t_0; \kappa) = g'(\kappa); \\ u'(t) &= \frac{\partial z}{\partial t}(t; \kappa) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \kappa} y(t; \kappa) \\ &= \frac{\partial}{\partial \kappa} \frac{\partial}{\partial t} y(t; \kappa) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} f(t, y(t; \kappa); \kappa) \frac{\partial y}{\partial \kappa}(t; \kappa) + \frac{\partial f}{\partial \kappa}(t, y(t; \kappa); \kappa) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t; \kappa); \kappa) u(t) + \frac{\partial f}{\partial \kappa}(t, y(t; \kappa); \kappa) \end{aligned}$$

Dies legt nahe, dass $z(\cdot; \kappa)$ Lösung der AWA

$$z' = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t; \kappa); \kappa) z + \frac{\partial f}{\partial \kappa}(t, y(t; \kappa); \kappa), \quad z(t_0) = g'(\kappa) \quad (3.6)$$

ist. Die DGL in (3.6) heißt **Variations- oder Sensitivitätsgleichung**. In deren rechten Seite geht die Lösung $y(\cdot; \kappa)$ der AWA (3.4) bei festem $\kappa \in K$ ein. Man kann (3.4) und (3.6) zu einem System zusammenfassen:

$$\begin{cases} y' = f(t, y; \kappa) & , y(t_0) = g(\kappa) \\ z' = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y; \kappa) z + \frac{\partial f}{\partial \kappa}(t, y; \kappa) & , z(t_0) = g'(\kappa) \end{cases} \quad (3.7)$$

Aus den obigen Rechnungen ist schon ersichtlich, dass eine Rechtfertigung dafür, dass für die Lösungsschar $(y(\cdot; \kappa), z(\cdot; \kappa))$, $\kappa \in K$, die Gleichheit

$$\frac{\partial y}{\partial \kappa}(\cdot; \kappa) = z(\cdot; \kappa), \quad \kappa \in K,$$

gilt, nicht allzu einfach sein kann. Wir wollen dies hier gar nicht versuchen, ein Hinweis auf den Hauptgedanken sei jedoch gegeben: Man wendet wieder einen Fixpunktsatz vom Kontraktionstyp in $C(I \times K; \mathbb{R}^n) \times C(I \times K; \mathbb{R}^n)$ an. Die Fixpunktiteration wird dabei so durchgeführt, dass auf jeder Iterationstufe $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial y_n}{\partial \kappa}(\cdot, \cdot) = z_n(\cdot; \cdot)$$

gilt. Das beweisbare Resultat lautet:²

Satz 3.11

Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt, $D = I \times \mathbb{R}^n$, $I = [t_0, t_0 + a]$, $g : K \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f : D \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, f zweimal stetig differenzierbar, L -stetig bzgl. y gleichmäßig in t, κ . Dann hat die AWA

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y; \kappa), \quad y(t_0) = g(\kappa) \\ z' &= \frac{\partial f}{\partial y}(t, y; \kappa) z + \frac{\partial f}{\partial \kappa}(t, y; \kappa), \quad z(t_0) = g'(\kappa) \end{aligned}$$

²Siehe: Walter, W., Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer-Verlag, 1978

eine eindeutige Lösung $(y, z) \in C(I \times K; \mathbb{R}^n) \times C(I \times K; \mathbb{R}^m)$. Ferner existiert $\frac{\partial y}{\partial \kappa}(t; \kappa)$ für jedes $(t; \kappa) \in I \times K$ und es gilt

$$\frac{\partial y}{\partial \kappa}(t; \kappa) = z(t; \kappa), (t, \kappa) \in I \times K.$$

Beispiel 3.12 Wir betrachten ein Beispiel aus der Parameterschätzung. Wir gehen aus von

$$y' = (a - by)y, y(0) = y_0. \quad (3.8)$$

Die Konstante a sei bekannt, b soll geschätzt werden, Dazu beobachtet man die Population in einem Zeitraum $[0, \tau]$ und erhält als Ergebnis eine Funktion $m \in C[0, \tau]$. Die Aufgabe lautet nun:

Finde $\bar{b} \in [0, B]$, so dass

$$E(\bar{b}) = \min_{b \in [0, B]} E(b),$$

wobei $E(b) := \frac{1}{2} \int_0^T |y(t; b) - m(t)|^2 dt$, $y(\cdot; b)$ Lösung von (3.8) und $B > 0$ ist.

Zur Lösung dieses Optimierungsproblems: Da $E : [0, B] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist (Anwendung von Folgerung 3.10, besitzt es eine Lösung \bar{b} . E ist in \bar{b} differenzierbar wegen Satz 3.11. Gilt $\bar{b} \in (0, B)$, so folgt: $E'(\bar{b}) = 0$.

Berechnung mit dem „Gradientenverfahren“, welches auf

$$E'(\bar{b}) = 0 \implies \bar{b} = \bar{b} - E'(\bar{b})$$

basiert. Iteration:

$$b_0 \in [0, B], b_{n+1} := b_n - E'(b_n).$$

Die Berechnung von $E'(b)$ $b \in [0, B]$, kann über das System

$$\begin{aligned} y' &= (a - by)y, y(0) = y_0 \\ z' &= (a - 2by)z - y^2, z(0) = 0 \end{aligned}$$

erfolgen. Man hat damit:

$$E'(b) = \int_0^T (y(t) - m(t))z(t) dt.$$

□

Kapitel 4

Lineare Systeme

Wir stellen die Resultate bereit, die wir für die Diskussion linearer Systeme benötigen. Später werden wir, wenn wir lineare Systeme als Approximationen für nichtlineare Systeme nutzen, intensiv darauf zurückgreifen. Das Hilfsmittel “Laplace-Transformation“ gestattet eine Algebraisierung der linearen Systeme.

4.1 Das Exponential einer Matrix

Wenn wir eine skalare Differentialgleichung

$$z' = az$$

mit einem Skalar $a \in \mathbb{R}$ oder $a \in \mathbb{C}$ betrachten, haben wir die allgemeine Lösung gegeben durch

$$z(t) = z_0 e^{at}, t \in \mathbb{R} \text{ (} z_0 \text{ Konstante)}.$$

Dies wollen nun auf den Fall übertragen, daß für a eine reelle Matrix steht.

Bezeichnungen und Vereinbarungen:

In \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm; spezielle Normen sind die p -Normen

$$\|\cdot\|_p, 1 \leq p \leq \infty,$$

die so erklärt sind:

$$\|z\|_p := \begin{cases} (\sum_{i=1}^n |z_i|^p)^{1/p} & , 1 \leq p < \infty \\ \max_{1 \leq i \leq n} |z_i| & , p = \infty \end{cases}, z = (z_1, \dots, z_n).$$

Wir verwenden die unterschiedlichen Normen in \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n je nach Praktikabilität.¹

Da $\mathbb{R}^{n,m}$ bzw. $\mathbb{C}^{n,m}$ mit dem Raum $\mathbb{R}^{n \cdot m}$ bzw. $\mathbb{C}^{n \cdot m}$ identifiziert werden kann, haben wir

¹Wir wissen, daß in einem endlichdimensionalen Raum alle Normen äquivalent sind. Ein Beweis dazu: Sei $z = (z_1, \dots, z_n)$. Wir haben mit der kanonischen Basis e^1, \dots, e^n :

$$\|z\| \leq \sum_{i=1}^n |z_i| \|e^i\| \leq c_1 \|z\|_1, \text{ wobei } c_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \|e^i\|.$$

Da die Norm $\|\cdot\|$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_1$ stetig ist, ist

$$c_2 := \inf\{\|x\| \mid \|x\|_1 = 1\}$$

positiv. Daraus folgt sofort $c_2^{-1} \|z\|_1 \leq \|z\|$. Damit ist die Äquivalenz der Normen klar.

schon Normen in $\mathbb{R}^{n,m}$ bzw. $\mathbb{C}^{n,m}$. Ein Konstruktionsprinzip für Normen in $\mathbb{R}^{n,m}$ bzw. $\mathbb{C}^{n,m}$ ist das der Funktionalanalysis: Für $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ bzw. $A \in \mathbb{C}^{n,m}$ ist

$$\|A\| := \max\{\|Ax\|_a \mid \|x\|_b \leq 1\}, \text{ wobei } \|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b \text{ zwei Normen } \overset{n}{\mathbb{R}} \text{ bzw. } \overset{n}{\mathbb{C}} \text{ sind,}$$

die **Operatornorm**. Die Räume $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{R}^{n,m}, \mathbb{C}^{n,m}$ sind, wie man zeigt, vollständige normierte Räume, egal welche Norm nun gerade verwendet wird, und wir können von Konvergenz von Folgen, Cauchyfolgen,... reden.

Definition 4.1

Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Das **Exponential** e^A von A ist durch die Reihe erklärt:

$$e^A := \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

□

Man beachte, daß die Reihe in der Definition 4.1 für jedes $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ wegen

$$\|e^A\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k \leq e^{\|A\|}$$

konvergent ist. Dabei haben wir folgende **Vereinbarung** unterstellt: Die Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{C}^{n,n}$ ist stets eine **Matrixnorm**, d.h. sie hat die Eigenschaft

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \text{ für alle } A, B \in \overset{n,n}{\mathbb{C}}.$$

Dies trifft zum Beispiel stets für eine als Operatornorm konstruierte Norm zu.

Weiterhin vereinbaren wir, daß die Matrixnorm mit der in \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n gewählten Norm **verträglich** ist, d.h. daß

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \text{ für alle } x \in \overset{n}{\mathbb{R}} \text{ bzw. } \overset{n}{\mathbb{C}}$$

gilt. Es gilt – der Beweis ist völlig trivial –, daß die Operatornorm stets mit der bei der Definition in \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n verwendeten Norm verträglich ist.

Beispiel 4.2 Die Norm

$$\|B\| := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |b_{ij}|$$

heißt **Zeilensummennorm**. Sie ist in Tat eine Matrixnorm und mit der Maximumnorm $|\cdot|_{\infty}$ verträglich. □

Für das Exponential gelten nun die folgenden **Rechenregeln**:²

$$e^{\Theta} = I; \tag{4.1}$$

$$e^{A+B} = e^A e^B, \text{ falls } AB = BA; \tag{4.2}$$

$$e^{\lambda I} = e^{\lambda} I \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C}; \tag{4.3}$$

$$e^{-A} = (e^A)^{-1} \tag{4.4}$$

$$e^{MAM^{-1}} = M e^A M^{-1}, \text{ falls } M \text{ invertierbar ist.} \tag{4.5}$$

²Mit Θ, I bezeichnen wir die Null- bzw. Einheitsmatrix

Zu (4.2):

$$\left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k\right) \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} B^k\right) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (A+B)^k + \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k!} \sum_{l=k-m}^m \binom{k}{l} A^l B^k,$$

also

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k!} \sum_{l=k-m}^m \binom{k}{l} A^l B^k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k!} (\|A\| + \|B\|)^k$$

Zu (4.5):

$$\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (M^{-1} A M)^k = M^{-1} \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k \right) M.$$

4.2 Autonome Systeme

Wir betrachten mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ das lineare System

$$z' = Az \tag{4.6}$$

Aus

$$h^{-1}(e^{(t+h)A} - e^{tA}) = e^{tA} h^{-1}(e^{hA} - I)$$

lesen wir ab, daß die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tA} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

differenzierbar ist; die Ableitung ist

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto A e^{tA} = e^{tA} A \in \mathbb{R}^{n,n} \tag{4.7}$$

Satz 4.3

Die Anfangswertaufgabe

$$z' = Az, \quad z(0) = z_0 \tag{4.8}$$

hat die eindeutige Lösung

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tA} z_0 \in \mathbb{R}^n$$

Beweis:

Sicherlich ist $t \mapsto e^{tA} z_0$ wegen (4.7) eine Lösung. Die Eindeutigkeit folgt so: Ist $t \mapsto v(t)$ irgendeine Lösung, so verschwindet die Ableitung von $w(t) := e^{-tA} v(t)$; also ist w konstant, d.h. $v(t) = e^{tA} w(0)$. Wegen $v(0) = z_0$ ist $w(0) = z_0$. ■

Bemerkung 4.4

Wir hätten uns im Beweis von Satz 4.3 auch auf einen Satz vom Typ Picard–Lindelöf berufen können; siehe Satz 4.9. □

Folgerung 4.5

Die Spalten der Matrix $Z(t) := e^{tA}$ stellen n linear unabhängige Lösungen des Differentialgleichungssystems (4.6) dar.

Beweis:

Für jedes $z_0 \in \mathbb{R}^n$ ist $t \mapsto Z(t)z_0$ eine Lösung von (4.6) mit Anfangswert z_0 ; die Wahl $z_0 = e^i$ zeigt, daß die Spalten von $Z(t)$ Lösungen sind. Die lineare Unabhängigkeit (im Raum der stetigen Funktionen in \mathbb{R}) folgt aus der Tatsache, daß die Einheitsvektoren e^1, \dots, e^n linear unabhängig sind. ■

Die Matrix(-Funktion)

$$\Phi_A(t, t_0) := e^{(t-t_0)A}, \quad t, t_0 \in \mathbb{R}$$

nennen wir die **Übergangsmatrix**, denn sie beschreibt den Übergang von Zustand z_0 zur Zeit t_0 zum Zustand $z(t)$ zur Zeit t entlang der Dynamik des Systems (4.6); beachte, daß

$$t \mapsto \Phi_A(t, t_0)z_0$$

Lösung der Anfangswertaufgabe

$$z' = Az, \quad z(t_0) = z_0$$

ist.

Es bleibt die Aufgabe, e^{tA} auszurechnen. Aus der Linearen Algebra wissen wir, daß jede Matrix auf eine Normalform, die sogenannte **Jordansche Normalform** transformiert werden kann. Wichtig ist dabei, daß es sich um eine Ähnlichkeitstransformation handelt. Das Resultat der Jordanschen Normalform ist:

Es gibt eine invertierbare Matrix $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ und Matrizen J_1, \dots, J_p , so daß damit gilt:³

$$A = MJM^{-1}, \quad J = \text{diag}(J_1, \dots, J_p), \quad J_i = \lambda_i I + N_i, \quad 1 \leq i \leq p,$$

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq p.$$

Wegen

$$e^{tA} = Me^{tM^{-1}AM}M^{-1} = Me^{tJ}M^{-1} = M \text{diag}(e^{tJ_1}, \dots, e^{tJ_p})M^{-1}$$

und

$$e^{tJ_i} = e^{t(\lambda_i I + N_i)} = e^{t\lambda_i} e^{tN_i}$$

genügt es e^{tN_i} , $1 \leq i \leq p$, auszurechnen. Jedes N_i ist aber eine nilpotente Matrix ($N_i^k = \Theta$ für ein k); die Exponentialreihe für N_i bricht also ab.

Beachte, e^{tA} ist wieder reell, wenn wir mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ starten.

Beispiel 4.6 Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Wir rechnen mit der Reihe. Es gilt:

$$A^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}, \quad A^{2k-1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+1} \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

³ $\text{diag}(J_1, \dots, J_p) := \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p \end{pmatrix}$

Also

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} & \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix}$$

und dies zeigt

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Nun rechnen wir e^{At} über die Jordansche Normalform aus. Die Eigenwerte von A sind $\pm i$, die zugehörigen Eigenvektoren sind $(-i, 1), (+i, 1)$. Daraus berechnet sich die Transformationsmatrix M aus

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten daher

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, e^{tM^{-1}AM} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix},$$

also

$$e^{tA} = Me^{tM^{-1}AM}M^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Daraus lesen wir nun zwei linear unabhängige Lösungen von $z' = Az$ ab.

□

Satz 4.7

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Konstante $c = c(\epsilon, A)$, so daß mit

$$\gamma := \max\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \text{ Eigenwert von } A\}$$

gilt:

$$\|e^{tA}\| \leq c e^{(\gamma+\epsilon)t} \text{ für alle } t \geq 0.$$

Beweis:

Wir arbeiten mit der Jordanschen Normalform (siehe oben) und wählen etwa als Matrixnorm die Zeilensummennorm.

$$\begin{aligned} \|e^{tA}\|^2 &= \|Me^{tM^{-1}AM}M^{-1}\|^2 \leq c^2 \|e^{tM^{-1}AM}\|^2 = c^2 \|e^{tJ}\|^2 \\ &\leq c^2 \sum_{i=1}^p \|e^{tJ_i}\|^2 = c^2 \sum_{i=1}^p |e^{\lambda_i t}|^2 \|e^{tN_i}\|^2 \leq c^2 e^{2\gamma t} \sum_{i=1}^p \|e^{tN_i}\|^2 \end{aligned}$$

(Die Konstante c ist in jeder Zeile jeweils neu angepaßt.) Da jeder Ausdruck $\|e^{tN_i}\|$ nur polynomial in t ist, lassen sich alle diese Ausdrücke durch $\hat{c}e^{t\epsilon}$ mit einer geeigneten Konstante \hat{c} abschätzen. ■

Abschließend halten wir noch die Lösungsdarstellung für eine inhomogene Anfangswertaufgabenstellung fest. Betrachte

$$z' = Az + f(t), \quad z(t_0) = z_0 \tag{4.9}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und⁴ $f \in L_1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$. Als Lösung von (4.9) akzeptieren wir eine Lösung $z \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ der Integralgleichung

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t (Az(s) + f(s))ds, t \in [t_0, t_1] \quad (4.10)$$

Satz 4.8

Die Anfangswertaufgabe (4.9) besitzt genau eine Lösung. Sie hat die Darstellung

$$z(t) = e^{(t-t_0)A}z_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}f(s)ds, t \in [t_0, t_1], \quad (4.11)$$

Beweis:

Die Eindeutigkeit folgt aus der Tatsache, daß eine homogene Anfangswertaufgabe ($f \equiv 0$) für $z_0 = 0$ nur die triviale Lösung besitzt. Aus der Darstellung (4.11) folgt offenbar sofort, daß eine Lösung vorliegt. ■

4.3 Der vollständige Überblick im ebenen Fall

Wir betrachten nun ein lineares autonomes System der Ordnung zwei. Hier können wir das Lösungsverhalten dank der Tatsache, daß wir die Eigenwertsituation einer 2×2 -Matrix überschauen, qualitativ vollständig charakterisieren.

4.4 Nichtautonome Systeme

Wir betrachten zunächst ein homogenes System:

$$z' = A(t)z. \quad (4.12)$$

Satz 4.9

Sei $A \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^{n,n})$. Dann hat die Anfangswertaufgabe

$$z' = A(t)z, z(t_0) = z_0 \quad (4.13)$$

genau eine Lösung $z \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$.

Beweis:

Notwendig für die Lösbarkeit der Aufgabe ist offenbar, daß die Integralgleichung

$$z(t) = (Tz)(t) := z_0 + \int_{t_0}^t A(s)z(s)ds, t \in [t_0, t_1] \quad (4.14)$$

eine Lösung $z \in X := C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ besitzt.

Wir normieren X mit der zur üblichen Norm äquivalenten Norm

$$\|z\| := \max\{|z(t)|e^{-r(t-t_0)} \mid t \in [t_0, t_1]\};$$

⁴Mit $L_p([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, $l \in \mathbb{N}$, bezeichnen wir den Raum aller Funktionen, die p -Lebesgue-integrierbar auf $[t_0, t_1]$ mit Werten in \mathbb{R}^n sind. Offenbar ist $C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n) \subset L_1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$.

der Parameter r wird noch passend gewählt werden. Wir rechnen nach, daß F auf X Lipschitzstetig ist. Für $z, x \in X$ und $t \in [t_0, t_1]$ haben wir:

$$\begin{aligned} |Tz(t) - Tx(t)| &= \left| \int_{t_0}^t A(s)(z(s) - x(s))ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A(s)\| |z(s) - x(s)| ds \\ &\leq c(A) \int_{t_0}^t e^{r(s-t_0)} e^{-r(s-t_0)} |z(s) - x(s)| ds \\ &\leq c(A) \|z - x\| \int_{t_0}^t e^{r(s-t_0)} ds \\ &\leq c(A) r^{-1} e^{r(t-t_0)} \|z - x\| \end{aligned}$$

wobei $c(A) = \max\{\|A(t)\| \mid t \in [t_0, t_1]\}$ ist. Wählt man nun

$$r > 2c(A),$$

so erhält man

$$\|Tz - Tx\| \leq \frac{1}{2} \|z - x\|$$

Dies bedeutet nun, daß F auf dem vollständigen Raum X eine Kontraktion ist. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat F einen Fixpunkt $z \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$. Aus der Definition von F und der Fixpunkteigenschaft folgt, daß z sogar in $C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ liegt und eine Lösung von (4.13) ist. Die Eindeutigkeit haben wir damit schon mitbewiesen. ■

Bemerkung 4.10

Es ist aus dem Beweis zu Satz 4.9 ersichtlich, daß die Voraussetzung “ $A \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ “ auf Kosten des Lösungsbegriffs abgeschwächt werden kann zu “ $A \in L_1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ “. Dies deutlich zu machen, haben wir den Beweis zu Satz 4.9 so angeführt. Wir hätten uns unter der Voraussetzung “ $A \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ “ ja sofort auf den Existenz- und Eindeutigkeitsatz 2.26 berufen können, denn $(t, y) \mapsto A(t)y$ ist sicherlich L -stetig in y gleichmäßig in t . ■

Bemerkung 4.11

Das Existenz- und Eindeutigkeitsresultat des letzten Satzes hätten wir auch auf die Idee des “Einfrierens“ der Zeit stützen können. Dazu schreibt man die Aufgabe mit dem Ziel, “in die Nähe“ eines inhomogenen autonomen Systems zu kommen, um:

$$z' = A(t_0)z + (A(t) - A(t_0))z, \quad z(t_0) = z_0.$$

Für jedes $z \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ ist $t \mapsto (A(t) - A(t_0))z(t)$ sicherlich L_1 -integrierbar. Also ist nach Satz 4.8 die Lösung als Lösung der Integralgleichung

$$z(t) = (Fz)(t) := e^{(t-t_0)A(t_0)} z_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A(t_0)} (A(s) - A(t_0))z(s) ds, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (4.15)$$

zu suchen. Wir normieren (siehe oben) $X := C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ mit der zur üblichen Norm äquivalenten Norm

$$\|z\| := \max\{|z(t)|e^{-r(t-t_0)} \mid t \in [t_0, t_1]\};$$

der Parameter r wird noch passend gewählt werden. Wir rechnen nach, daß F auf X Lipschitzstetig ist. Für $z, x \in X$ und $t \in [t_0, t_1]$ haben wir:

$$\begin{aligned} |Fz(t) - Fx(t)| &= \left| \int_{t_0}^t e^{(s-t_0)A(t_0)} (A(s) - A(t_0))(z(s) - x(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|e^{(s-t_0)A(t_0)}\| \|A(s) - A(t_0)\| |z(s) - x(s)| ds \\ &\leq c(A) \int_{t_0}^t e^{-r(s-t_0)} e^{r(s-t_0)} |z(s) - x(s)| ds \\ &\leq \frac{c(A)}{r} e^{r(t-t_0)} \|z - x\| \end{aligned}$$

wobei $c(A) = \max\{\|A(t) - A(t_0)\| e^{(t-t_0)\|A(t_0)\|} \mid t \in [t_0, t_1]\}$ ist. Wählt man nun $r > 2C(A)$ so erhält man

$$\|Fz - Fx\| \leq \frac{1}{2} \|z - x\|$$

Nun vollendet man wie oben. □

Bemerkung 4.12

Ohne den Trick, den Raum $X := C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ mit einer zur üblichen Norm äquivalenten Norm zu normieren, erhalte man unter den Voraussetzungen des Satzes 4.9 nur eine Lösung z in einem Intervall $[t_0, \tau]$ mit einem τ , daß von A abhängt, und es ist nicht sichergestellt, daß $\tau = t_1$ erreicht werden kann. Diesen Mangel kann man beheben durch Fortsetzen dieser lokalen Lösung; man erreicht so auch wieder eine globale Lösung. ■

Satz 4.13

Sei $A \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^{n,n})$. Dann ist der Lösungsraum des Systems

$$z' = A(t)z \tag{4.16}$$

ein n -dimensionaler Teilraum von $C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$

Beweis:

Wählt man in (4.13) $z_0 = e^i$, erhält man eine Lösung z^i . Auf diese Weise erhält man n Lösungen z^1, \dots, z^n . Diese Lösungen sind linear unabhängig, da die Einheitsvektoren e^1, \dots, e^n linear unabhängig sind.

Seien y^1, \dots, y^{n+1} Lösungen. Dann sind $y^1(t_0), \dots, y^{n+1}(t_0)$ linear unabhängig in \mathbb{R}^n . Also gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^2 \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i y^i(t_0) = \theta.$$

Aus der Eindeutigkeit der Lösung der Anfangswertaufgabe $z' = A(t)z, z(t_0) = \theta$ folgt damit $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i y^i = \theta$, also die lineare Abhängigkeit von y^1, \dots, y^{n+1} in $C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$. ■

Definition 4.14

Sei $A \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^{n,n})$. Dann heißt eine Basis z^1, \dots, z^n des Lösungsraums des Systems

$$z' = A(t)z \quad (4.17)$$

ein **Fundamentalsystem**. Die zugehörige Matrix

$$Z(t) := (z^1(t) | \dots | z^n(t)), t \in [t_0, t_1],$$

heißt eine **Fundamentalmatrix**. □

Beachte, daß die Aussage von Satz 4.13 natürlich auch im autonomen Fall gilt. Dort hatten wir nur festgehalten, daß die Spalten des Exponential einer Matrix A n linear unabhängige Lösungen von $z' = Az$ darstellen. Nun wissen wir, daß sie sogar eine Basis des Lösungsraumes darstellen.

Beispiel 4.15 Betrachte das System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2t^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, t \in [1, 2].$$

Eine Fundamentalmatrix ist gegeben durch

$$Z(t) := \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{t^2} \\ t & 1 \end{pmatrix}, t \in [1, 2],$$

wie man sofort bestätigt. □

Hat man eine Fundamentalmatrix Z von (4.17), so kann man (in naheliegender Interpretation) schreiben:

$$Z' = A(t)Z. \quad (4.18)$$

Wiederum aus Eindeutigkeitsgründen gilt:

$$\det Z(t) \neq 0 \text{ für alle } t \in [t_0, t_1].$$

Damit ist klar, daß die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe

$$z' = A(t)z, z(s) = z_0 \quad (4.19)$$

für jedes $s \in [t_0, t_1]$ gegeben ist durch

$$z(t) = Z(t)Z(s)^{-1}z_0, t \in [t_0, t_1].$$

Aus Eindeutigkeitsgründen ist die Matrixfunktion

$$[t_0, t_1] \times [t_0, t_1] \ni (t, s) \mapsto Z(t)Z(s)^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

nicht von der Wahl der Fundamentalmatrix Z abhängt, denn eine Fundamentalmatrix unterscheidet sich von einer anderen nur durch eine reguläre konstante Matrix. Dies

folgt in folgender Weise:

Seien Z und \tilde{Z} Fundamentalmatrizen. Dann gibt es $C \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\det(C) \neq 0$, mit $\tilde{Z}(t_0) = Z(t_0)C$. Setze $Y(t) := Z(t)C$. Dann gilt mit (4.18)

$$\begin{aligned} Y'(t) &= Z'(t)C = A(t)Z(t)C = A(t)Y(t), \\ Y(t_0) &= Z(t_0)C = \tilde{Z}(t_0), \end{aligned}$$

und aus Eindeutigkeitsgründen

$$Y(t) = \tilde{Z}(t), \text{ d.h. } Z(t)C = \tilde{Z}(t), t \in [t_0, t_1].$$

Es ist daher folgende Definition sinnvoll:

Definition 4.16

Ist Z eine Fundamentalmatrix von (4.17), dann heißt die Matrixfunktion

$$[t_0, t_1] \times [t_0, t_1] \ni (t, s) \longmapsto \Phi_A(t, s) := Z(t)Z(s)^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

Übergangsmatrix des Systems (4.17). □

Wir halten folgende Rechenregeln fest:

$$\Phi_A(t, t) = I \tag{4.20}$$

$$\Phi_A(t, s)^{-1} = \Phi_A(s, t) \tag{4.21}$$

$$\Phi_A(t, s) = \Phi_A(t, r)\Phi_A(r, s) \text{ für alle } t, s, r \in [t_0, t_1]; \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial \Phi_A}{\partial t}(t, s) = A(t)\Phi_A(t, s) \text{ für alle } t \in [t_0, t_1] \text{ und } s \in [t_0, t_1]. \tag{4.23}$$

Die Eigenschaft (4.22) heisst aus naheliegenden Gründen **Halbgruppeneigenschaft**.

Wir betrachten nun eine inhomogene Anfangswertaufgabe:

$$z' = A(t)z + f(t), z(t_0) = z_0. \tag{4.24}$$

Hierbei sei $A \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, $f \in L_1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$. Als Lösung akzeptieren wir ein $z \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, das die Integralgleichung

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t (A(s)z(s) + f(s))ds, t \in [t_0, t_1],$$

löst.

Satz 4.17

Sei $A \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, $f \in L_1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, $z_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann hat die Anfangswertaufgabe

$$z' = A(t)z + f(t), z(t_0) = z_0 \tag{4.25}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung; sie ist gegeben durch

$$z(t) = \Phi_A(t, t_0)z_0 + \int_{t_0}^t \Phi_A(t, s)f(s)ds, t \in [t_0, t_1]. \tag{4.26}$$

Beweis:

Man verifiziert dies mit den Rechenregeln für Φ_A . ■

Man findet die Lösungsformel (4.26) nach der Methode **Variation der Konstanten**. Sei dazu Z eine Fundamentalmatrix zu (4.25). Mit dem Ansatz

$$z(t) := Z(t)c(t)$$

– beachte, daß hier eine konstante Funktion c nur zu einer Lösung der homogenen Gleichung führen kann, da in Z die Spalten Lösungen der homogenen Aufgabe stehen – ergibt sich als Bestimmungsgleichung für c

$$c'(t) = Z(t)^{-1}f(t),$$

d. h.

$$c(t) = c_0 + \int_{t_0}^t Z(s)^{-1}f(s) ds.$$

Einsetzen in den Ansatz ergibt unter Beachtung von $z(t_0) = z_0$ die Formel (4.26).

Beispiel 4.18 Betrachte

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad y_1(0) = 1, y_2(0) = 1.$$

Eine Fundamentalmatrix Z ist das Exponential, d.h.

$$Z(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Die DGL für c' (Variation der Konstanten) lautet

$$c_1' + tc_2' = e^t \sin(t), \quad c_2' = e^t \sin(t).$$

Integration unter Beachtung der Anfangswerte ergibt

$$c_1(t) = 2 + \frac{1}{2}((1-t)(\sin(t) - \cos(t)) - \cos(t)), \quad c_2(t) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^t(\sin(t) - \cos(t)).$$

□

Man bemerkt wieder, daß sich die Lösung von $z' = A(t)z + f(t)$ als allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $z' = A(t)z$ und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung darstellt.

Bemerkung 4.19

Später werden wir uns noch für das zu (4.17) adjungierte System interessieren. Es ist gegeben durch

$$w' = -A(t)^*w. \tag{4.27}$$

Dabei ist $A(t)^*$ die zu $A(t)$ transponierte Matrix.
 Sei Z eine Fundamentalmatrix zur Gleichung (4.27). Aus

$$I = \Phi_A(t, t) \text{ f\"ur alle } t \in [t_0, t_1]$$

folgt durch Differentiation dieser Identität nach t

$$\Theta = \frac{\partial Z(\cdot)}{\partial t}(t) + Z(t) \frac{\partial Z(\cdot)^{-1}}{\partial t}(t) = A(t)\Phi_A(t, t) + Z(t) \frac{\partial Z(\cdot)^{-1}}{\partial t}(t)$$

und man erhält

$$\frac{\partial Z(\cdot)^{-1}}{\partial t}(t) = -Z(t)^{-1}A(t).$$

Daraus schließt man, daß $(Z(t)^{-1})^*$ eine Fundamentalmatrix des adjungierten Systems ist. Also ist die Übergangsmatrix Ψ_A des adjungierten Systems (4.27) gegeben durch

$$\Psi_A(t, s) := (\Phi_A(t, s)^{-1})^* = \Phi_A(s, t)^* .$$

□

4.5 Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung

Wir betrachten DGLen der Form

$$\sum_{i=0}^n a_i(t)y^{(i)} = b(t). \tag{4.28}$$

Dabei sind: $a_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $1 \leq i \leq n$, $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a_n(t) \neq 0, t \in I, I$ Intervall .

Dieser DGL (4.28) entspricht folgendes System:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \frac{-a_0(t)}{a_n(t)} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{-a_{n-1}(t)}{a_n(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

Die DGL heißt (4.28) homogen, wenn $b(t) = 0$ für alle $t \in I$, anderenfalls inhomogen.

Bezeichnung: $C^n(I) := \{v : I \rightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ } n\text{-mal differenzierbar, } v^{(n)} \text{ stetig}\} .$

Unmittelbar klar ist:

$y \in C^n(I)$ ist eine Lösung von (4.28) genau dann, wenn $(y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in C(I; \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von (4.29) ist.

Im folgenden nehmen wir o.E. an, dass in der DGL (4.28) schon $a_n(t) = 1, t \in I$, gelte und betrachten daher:

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)y^{(i)} = b(t), t \in I. \tag{4.30}$$

Satz 4.20

Seien $a_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n-1$, $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $t_0 \in I$. Dann gilt:

a) Die AWA

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)y^{(i)} = b(t), \quad y(t_0) = y_{0,0}, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{0,n-1}$$

ist eindeutig lösbar für alle $(y_{0,0}, \dots, y_{0,n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

b) Die Lösungen der homogenen Gleichung

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)y^{(i)} = 0 \quad (4.31)$$

bilden einen n -dimensionalen Teilraum von $C(I)$.

c) Eine Menge $\{y_1, \dots, y_n\}$ von Lösungen von (4.31) ist linear unabhängig genau dann, wenn $\det Y(t) \neq 0$ gilt für alle $t \in I$, wobei

$$Y(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Beweis:

- Wende einen Existenz- und Eindeutigkeitsatz an auf das zugehörige System.
- Satz 4.13 angewendet auf das zugehörige System (4.29).
- Dies folgt direkt aus der Eindeutigkeit der Lösungen von (4.31).

Bei der Lösung der DGL n -ter Ordnung gilt prinzipiell dasselbe wie für Systeme 1. Ordnung:

- Die inhomogene DGL kann auf die homogene DGL zurückgeführt werden (Variation der Konstanten)
- Für konstante Koeffizienten a_i ($1 \leq i \leq n-1$) kann man eine Basis des Lösungsraums der homogenen DGL angeben.

Sind die Koeffizienten a_i ($1 \leq i \leq n-1$) in der homogenen DGL (4.31) nicht konstant, so gibt es keine allgemeine Formel zur Bestimmung des Lösungsraums, wohl aber eine Reihe spezieller Lösungstechniken. Eine davon ist das **Reduktionsverfahren** von d'ALEMBERT. Wir gehen aus von der DGL

$$\sum_{i=0}^n a_i(t)y^{(i)} = 0 \quad (4.32)$$

Sei \hat{y} eine (spezielle) Lösung von (4.32). Für eine weitere Lösung machen wir den Ansatz

$$y(t) := \hat{y}(t)z(t) \quad (4.33)$$

und leiten eine DGL für z wie folgt her: Einsetzen in (4.32) ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^n a_i(t) y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^n a_i(t) \frac{d^i}{dt^i} (\hat{y}(t) z(t)) \\ &= \sum_{i=0}^n a_i(t) \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} z^{(j)}(t) \hat{y}^{(i-j)}(t) = \sum_{j=0}^n z^{(j)}(t) \sum_{i=j}^n a_i(t) \hat{y}^{(i-j)}(t) \end{aligned}$$

Setzt man

$$b_j(t) := \sum_{i=0}^n \binom{i}{j} a_i(t) \hat{y}^{(i-j)}(t),$$

so ergibt sich wegen $\sum_{i=0}^n \binom{i}{0} a_i(t) \hat{y}^{(i)}(t) = 0$ (\hat{y} ist Lösung von (4.32)) $b_0(t) = 0$, $t \in I$, und damit für z die DGL

$$\sum_{j=1}^n b_j(t) z^{(j)}(t) = 0, \quad (4.34)$$

die eine DGL der Ordnung $n - 1$ für z' ist. (Reduktion der Ordnung).

Man beachte, dass b_n Nullstellen haben kann (auch wenn a_n keine Nullstellen hat), so dass die Gleichung (4.34) sich nicht notwendigerweise auf ein System umschreiben läßt (Rezept!).

Das obige Vorgehen kann man also benutzen, um die Berechnung von n linear unabhängiger Lösungen von (4.32) auf die Berechnung von jeweils einer speziellen Lösung von n DGLen zurückzuführen. Allerdings kann man sofort erkennen, dass die Gleichungen niedriger Ordnung nach wenigen Schritten schon sehr kompliziert sein können. Die Hauptanwendung des Reduktionsprinzips liegt daher bei den Gleichungen 2. Ordnung.

Beispiel 4.21 Wir betrachten die LEGENDRE'sche DGL:

$$(1 - t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0 \quad (4.35)$$

Eine spezielle Lösung von (4.35) kann man mit dem Ansatz

$$\hat{y}(t) := at^2 + bt + c$$

gewinnen. Man erhält damit etwa die Lösung

$$\hat{y}(t) := t, t \in \mathbb{R}.$$

Die Formeln für b_j lauten hier

$$b_1(t) = a_1(t)\hat{y}(t) + 2a_2(t)\hat{y}'(t), \quad b_2(t) = a_2(t)\hat{y}(t)$$

also

$$b_1(t) = -2t^2 + 2(1 - t^2), \quad b_2(t) = (1 - t^2)t.$$

Die DGL für z lautet also

$$(1 - t^2)tz'' + (2 - 4t^2)z' = 0, \quad \text{d.h. } (1 - t^2)tw' + (2 - 4t^2)w = 0, \quad \text{wobei } w := z'.$$

Für w erhält man (etwa Trennung der Variablen):

$$w(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-t}, t \neq 1, -1, 0.$$

Eine Stammfunktion von w ist:

$$z(t) = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}, t \neq 1, -1, 0.$$

Damit ergibt sich als eine zweite Lösung von (4.35)

$$y(t) := tz(t) = -1 + \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}, t \in I, \pm 1 \notin I$$

(Man beachte, dass ± 1 Nullstellen von $a_2(t) := (1-t^2)$ sind.) □

Betrachten wir nun den Spezialfall, dass die Koeffizienten in (4.32) nicht von der „Zeit“ abhängen, d.h. daß der autonome Fall vorliegt. Sei eine DGL der Form

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = 0, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \quad (4.36)$$

vorgegeben. Wir versuchen zunächst, eine Lösung mit dem Ansatz

$$y(t) := e^{\lambda t} \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \quad (4.37)$$

zu bestimmen. Es ergibt sich

$$\sum_{i=0}^n a_i \lambda^i e^{\lambda t} = 0,$$

und wir lesen ab: y aus (4.37) ist Lösung von (4.36) genau dann, wenn

$$p(\lambda) = 0 \text{ gilt mit } p(\lambda) := \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i. \quad (4.38)$$

Man beachte, dass dieses Polynom p gerade das charakteristische Polynom der Systemmatrix ist, die man erhält, wenn man (4.36) in ein System umschreibt. Mehrfache Nullstellen von p führen i.a. dazu, dass man nicht n linear unabhängige Lösungen mit dem Ansatz (4.37) erhalten kann. Ohne Beweis halten wir fest:

Satz 4.22

Jede Lösung der DGL (4.36) ist eine Linearkombination der Funktionen

$$t^k e^{at} \sin bt, t^\rho e^{at} \cos bt;$$

dabei ist $a + ib$ eine Nullstelle des Polynom p in (4.38) der Vielfachheit ν und $0 \leq k, \rho \leq \nu - 1$.

4.6 Potenzreihenlösungen

Wir beschäftigen uns mit DGLen der Form

$$t^2 y'' + t p_1(t) y' + p_0(t) y = 0 \quad (4.39)$$

Generelle **Annahmen** sind: p_0, p_1 besitzen in $(-\rho, \rho)$ eine Potenzreihendarstellung um $t_0 = 0$. Sie lauten:

$$p_0(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu} t^{\nu}, \quad p_1(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_{\nu} t^{\nu}; \quad \alpha_{\nu}, \beta_{\nu} \in \mathbb{R}.$$

DGLen vom Typ (4.39) spielen in der theoretischen Mechanik und in der Quantenmechanik eine Rolle. Die Lösungsmethode „Potenzreihenansatz“ ist dort eine häufig verwendete Methode.

Die bisher bereitgestellten Existenzsätze machen Aussagen über die Existenz einer Lösung in Intervallen I mit $0 \notin I$. Der Vorteil der Potenzreihenmethode besteht nun darin, dass sich das Verhalten der Lösungen in $(0, \rho)$ bei Annäherung an $t = 0$ studieren läßt und sich dann auf ganz $(-\rho, \rho)$ verstehen läßt.

Beispiel 4.23 Die EULER'sche DGL hat die Form

$$t^2 y'' + t \beta y' + \alpha y = 0$$

Man kann hier etwa $\rho = \infty$ wählen.

$\beta = 2, \alpha = 0$:

Lösungen in $(0, \infty)$: $y_1(t) = 1, y_2(t) = \frac{1}{t}$.

$\beta = 1, \alpha = 0$:

Lösungen in $(0, a)$: $y_1(t) = 1, y_2(t) = \log t$.

$\beta = -1, \alpha = 1$:

Lösungen in $(0, \infty)$: $y_1(t) = t, y_2(t) = t \log t$. Man beachte das Verhalten für $t \rightarrow 0$. \square

Wir machen für die Lösung von (4.39) einen **Potenzreihenansatz**:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n t^{n+\lambda}, \quad \lambda, \eta_n \in \mathbb{C}, t > 0; \quad (4.40)$$

dabei ist t^{α} für komplexes $\alpha = u + iv$ folgendermaßen erklärt:

$$t^{\alpha} = t^u t^{iv} = t^u e^{iv \ln t} = t^u (\cos(v \ln t) + i \sin(v \ln t))$$

Durch Übergang zu Real- und Imaginärteil von y kommen wir zu (zwei) reellen Lösungen zurück.

Einsetzen von (4.40) in (4.39) liefert:

$$t^2 y''(t) + t p_1(t) y'(t) + p_0(t) y(t) = \eta_0 \chi(\lambda) t^{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(\lambda) t^{\lambda+n}$$

mit :

$$\chi(\lambda) := \lambda(\lambda - 1) + \beta_0 \lambda + \alpha_0, \quad \delta_n(\lambda) := \eta_n \chi(\lambda + n) + \sum_{j=1}^n \eta_{n-j} \{(\lambda + n - j) \beta_j + \alpha_j\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Das Polynom χ heißt **Indexgleichung** der DGL (4.39). Da dieses Polynom quadratisch ist, gibt es $\lambda^* \in \mathbb{C}$ mit

$$\chi(\lambda^*) = 0; \chi(\lambda^* + n) \neq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(Man nehme etwa die "größere" der beiden Nullstellen.)

Dann kann man bei Vorgabe von η_0 sukzessive η_n so berechnen, daß $\delta_n(\lambda) = 0$, $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit haben wir gezeigt:

Satz 4.24

Sei $\eta_0 \neq 0$ vorgegeben und seien $\lambda^* \in \mathbb{C}$ und $\eta_\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{N}$, so bestimmt, daß gilt

$$\chi(\lambda^*) = 0; \chi(\lambda^* + n) \neq 0, \delta_n = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (4.41)$$

Ist dann die Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \eta_\mu t^\mu$$

konvergent in $(-\rho, \rho)$, so stellt

$$y(t) := t^{\lambda^*} \sum_{\mu=0}^{\infty} \eta_\mu t^\mu, \quad t \in (0, \rho) \quad (4.42)$$

eine Lösung von (4.39) in $(0, \rho)$ dar.

Bemerkung 4.25

Die Konvergenz der Reihe $\sum_{\mu=0}^{\infty} \eta_\mu t^\mu$ kann in $(-\rho, \rho)$ stets gezeigt werden. Wegen des Faktors t^{λ^*} kann im allgemeinen nichts über die Definiertheit von y in $t = 0$ gesagt werden. \square

Beispiel 4.26 Betrachte

$$t^2 y'' - ty = 0.$$

Indexgleichung: $\chi(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$.

Wurzeln: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$; wähle $\lambda^* := \lambda_2$.

Man erhält nach Satz (4.24) als Lösung

$$y(t) = t \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!(\mu+1)!} t^\mu, \quad t \geq 0.$$

($\eta_0 := 1$; Konvergenz mit dem Quotientenkriterium) \square

Beispiel 4.27 Betrachte die BESSELSche DGL⁵

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - \alpha^2)y = 0.$$

Indexgleichung: $\chi(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + \lambda - \alpha^2$.

Wurzeln: $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = -\alpha$.

Man erhält nach Satz (4.24) im Fall $\alpha = 0$ als Lösung

$$y(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{2^2 \dots (2j)^2} t^\mu, \quad t \geq 0.$$

($\eta_0 := 1$; Konvergenz mit dem Quotientenkriterium) \square

⁵Gewisse Lösungen dieser DGL werden als Besselfunktionen J_α bezeichnet. Die DGL tritt auf, wenn man die Laplacegleichung mit einem Separationssatz löst.

Zur Gewinnung der allgemeinen Lösung von (4.39) benötigen wir eine zweite linear unabhängige Lösung. Für die Fälle

λ doppelte Nullstelle, λ_1, λ_2 Nullstellen von χ , $\lambda_2 = \lambda_1 + n$ für ein $n \in \mathbb{N}$,

gibt es ein Konstruktionsverfahren. Man erhält linear unabhängige Lösungen der Form

$$y_1(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \eta_{\mu} t^{\mu+\lambda}, \quad y_2(t) = y_1(t) \ln t + \sum_{\mu=0}^{\infty} \xi_{\mu} t^{\mu+\lambda}.$$

4.7 Laplace–Transformation

Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Wir schreiben die **Laplace–Transformierte** \hat{f} von f hin:

$$\hat{f}(\sigma) := \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) dt, \quad \sigma \in \mathbb{C}. \quad (4.43)$$

Die Laplace–Transformierte \hat{f} existiert, d.h. das Integral in (4.43) konvergiert, für eine weite Klasse von Funktionen f , wenn man das Argument σ auf Teilbereiche der komplexen Ebene einschränkt. Eine typische Situation liegt vor, wenn f von **Exponentialtyp** ist, d.h., wenn

$$|f(t)| \leq ce^{at}, \quad t \in [0, \infty)$$

ist mit Konstanten $c, a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$|e^{-\sigma t} f(t)| \leq |e^{-\sigma t}| |f(t)| \leq ce^{-\operatorname{Re}(\sigma)t} e^{at}, \quad t \in [0, \infty),$$

und $\hat{f}(\sigma)$ existiert für alle $\sigma \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(\sigma) > a$. Dort ist \hat{f} sogar analytisch. Der Definitionsbereich und Bildbereich der **Laplace–Transformation**

$$\mathcal{L} : f \mapsto \hat{f}$$

ist nicht einfach anzugeben. Dementsprechend ist die Inverse

$$\mathcal{L}^{-1} : g \mapsto \check{g}$$

– \mathcal{L}^{-1} heißt **inverse Laplace–Transformation** – nicht einfach anzugeben. Formal ist eine Inversionsformel gegeben durch

$$\mathcal{L}^{-1}(g)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\sigma t} g(\sigma) d\sigma,$$

wobei a so zu wählen ist, daß Existenz des Integrals gesichert ist.⁶

Wir geben Rechenregeln für den Umgang mit der Laplace–Transformation an. Damit erfassen wir den im weiteren Verlauf wichtigen Spezialfall der Behandlung von rationalen Funktionen.⁷

⁶($\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}$ bedeutet, daß entlang des Weges $\gamma : (-\infty, \infty) \ni t \mapsto a + it \in \mathbb{C}$ zu integrieren ist).

⁷Zur Theorie der Laplace–Transformation siehe etwa: Doetsch: Einführung in die Theorie und Anwendung der Laplace–Transformation, Teubner-Verlag, 1976

- $\mathcal{L}(af) = a\mathcal{L}(f)$; $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(f)$ existiert.
- $\mathcal{L}(f + g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$; $\mathcal{L}(f), \mathcal{L}(g)$ existieren.
- $\mathcal{L}(e^{-a \cdot} f)(\cdot) = \mathcal{L}(f)(\cdot + a)$; $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(f)$ existiert.
- $\mathcal{L}(f')(\sigma) = \sigma\mathcal{L}(f)(\sigma) - f(0)$, falls f differenzierbar ist und $\mathcal{L}(f')$ existiert.
- $\mathcal{L}(f^{(n)})(\sigma) = \sigma^n \mathcal{L}(f)(\sigma) - \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^{n-i-1} f^{(i)}(0)$, falls die n -te Ableitung von f und $\mathcal{L}(f')$ existiert.
- $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$;
hierbei ist die Faltung $f * g$ definiert durch $f * g(t) := \int_0^t f(s)g(t-s)ds$.
- $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \mathcal{L}(f)(\sigma)$, falls $\mathcal{L}(f)$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existieren.

Hat man eine Tabelle von Laplace-Transformierten, so kann man sich mit Hilfe der Rechenregeln daraus weitere Transformierte ausrechnen. Hier ist eine kleine Tabelle:

$\mathbf{f}(t)$	$\hat{\mathbf{f}}(\sigma)$
1	$\frac{1}{\sigma}$
t	$\frac{1}{\sigma^2}$
t^n	$\frac{n!}{\sigma^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{\sigma + a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(\sigma + a)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{\sigma^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(\sigma + a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{\sigma + a}{(\sigma + a)^2 + \omega^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{\sigma^2 - a^2}$

Beispiel 4.28 Betrachte die Anfangswertaufgabe

$$x'' - 3x' + 2x = e^{3t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

Ist x eine Lösung, so gilt mit $\hat{x} = \mathcal{L}(x)$ nach obigen Regeln

$$\sigma^2 \hat{x}(\sigma) - x'(0) - \sigma x(0) - 3\sigma \hat{x}(\sigma) + 3x(0) + 2\hat{x}(\sigma) = \frac{1}{\sigma - 3},$$

d.h.

$$\hat{x}(\sigma) = \frac{\sigma - 3 + \frac{1}{\sigma - 3}}{\sigma^2 - 3\sigma + 2} = \frac{5}{2(\sigma - 1)} - \frac{2}{\sigma - 2} + \frac{1}{2(\sigma - 3)}.$$

Inversion ergibt

$$x(t) = \frac{5}{2}e^t - 2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}, t \in \mathbb{R}.$$

Nun kann man verifizieren, daß wir in der Tat eine Lösung gefunden haben. \square

Die Laplace-Transformation für vektorwertige Funktionen wird komponentenweise erklärt:

$$\mathcal{L}(f) = (\mathcal{L}(f_1), \dots, \mathcal{L}(f_n)) \text{ für } f = (f_1, \dots, f_n).$$

Wir betrachten

$$z' = Az + f(t)$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $f \in C([0, \infty); \mathbb{R}^n)$. Mit den Bezeichnungen

$$\hat{z} := \mathcal{L}(z), \hat{f} := \mathcal{L}(f)$$

ergibt sich mit den Rechenregeln

$$\sigma \hat{z}(\sigma) - z(0) = A\hat{z}(\sigma) + \hat{f}(\sigma),$$

also

$$\hat{z}(\sigma) = G(\sigma)(\hat{f}(\sigma) + z(0)) \text{ mit } G(\sigma) := (\sigma I - A)^{-1}, \sigma \in \mathbb{C}. \quad (4.44)$$

Die Definition in (4.44) ist nicht rigoros, da wir nicht Rücksicht auf die Wohldefiniertheit der Inversen von $\sigma I - A$ genommen haben.

Definition 4.29

Die Matrixfunktion

$$G : \mathbb{C} \setminus sp(A) \ni \sigma \longmapsto (\sigma I - A)^{-1} \in \mathbb{C}^{n,n}$$

heißt (**spektrale**) **Übertragungsfunktion** zum System. Hierbei ist

$$sp(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ Eigenwert von } A\}$$

das **Spektrum** von A . \square

Die (spektrale) Übertragungsfunktion G ist eine Matrixfunktion mit rationalen Einträgen. Die Eigenwerte von A sind Pole der Abbildung. Dies folgt aus der Cramerschen Regel. Genauer: G hat die Darstellung

$$G(\sigma) = p_A(\sigma)^{-1}Q(\sigma)$$

wobei p_A das Minimalpolynom von A ist und Q eine Matrixfunktion ist, die als Einträge Polynome vom Höchstgrad $n - 1$ hat. Daraus erklärt sich der Begriff "Polvorgabe" (pole assignment, pole placement) bei der Entwicklung eines gewünschten Übertragungsverhaltens in der Steuerungstheorie.

Beispiel 4.30 Betrachte ein gedämpftes System

$$x'' + 3x' + 2x = u(t).$$

Dies ist ein System mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ u(t) \end{pmatrix}.$$

Also haben wir

$$\begin{aligned} \sigma I - A &= \begin{pmatrix} \sigma & -1 \\ 2 & \sigma + 3 \end{pmatrix}, \\ (\sigma I - A)^{-1} &= \frac{1}{(\sigma + 1)(\sigma + 2)} \begin{pmatrix} \sigma + 3 & 1 \\ -2 & \sigma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Pole $\sigma = -1, \sigma = -2$ spiegeln die Eigenwerte von A wieder. □

Kapitel 5

Stabilität bei autonomen Systemen

Wir diskutieren hier die Frage nach dem Langzeitverhalten von Lösungen autonomer Differentialgleichungen. Zwei Methoden sind zu besprechen: Linearisierungstechnik und die direkte Methode von Ljapunov. Eingangs stellen wir zunächst einige Begriffe bereit. Die abschließende algebraische Charakterisierung von Stabilitätsmatrizen ist vor allem in der Regelungstheorie von Interesse.

5.1 Autonome Systeme und Trajektorien

Wir betrachten hier die DGL

$$y' = f(y) \tag{5.1}$$

und nehmen stets

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ lokal } L\text{-stetig, } D \subset \mathbb{R}^n \text{ offen} \tag{5.2}$$

an. Da die rechte Seite f – wir sprechen bei f nun oft auch von einem Vektorfeld – nicht explizit von der unabhängigen Variablen t abhängt, nennen wir die DGL **autonom**. Diese Tatsache hat Konsequenzen für die Eigenschaften, die wir schon untersucht haben: Es treten einige Besonderheiten auf. Eine erste solche Besonderheit ist, daß wir o.E. stets annehmen können, dass eine Anfangsbedingung mit der Anfangszeit $t_0 = 0$ formuliert wird; eine Zeitverschiebung macht dies möglich: Ist y eine Lösung der DGL mit $y(t_0) = \xi$, dann ist $z(\cdot) := y(\cdot + t_0)$ eine Lösung der DGL mit $z(0) = \xi$.

Eine **maximale Lösung** y der AWA

$$y' = f(y), y(0) = \xi \tag{5.3}$$

ist nach Satz 2.29 eine Abbildung $y(\cdot; \xi) : I^*(\xi) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $I^*(\xi)$ ist ein offenes Intervall;
2. $y(t; \xi) \in D$ für alle $t \in I^*(\xi)$;
3. $y(\cdot; \xi)$ differenzierbar und $y'(t; \xi) = f(y(t; \xi))$ für alle $t \in I^*(\xi)$.
4. $y(\cdot; \xi)$ ist nicht mehr fortsetzbar (auf ein größeres Intervall).

Wir schreiben das maximale Existenzintervall $I^*(\xi)$ stets als Intervall so: $I^*(\xi) = (I_-^*(\xi), I_+^*(\xi))$.

Die gewählten Voraussetzungen gestatten es nun, zu $t \in I^*(\xi)$ die Abbildung

$$\Phi_t^f := \Phi_t : D \ni \xi \mapsto y(t; \xi) \in D$$

einzuführen. Wir halten damit fest:

Satz 5.1

Es gelten die folgenden Aussagen:

- $I^*(\Phi_t \xi) = (I_-^*(\xi) - t, I_+^*(\xi) - t)$ für alle $t \in I^*(\xi), \xi \in D$;
- $\Phi_0 \xi = \xi$ für alle $\xi \in D$;
- $\Phi_{t+s} \xi = (\Phi_t \circ \Phi_s) \xi$ für alle s, t mit $s, s+t \in I^*(\xi)$ für alle $\xi \in D$;
- $(\Phi_{-t} \circ \Phi_t) \xi = \xi$ für alle $t \in I^*(\xi), \xi \in D$;
- für jedes $\xi \in D$ und für jedes $t \in I^*(\xi)$ ist die Abbildung $(s, \eta) \mapsto \Phi_s \eta$ stetig in (ξ, t) .

Beweis:

a), b) sind trivial.

Zu c). Betrachte die Lösungen $u(\cdot) := y(\cdot + s; \xi)$ und $z(\cdot) := y(\cdot; \Phi_s \xi)$. Da $u(0) = y(s; \xi) = z(0)$ gilt, folgt aus Eindeutigkeitsgründen $u(t) = z(t)$, d.h. $y(t + s; \xi) = y(t; \Phi_s \xi)$ für alle zulässigen t .

d) folgt aus c).

Zu e). Folgt aus dem Sachverhalt, daß Lösungen stetig vom Anfangswert abhängen; siehe Satz 3.6. ■

Definition 5.2

Eine Familie $\{\Phi_t\}$ von Abbildungen mit den Eigenschaften b), c), d), e) aus Satz 5.1 heisst eine C^0 -Gruppe (von Bewegungen) auf D oder ein **Fluss auf D** . □

C^0 -Gruppe soll ausdrücken, dass Gruppeneigenschaften gegeben sind und daß die topologische Eigenschaft "Stetigkeit" (siehe e)) vorliegt.

Bemerkung 5.3

Bei partiellen Differentialgleichungen (parabolisch, hyperbolisch, ...) ist i.a. keine C^0 -Gruppe von Bewegungen zu erreichen, sondern nur eine C^0 -Halbgruppe. Dies ist eine Familie, bei der d) nicht vorliegt und die Lösungsintervalle $I^*(\xi)$ nur als $[0, I_+^*(\xi))$ vorliegen und dies in c), e) zu berücksichtigen ist. □

Bemerkung 5.4

Hat man eine C^0 -Gruppe $\{\Phi_t\}$ auf D , so kann man ein Vektorfeld

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

zuordnen gemäß

$$f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} (\Phi_t \xi - \xi).$$

Man nennt f die Phasengeschwindigkeit des Flusses $\{\Phi_t\}$. Sind die Abbildungen Φ_t linear (D ist also ein Vektorraum), so wird die Phasengeschwindigkeit selbst linear operieren. Diese Anmerkung verweist auf die umfangreichen Theorie der C^0 -Halbgruppen in normierten Räumen. \square

Definition 5.5

Eine Teilmenge T von D heisst **Trajektorie** oder **Orbit**, falls es eine maximale Lösung $y = y(\cdot; \xi)$ gibt mit

$$T = \{y(t; \xi) | t \in I^*(\xi)\}.$$

Für jedes $\xi \in D$ bezeichne

$$O(\xi) := \{y(t; \xi) | t \in I^*(\xi)\}$$

die **Trajektorie (den Orbit)** durch ξ . Ferner nennen wir

$$O^+(\xi) := \{y(t; \xi) | t \in [0, I_+^*(\xi)]\}, \quad O^-(\xi) := \{y(t; \xi) | t \in (I_-^*(\xi), 0]\}$$

die **positive** bzw. **negative Halbtrajektorie**. \square

Eine Trajektorie ist also stets eine Kurve in \mathbb{R}^n , die zusätzlich durch die "Zeit" t eine Orientierung erhält; wir verdeutlichen dies in Abbildungen durch Anbringen einer Pfeilspitze.

Beispiel 5.6 Betrachte das System

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = -y_1.$$

Wir haben $y(t; \xi_1, \xi_2) = (\xi_1 \cos t + \xi_2 \sin t, \xi_2 \cos t - \xi_1 \sin t)$ und wegen $|y(t; \xi_1, \xi_2)| = |(\xi_1, \xi_2)|$ sind sämtliche Trajektorien konzentrische Kreise um den Koordinatenursprung. \square

Satz 5.7

Betrachte die Differentialgleichung (5.1). Sei $\xi \in D$ und sei $O(\xi)$ der zugehörige Orbit. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:

- $I^*(\xi) = (-\infty, \infty)$ und $O(\xi) = \{\xi\}$.
- $I^*(\xi) = (-\infty, \infty)$ und $O(\xi)$ ist eine geschlossene Kurve und $O(\xi) = O^+(\xi) = O^-(\xi) \neq \{\xi\}$.
- $O(\xi)$ ist injektives Bild von $I^*(\xi)$ (bezüglich der maximalen Lösung $y(\cdot; \xi)$).

Beweis:

Vorüberlegung: Ist $y(\cdot; \xi)$ nicht injektiv, dann gibt es $\sigma, \tau \in I^*(\xi)$ mit $\sigma \neq \tau$ und $y(\sigma; \xi) = y(\tau; \xi)$; o.E. $\tau > \sigma$. Setze $z(t) := y(t + \tau - \sigma; \xi)$, $t \in (I_-^*(\xi) - \tau + \sigma, I_+^*(\xi) - \tau + \sigma)$. Dann sind $y(\cdot; \xi)$ und z Lösungen von (5.1) mit $z(\sigma) = y(\tau; \xi) = y(\sigma; \xi)$. Also sind aus Eindeutigkeitsgründen z und $y(\cdot; \xi)$ identisch, insbesondere $I_-^*(\xi) - \tau + \sigma = I_-^*(\xi)$, $I_+^*(\xi) - \tau + \sigma = I_+^*(\xi)$. Daraus folgt $I_-^*(\xi) = -\infty$, $I_+^*(\xi) = \infty$. Ferner $y(t; \xi) = y(t + \tau - \sigma; \xi)$, $t \in \mathbb{R}$. Also ist $\tau - \sigma \neq 0$ eine Periode.

Die Vorüberlegung zeigt, daß jede nicht-injektive Lösung $y(\cdot; \xi)$ auf ganz \mathbb{R} erklärt und dort periodisch ist. Somit ist sie entweder konstant, d.h. es gilt $O(\xi) = O^+(\xi) = O^-(\xi) =$

$\{\xi\}$, oder sie ist periodisch und nicht konstant, also gilt $O(\xi) \neq \{\xi\}$. Ist $\omega > 0$ eine Periode von $y(\cdot; \xi)$, so erhalten wir die Beziehung

$$O(\xi) = \{y(t; \xi) | t \in [0, \omega]\} = \{y(t; \xi) | t \in [0, \infty)\},$$

und dies bedeutet, daß $O(\xi) = O^+(\xi)$ gilt. Entsprechend ergibt sich die Beziehung $O(\xi) = O^-(\xi)$. ■

Ein System, bei dem alle drei Typen von Trajektorien vorhanden sind, ist in Beispiel 5.9 dargestellt. Ein solches Beispiel muß, wenn wir es in der Dimension $n = 2$ suchen, sicherlich nichtlinear sein, wie der Blick auf die möglichen Trajektorien im linearen Fall, siehe Kapitel 4, zeigt. Zunächst aber der skalare Fall:

Beispiel 5.8 Ist (5.1) eine skalare DGL ($n = 1$), so treten nur Punkte und offene Intervalle als Trajektorien auf, denn: Jede periodische Lösung muß konstant sein, da eine nichtkonstante periodische Lösung offenbar Maxima und Minima annimmt und in diesen Extrema $y'(t; \xi) = 0$ gelten muss, was $y(\cdot; \xi)$ identisch ξ nach sich zieht. □

Beispiel 5.9 Betrachte

$$x' = y + x(1 - x^2 - y^2), \quad y' = -x + y(1 - x^2 - y^2). \quad (5.4)$$

Hier sind die Lösungen gegeben durch

$$z(t; \xi, \eta) := \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (1 - \xi^2 - \eta^2)e^{-2t}}} (\xi \cos t + \eta \sin t, \eta \cos t - \xi \sin t), \quad t \in \mathbb{R}; \xi, \eta \in \mathbb{R}.$$

Hieraus liest man alle drei Typen von Trajektorien aus Satz 5.7 ab.

Wie sind wir auf die obigen Lösungen gekommen? Der Term $1 - x^2 - y^2$ in der rechten Seite des Systems legt nahe, trigonometrische Funktionen für einen Lösungsansatz zu versuchen, oder genauer, **Polarkoordinaten** zu verwenden. Also machen wir den Ansatz:

$$x(t) := r(t) \cos \phi(t), \quad y(t) := r(t) \sin \phi(t).$$

Man erhält in formaler Rechnung

$$x' = r' \cos \phi - r \sin \phi \phi', \quad y' = r' \sin \phi + r \cos \phi \phi',$$

$$r' \cos \phi - r \sin \phi \phi' = -r \cos \phi + r \sin \phi (1 - r^2), \quad r' \sin \phi + r \cos \phi \phi' = r \sin \phi + r \cos \phi (1 - r^2),$$

und einfache Manipulationen (Multiplikation und Addition/Subtraktion der Gleichungen) führt zu den DGLen

$$\phi' = -1, \quad r' = r(1 - r^2).$$

Wir erhalten (Trennung der Variablen bei r) dann

$$\phi(t) = -t + \phi_0, \quad r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2t}}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen in den Ansatz ergibt die obigen Lösungsformeln. □

Folgerung 5.10

Durch

$$\xi \sim \eta : \iff \exists \tau \in I^*(\xi) (\eta = y(\tau; \xi))$$

wird auf D eine Äquivalenzrelation erzeugt.

Beweis:

Dies ist einfach zu verifizieren. Klar, die Trajektorie $O(\xi)$ ist Repräsentant der von ξ erzeugten Äquivalenzklasse. ■

Bezeichnung: Das **Phasenportrait** ist die Zerlegung von D in Äquivalenzklassen gemäß Folgerung 5.10.

Das Phasenportrait ebener Systeme können wir unter Umständen als Lösungsgesamtheit einer skalaren DGL verstehen. Dazu:

Lemma 5.11

Gegeben sei das System

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y)$$

mit $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ lokal L -stetig, $D \subset \mathbb{R}^2$ offen.

Gilt dann $f(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in D$, so ist die Trajektorie $O(\xi, \eta)$ identisch mit der maximalen Lösungskurve von

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \quad y(\xi) = \eta. \quad (5.5)$$

Beweis:

Sei $I^*(\xi, \eta)$ das maximale Lösungsintervall der Lösung $x := x(\cdot; \xi, \eta), y := y(\cdot; \xi, \eta)$, die den Orbit $O(\xi, \eta)$ beschreibt. Wir haben

$$x'(t) = f(x(t), y(t)) \neq 0 \text{ für alle } t \in I^*(\xi, \eta).$$

Also ist x streng monoton und besitzt daher eine auf $R := x(I^*(\xi, \eta))$ erklärte Umkehrfunktion $u : R \rightarrow I^*(\xi, \eta)$ mit $u(\xi) = 0$. Damit haben wir

$$O(\xi, \eta) = \{(x(t), y(t)) | t \in I^*(\xi, \eta)\} = \{(x(u(r)), y(u(r))) | r \in R\} = \{(r, y(u(r))) | r \in R\}.$$

Zu zeigen bleibt: $\mu : r \mapsto y(u(r))$ ist maximale Lösung der AWA (5.5). Dies ergibt sich so:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dr}(r) &= y'(\mu(r))\mu'(r) = y'(\mu(r))\frac{1}{x'(\mu(r))} \\ &= \frac{g(x(u(r)), y(u(r)))}{f(x(u(r)), y(u(r)))} = \frac{g(r, \mu(r))}{f(r, \mu(r))} \end{aligned}$$

und

$$\mu(\xi) = y(u(\xi)) = y(0) = \eta.$$

Die Maximalität schließt man daraus, daß jeweils Fortsetzung auf der einen Ebene Fortsetzung auf der anderen Ebene nach sich zieht. ■

Beispiel 5.12 Betrachte das System

$$x' = y(1 - x^2)^2, \quad y' = -x(1 - y^2)^2.$$

Daraus ergibt sich entsprechend Lemma 5.11 die skalare DGL

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(1 - y^2)^2}{y(1 - x^2)^2}.$$

Diese DGL kann nun nach der Methode Trennung der Variablen gelöst werden. \square

Nicht immer kann man das Vorgehen von Lemma 5.11 im gesamten Gebiet D anwenden. Aber man kann dann eventuell ein entsprechendes Vorgehen im Austausch von x gegen y versuchen.

5.2 Stabilitätsbegriffe

Wir betrachten

$$y' = f(y) \tag{5.6}$$

und über das Vektorfeld f setzen generell voraus:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad D \subset \mathbb{R}^n \text{ offen.} \tag{5.7}$$

$$\bar{y} \in D, \quad f(\bar{y}) = \theta. \tag{5.8}$$

$$f \text{ lokal L-stetig in } D. \tag{5.9}$$

Da das System autonom ist – das Vektorfeld f hängt nicht (explizit) von der Zeit ab –, können wir o.E. die Lösungen bei $t_0 = 0$ “starten“; siehe oben.

Die Voraussetzung (5.9) sichert, daß zu vorgegebenem $\xi \in D$ die Anfangswertaufgabe

$$y' = f(y), \quad y(0) = \xi \tag{5.10}$$

stets eine Lösung $y(\cdot; \xi)$ auf einem maximalen Existenzintervall $I^*(\xi)$ besitzt; wir setzen, da wir uns nur für die “Zukunft“ interessieren, $J(\xi) := [0, \omega(\xi)) := [0, \infty) \cap I^*(\xi)$; diese Lösung ist eindeutig bestimmt (siehe Satz 2.23).

Die Voraussetzung (5.8) besagt, daß \bar{y} ein **Gleichgewichtspunkt des Systems** ist, denn zum Anfangswert $\xi = \bar{y}$ gehört dann als Lösung die **Ruhelage** $y(\cdot, \xi)$, die konstant gleich \bar{y} ist.

Wir erinnern an die Bezeichnungen

$$B_r(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid |x - v| < r\}, \quad \bar{B}_r(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid |x - v| \leq r\}, \quad B_r = B_r(\theta), \quad \bar{B}_r = \bar{B}_r(\theta), \quad r \geq 0.$$

Definition 5.13

Der Gleichgewichtspunkt \bar{y} heißt **stabil**, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \xi \in B_\delta(\bar{y}) (J(\xi) = [0, \infty), y(t, \xi) \in B_\epsilon(\bar{y}) \forall t \geq 0)$$

gilt.

Der Gleichgewichtspunkt \bar{y} heißt **attraktiv**, wenn

$$\exists \delta > 0 \forall \xi \in B_\delta(\bar{y}) (J(\xi) = [0, \infty), \lim_{t \rightarrow \infty} y(t, \xi) = \bar{y})$$

gilt.

Der Gleichgewichtspunkt \bar{y} heißt **asymptotisch stabil**, wenn \bar{y} stabil und attraktiv ist. \square

Beispiel 5.14 Wir betrachten die nichtlineare Pendelgleichung

$$\ddot{x} + \sin x = 0 .$$

Als System haben wir

$$y' = f(y) \text{ mit } f(y) := \begin{pmatrix} y_2 \\ -\sin y_1 \end{pmatrix}$$

und Gleichgewichtspunkte sind

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Durch Verschieben wird der Gleichgewichtspunkt $\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Nullpunkt und kann damit auch im Sinne von Definition 5.13 untersucht werden. Anschaulich ist klar, daß die Gleichgewichtspunkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ ganz unterschiedliche Qualität haben. Ohne hier schon auf die Begründung einzugehen, sei angemerkt, daß $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ stabil und $\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht stabil ist. \square

Beispiel 5.15 Wir betrachten das **Lorenz-System**:

$$y' = f(y) \text{ mit } f(y) = \begin{pmatrix} sy_2 - sy_1 \\ ry_1 - y_2 - y_1y_3 \\ y_1y_2 - by_3 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Dabei sind s, r, b positive Konstanten.

Dieses System diente Lorenz als endlich-dimensionales Modell der Rayleigh-Bénard-Konvektion. Es zeigt für die Parameterwerte

$$s = 10, r = 28, b = \frac{8}{3}$$

einen numerisch beobachteten und inzwischen intensiv studierten seltsamen Attraktor.¹ Für $r > 1$ hat das System drei Gleichgewichtspunkte:

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{z} = \begin{pmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}, \bar{z} = \begin{pmatrix} -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}$$

Das Stabilitätsverhalten dieser Gleichgewichtspunkte können wir studieren, wenn wir etwas über die Linearisierungstechnik wissen. Es klärt die instabile Natur dieses Systems ziemlich gut auf. \square

¹Siehe etwa: Jeschke, G.: Mathematik der Selbstorganisation, Vieweg-Verlag, 1989.

Bemerkung 5.16

Die Begriffe “stabil, attraktiv“ haben wir mit Kugelumgebungen von \bar{y} eingeführt. Klar, an ihre Stelle können beliebige Umgebungen von \bar{y} treten, etwa:

\bar{y} ist attraktiv genau dann, wenn es eine Umgebung W von \bar{y} gibt mit: $y(\cdot; \xi)$ existiert in $[0, \infty)$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t; \xi) = \bar{y}$ für alle $\xi \in W$. \square

Die Begriffe “stabil“ und “attraktiv“ sind unabhängige Begriffe. Schon bei linearen Systemen sieht man, daß ein stabiler Gleichgewichtspunkt nicht attraktiv sein muß. Man wähle etwa ein ebenes System mit den Eigenwerten $\pm i$; beachte b) in Satz 5.18.

Man beachte auch, daß im allgemeinen aus der Eigenschaft “attraktiv“ nicht die Eigenschaft “asymptotisch stabil“ folgt. Dazu folgendes Beispiel.

Beispiel 5.17 Betrachte

$$r' = r(1 - r), \quad \phi' = \sin^2 \frac{\phi}{2}.$$

Das Phasenportrait ist vollständig zu ermitteln, da die Lösungen angebar sind:²

$$r(t) := \frac{r_0}{r_0 + (1 - r_0)e^{-t}}, \quad \phi(t) := 2 \arctan\left(\frac{2 \sin \phi_0}{2 \cos \phi_0 - t \sin \phi_0 + 2}\right).$$

In der Interpretation von r, ϕ als Polarkoordinaten von kartesischen Koordinaten x, y erhalten wir ein DGI-System für x, y . Der Einheitskreis besteht aus der Ruhelage $(1, 0)$ und einer Trajektorie, die im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird. Man sieht, daß $(1, 0)$ nicht stabil aber attraktiv ist. \square

5.3 Stabilität bei linearen Systemen

Wir betrachten hier einen linearen Spezialfall von (5.6))

$$y' = Ay \quad (A \in \mathbb{R}^{n,n}) \quad (5.12)$$

und klären die Stabilität des Gleichgewichtspunktes $\bar{y} = \theta$ mit folgendem Satz.

Satz 5.18

Es sind äquivalent:

- Der Gleichgewichtspunkt $\bar{y} = \theta$ ist asymptotisch stabil.
- Der Gleichgewichtspunkt $\bar{y} = \theta$ ist attraktiv.
- $\max\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \text{ Eigenwert von } A\} < 0$.

Beweis:

a) \implies b) Definition 5.13.

b) \implies c) Annahme: Es gibt einen Eigenwert $\lambda = \alpha + i\beta$ von A mit $\alpha \geq 0$. Ist dann v ein zugehöriger Eigenvektor, so wird durch

$$z(s) := \operatorname{Re}(e^{\lambda s} v), \quad s \geq 0$$

²Die Wahl des Zweiges der \arctan -Funktion ist jeweils dem Anfangswert ϕ_0 anzupassen.

eine Lösung definiert, für die offenbar nicht gilt: $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \theta$.

c) \implies a) Nach Satz 4.7 gilt

$$\|e^{At}\| \leq ce^{-\omega t}, \quad t \geq 0,$$

mit Konstanten $c \geq 0, \omega > 0$. Daraus folgt die Behauptung unter Beachtung der Lösungsdarstellung $y(t; \xi) = e^{At}\xi$. ■

Bemerkung 5.19

Ist der Gleichgewichtspunkt $\bar{y} = \theta$ asymptotisch stabil, so wissen wir wegen c) in Satz 5.18, daß alle Lösungen für $t \rightarrow \infty$ exponentiell gegen Null gehen. Diese Eigenschaft bezeichnet man als **exponentielle Stabilität**. Wir halten also fest, daß asymptotische Stabilität und exponentielle Stabilität bei linearen autonomen Systemen übereinstimmt. □

Bemerkung 5.20

Ist der Gleichgewichtspunkt $\bar{y} = \theta$ asymptotisch stabil, so ist das System (5.12) **BIBO-stabil** (BIBO: bounded input – bounded output), d.h. ist $b \in L_\infty([0, \infty); \mathbb{R}^n)$, so ist auch jede Lösung von

$$y' = Ay + b(t), \quad t \geq 0,$$

in $L_\infty([0, \infty); \mathbb{R}^n)$. Man sieht dies mit der Lösungsdarstellung für die inhomogene Aufgabe sofort. Diese Eigenschaft geht verloren, wenn der Gleichgewichtspunkt $\bar{y} = \theta$ nur stabil ist; siehe nachfolgendes Beispiel. □

Beispiel 5.21 Betrachte den harmonischen Oszillator

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = b(t)$$

oder als System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Der Gleichgewichtspunkt $\bar{y} = \theta$ von

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

ist stabil, da eine Fundamentalmatrix gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \\ \omega_0 \cos \omega_0 t & -\omega_0 \sin \omega_0 t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Betrachten wir als Inhomogenität (Input) die beschränkte Funktion $b(t) := \cos \omega t$, so lautet eine zugehörige Lösung

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t}{2\omega_0} \sin \omega_0 t & , \text{ für } \omega = \omega_0 \\ \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) & , \text{ für } \omega \neq \omega_0 \end{cases}$$

Für $\omega \neq \omega_0$ ist die Lösung eine Überlagerung von Schwingungen mit den Frequenzen $\frac{d}{2\pi}$ (Eigenfrequenz des Systems) und $\frac{\omega}{2\pi}$ (Erregerfrequenz). Für den **Resonanzfall** $\omega_0 = \omega$ ergibt sich die sogenannte **Resonanzkatastrophe**: “Aufschaukeln“ der Schwingung bis zur “Zerstörung“ des Systems. □

Bemerkung 5.22

Ist $\max\{Re(\lambda) | \lambda \text{ Eigenwert von } A\} = 0$, so liegt Stabilität des Gleichgewichtspunktes $\bar{z} = \theta$ genau dann vor, wenn alle Jordan-Blöcke zu Eigenwerten λ mit $Re(\lambda) = 0$ Diagonalgestalt haben. Dies liest man an der Jordanschen Normalform von A ab. \square

Definition 5.23

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt **Stabilitätsmatrix**, wenn

$$\max\{Re(\lambda) | \lambda \text{ Eigenwert von } A\} < 0$$

gilt. \square

5.4 Das Routh–Hurwitz–Kriterium

Die Eigenwerte der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ aus (5.12) sind Wurzeln des charakteristischen Polynoms p_A von A . Sei p_A (bis auf das Vorzeichen) von der Form

$$p_A(r) = r^n + \sum_{i=1}^n a_i r^{n-i}.$$

Wir wissen, daß A eine Stabilitätsmatrix ist, wenn alle Wurzeln von p_A in der offenen linken Halbebene \mathbb{C} liegen. Das folgende Kriterium von Routh–Hurwitz erlaubt es, auf Stabilität zu testen.

Lemma 5.24

Ist A eine Stabilitätsmatrix, so sind alle Koeffizienten a_1, \dots, a_n von p_A positiv.

Beweis:

Seien die reellen Eigenwerte mit λ_k und die imaginären Eigenwerte mit λ_j bezeichnet. Dann gilt:

$$p_A(r) = \prod_k (r - \lambda_k) \prod_j (r^2 - 2Re(\lambda_j)r + |\lambda_j|^2)$$

Da

$$-\lambda_k > 0, -2Re(\lambda_j) > 0$$

nach Voraussetzung gilt, ergeben sich nur positive Koeffizienten. \blacksquare

Das obige Kriterium hat den Nachteil, daß man das charakteristische Polynom kennen muß. Ferner ist das Kriterium nicht hinreichend, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 5.25 Betrachte die DGL 3. Ordnung

$$x^{(3)} + x^{(2)} + x^{(1)} + x = 0.$$

Das charakteristische Polynom (des zugehörigen Systems) ist

$$p(r) = r^3 + r^2 + r + 1$$

und hat die Wurzeln

$$-1, \pm i.$$

Also ist Gleichgewichtspunkt $\bar{z} = \theta$ (des zugehörigen Systems) zwar stabil, aber nicht asymptotisch stabil. \square

Den Fall von Polynomen mit einem Grad nicht größer als 4, kann man hinreichende Bedingungen unter ausschließlicher Benutzung des Fundamentalsatzes der Algebra angeben.

Satz 5.26

Die Polynome

- i) $r + a$
- ii) $r^2 + ar + b$
- iii) $r^3 + ar^2 + br + c$
- iv) $r^4 + ar^3 + br^2 + cr + d$

mit reellen Koeffizienten haben nur Wurzeln mit negativen Realteil genau dann, wenn die entsprechend zugeordnete Bedingung gilt:

- i)* $a > 0$
- ii)* $a > 0, b > 0$
- iii)* $a > 0, b > 0, c > 0$ und $ab > c$
- iv)* $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ und $abc > c^2 + a^2d$

Beweis:

i) \iff i)* Trivial.

ii) \iff ii)* Folgt aus der Beobachtung, daß ein Polynom mit den Wurzeln

$$\lambda_{\pm} = -\alpha \pm i\beta$$

die Koeffizienten

$$a = -(\lambda_+ + \lambda_-), b = \lambda_+ \lambda_-$$

hat.

iii) \iff iii)* Ein Polynom p dritten Grades läßt sich über \mathbb{R} folgendermaßen zerlegen:

$$p(r) = r^3 + ar^2 + br + c = (r + \alpha)(r^2 + \beta r + \gamma), r \in \mathbb{R},$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Also hat man dann

$$a = \alpha + \beta, b = \gamma + \alpha\beta, c = \alpha\gamma, ab - c = \beta(\alpha^2 + \gamma + \alpha\beta) = \beta(\alpha^2 + b).$$

iii) \implies iii)* Wir lesen $\beta > 0$ an der letzten Identität ab und aus $ab = \alpha\gamma + \alpha\beta = c + \alpha^2\beta$ folgt $\alpha > 0$. Dann sieht man auch $\gamma > 0$.

iii)* \implies iii)* Wir haben mit der Äquivalenz von i) mit i)* und ii) mit ii)* sofort $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$, also $a > 0, b > 0$ und $c > 0$.

iv) \iff iv)* Ein Polynom p vierten Grades läßt sich über \mathbb{R} folgendermaßen zerlegen:

$$p(r) = r^4 + ar^3 + br^2 + cr + d = (r^2 + \alpha r + \beta)(r^2 + \gamma r + \delta), r \in \mathbb{C}.$$

Also hat man dann

$$a = \alpha + \gamma, b = \alpha\gamma + \beta + \delta, c = \alpha\delta + \beta\gamma, d = \beta\delta$$

und

$$abc - c^2 - a^2d = \alpha\gamma((\beta - \delta)^2 + ac).$$

Ist iv) erfüllt, folgt $a, b, c, d > 0$ mit Lemma 5.24 und $\alpha\gamma > 0$. Also $abc - c^2 - a^2d > 0$.

Sei iv)* erfüllt. Dann ist $\alpha\gamma > 0$ und α, γ haben gleiches Vorzeichen. Da $a = \alpha + \gamma$ gilt, folgt $\alpha, \gamma > 0$. Aus $d = \beta\delta > 0$ folgt, daß β, δ gleiches Vorzeichen haben. Dann folgt aus $c = \alpha\delta + \beta\gamma$ schließlich $\delta, \beta > 0$. Aus ii) \iff ii)* folgt dann, daß iv) gilt. ■

Beispiel 5.27 Ein elektrischer Filter mit einem Kondensator (Kapazität C), einem Widerstand (Widerstand R) und zwei Spulen (Induktivität jeweils L) wird modelliert durch die skalare Differentialgleichung

$$L^2 C x^{(3)} + R L C x^{(2)} + 2 L x^{(1)} + R x = 0.$$

Dabei steht x für die Stromstärke.

Mit dem obigen Kriterium folgt, daß der Filter asymptotisch stabil ist. \square

Nun kommen wir zum hinreichenden Kriterium für den allgemeinen Fall. Es wurde von E.J. Routh 1877 angegeben. Sei

$$p(r) = r^n + \sum_{i=1}^n a_i r^{n-i}$$

ein gegebenes Polynom mit reellen positiven Koeffizienten. Seien die Polynome U, V mit reellen Koeffizienten definiert durch

$$U(r) + iV(r) = p(ir), \quad r \in \mathbb{R}.$$

Wir haben:

Grad von $U = n$, Grad von $V = n - 1$, falls n gerade ist,
 Grad von $U = n - 1$, Grad von $V = n$, falls n ungerade ist.

Rechenschema:

- Setze $q_1 := U, q_2 := V$, falls n gerade ist,
 setze $q_1 := V, q_2 := U$, falls n ungerade ist.
- Seien nun die Polynome q_3, \dots, q_m erhalten durch den Euklidischen Algorithmus, angewendet auf das Paar q_1, q_2 . Also:

$$q_{k-1} = \kappa_k q_k - q_{k+1}, \quad k = 2, \dots, m-1, \quad q_{m-1} = \kappa_m q_m$$

- q_m ist bis auf eine Konstante der größte gemeinsame Teiler von q_1, q_2 .

Das von Routh angegebene Ergebnis ist

Satz 5.28

Es sind äquivalent:

1. Das Polynom p hat nur Wurzeln λ mit $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.
2. $m = n+1$ und die Vorzeichen der höchsten Koeffizienten von q_1, \dots, q_{n+1} alternieren.

Wir geben keinen Beweis für dieses Resultat.³ Ein Beweis kann auf ein Resultat der komplexen Analysis gestützt werden. Es lautet:

³Man findet einen Beweis in Gantmacher, F.R., Applications of the Theory of Matrices, Intersciences Publishers, New York, 1959.

Ist p ein Polynom, das keine Nullstelle auf der Kurve Γ_ρ hat und ist D_ρ die Anzahl der Nullstellen innerhalb der Kurve Γ_ρ , gezählt mit Vielfachheiten, dann gilt

$$-i \oint_{\Gamma_\rho} \frac{p'(r)}{p(r)} d\gamma = 2\pi D_\rho$$

Dabei ist Γ_ρ die Kurve, die sich aus dem Segment $[-i\rho, i\rho]$ und dem Halbkreisbogen $\rho e^{i\phi}$, $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$ zusammensetzt; die Orientierung ist im Gegenuhrzeigersinn gewählt.

5.5 Ein Störungsergebnis

Wir betrachten nun

$$y' = Ay + g(y) \quad (5.13)$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wir nehmen an, daß die Voraussetzungen (5.8), (5.9) für

$$f(y) := Ay + g(y), y \in D := \mathbb{R}^n$$

erfüllt seien.

Satz 5.29

Es gelte: A ist Stabilitätsmatrix, $\lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{|g(z)|}{|z|} = 0$. Dann ist der Gleichgewichtspunkt $\bar{y} = \theta$ asymptotisch stabil.

Beweis:

Wir wissen aus Satz 4.7 bzw. aus der Voraussetzung

$$\exists c \geq 0, \beta > 0 \forall t \geq 0 (\|e^{At}\| \leq ce^{-2\beta t}), \exists \delta > 0 \forall y \in B_\delta (|g(y)| \leq c^{-1}\beta|y|).$$

Sei zu $\xi \in B_{\frac{\delta}{c}}$ $z := y(\cdot; \xi): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von

$$y' = Ay + g(y), y(0) = \xi,$$

mit $z(t) \in B_\delta$ für alle $t \in [0, T]$. (Die Existenz dieser Lösung ist auf Grund von Voraussetzung (5.9) sichergestellt.) Dann gilt für $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{At}z(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}g(z(s))ds, \\ |z(t)| &\leq \|e^{At}\||z(0)| + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\||g(z(s))|ds \\ &\leq ce^{-2\beta t}|z(0)| + \beta \int_0^t e^{-2\beta(t-s)}|z(s)|ds. \end{aligned}$$

Wir setzen $w(t) := e^{2\beta t}|z(t)|$, $t \in [0, T)$. Dann gilt also

$$w(t) \leq c|z(0)| + \beta \int_0^t w(s) ds, \quad t \in [0, T).$$

Mit dem **Lemma von Gronwall** folgt

$$w(t) \leq c|z(0)|e^{\beta t}, \quad t \in [0, T), \text{ d.h. } z(t) \leq c|z(0)|e^{-\beta t} < \delta e^{-\beta t}, \quad t \in [0, T). \quad (5.14)$$

Daraus folgt: Diese lokale Lösung kann fortgesetzt werden auf $[0, \infty)$ und die Abschätzung (5.14) gilt auch für $T = \infty$. Die Behauptung der Stabilität und Attraktivität liest man dann aus (5.14) ab. ■

Die Bedeutung von Satz 5.29 liegt darin, daß er sich auch auf Systeme der Form (5.6) anwenden läßt:

- Entwickle das Vektorfeld f um den Gleichgewichtspunkt \bar{y} . Resultat ist ein System der Form (5.13) mit $A = df(\bar{y})$, $g(z) = f(z) - df(\bar{y})z$. (Die Voraussetzung, daß g auf ganz \mathbb{R}^n definiert sein muß, ist keine Einschränkung, da wir g sowieso nur in einer Umgebung von \bar{y} benötigen.)
- Prüfe nach, ob $A = df(\bar{y})$ eine Stabilitätsmatrix ist.
- Die Voraussetzung $\lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{|g(z)|}{|z|} = 0$ ist erfüllt, wenn f differenzierbar in \bar{y} ist.

Allerdings beachte man, daß diese Linearisierungsmethode nur hinreichende Bedingungen bereitstellt, sie sind weit davon entfernt, auch notwendig zu sein. Dies belegen wir mit ganz einfachen Beispielen.

Beispiel 5.30 Betrachte die skalare DGL

$$y' = 0 \cdot y + g(y); \quad (5.15)$$

je nach Wahl von g ergeben sich unterschiedliche Verhaltensmuster. Beachte, daß der einzige "Eigenwert" der Matrix (0) Realteil 0 hat.

$\mathbf{g(y) = 0}$ Hier sind offensichtlich alle Punkte von \mathbb{R} stabile Gleichgewichtspunkte und insbesondere $\bar{y} := 0$ ist stabil.

$\mathbf{g(y) = y^2}$ $\bar{y} := 0$ ist kein stabiler Gleichgewichtspunkt, da zwar $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t; \xi) = 0$ für $\xi < 0$ gilt, aber $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t; \xi) = \infty$ für $\xi > 0$ gilt.

$\mathbf{g(y) = -y^2}$ $\bar{y} := 0$ ist kein stabiler Gleichgewichtspunkt, da zwar $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t; \xi) = 0$ für $\xi > 0$ gilt, aber $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t; \xi) = -\infty$ für $\xi < 0$ gilt.

$\mathbf{g(y) = y^3}$ $\bar{y} := 0$ ist kein stabiler Gleichgewichtspunkt, da $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t; \xi) = \infty$ für $\xi > 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t; \xi) = -\infty$ für $\xi < 0$ gilt.

$\mathbf{g(y) = -y^3}$ $\bar{y} := 0$ ist ein stabiler Gleichgewichtspunkt, da für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t; \xi) = 0$ in monotoner Weise gilt.

□

Beispiel 5.31 Wir erläutern die Linearisierungsmethode am nichtlinearen Oszillator mit Dämpfung ($d > 0$):

$$\ddot{x} + 2d\dot{x} + \sin x = 0$$

Als System haben wir

$$y' = f(y) \text{ mit } f(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -2dy_2 - \sin y_1 \end{pmatrix}.$$

Die Linearisierung im Gleichgewichtspunkt $\bar{z} = \theta$ ist gegeben mit

$$A = df(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2d \end{pmatrix}.$$

Da die Eigenwerte von A gegeben sind durch

$$\lambda_{\pm} = -d \pm \sqrt{d^2 - 1},$$

liegt eine Stabilitätsmatrix vor und wir wissen, daß der Gleichgewichtspunkt $\bar{y} = \theta$ asymptotisch stabil ist.

Es liegt ein weiterer Gleichgewichtspunkt vor, nämlich $\hat{y} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Linearisierung in diesem Gleichgewichtspunkt führt auf die Matrix

$$A = df(\hat{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2d \end{pmatrix}$$

und wir stellen fest, daß diese Matrix einen Eigenwert λ besitzt mit $Re(\lambda) > 0$. Der obige Satz ist nicht anwendbar, Stabilität liegt offenbar nicht vor. □

Beispiel 5.32 Wir greifen das Lorenz-System wieder auf (siehe Beispiel 5.15). Es lautet:

$$y' = f(y) \text{ mit } f(y) = \begin{pmatrix} s(y_2 - y_1) \\ ry_1 - y_2 - y_1y_3 \\ y_1y_2 - by_3 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Dabei sind s, r, b positive Konstanten und $s = 10, r = 28, b = \frac{8}{3}$. Wir wissen, daß für $r > 1$ – wir setzen dies nun voraus – drei Gleichgewichtspunkte vorliegen:

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{y} = \begin{pmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}, \tilde{y} = \begin{pmatrix} -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}.$$

Die Linearisierung ergibt:

$$\bar{A} = df(\bar{y}) = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

$$\hat{A} = df(\hat{y}) = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A} = df(\tilde{y}) = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} & -\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}.$$

Für den Gleichgewichtspunkt \bar{y} erhalten wir als charakteristisches Polynom

$$p(\lambda) = (\lambda + b)(\lambda^2 + (s + 1)\lambda - s(r - 1)),$$

welches offenbar zwei negative und eine positive Nullstelle besitzt; Stabilität in der Umgebung von \bar{y} ist nicht zu erwarten. Zu den Gleichgewichtspunkten \hat{z} und \tilde{z} gehört das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (s + 1 + b)\lambda^2 + b(s + r)\lambda + 2bs(r - 1).$$

Das Routh–Hurwitz–Kriterium ist anwendbar, wenn

$$(s + 1 + b)b(s + r) - 2bs(r - 1)$$

positiv ist. Dies ist der Fall, wenn etwa

$$s > b + 1, r < r_c := s \frac{s + 3 + b}{s - b - 1}$$

gilt. Es besagt dann, daß die Gleichgewichtspunkte \hat{y} und \tilde{y} asymptotisch stabil sind. Für die Zahlenwerte $s = 10, r = 28, b = \frac{8}{3}$ ist $r > r_c \approx 24.74$; die Gleichgewichtspunkte \hat{y}, \bar{y} und \tilde{y} sind hier nicht mehr stabil. Allerdings hat noch eine Nullstelle für \hat{y} und \tilde{y} jeweils negativ Realteil, was u.a. zur “chaotischen“ Bewegung, die zu beobachten ist, beiträgt. \square

5.6 Die Methode von Ljapunov

Eine bedeutende Methode zum Nachweis der Stabilität stammt von **Ljapunov (1893)**. Sie ist für nichtlineare Systeme der Form (5.1) entwickelt und stützt sich nicht auf die Berechnung von Eigenwerten. Sie hat ihren Ursprung in energetischen Betrachtungen. Wir beginnen mit einem Beispiel, das ein Bindeglied zwischen dem letzten Abschnitt und den folgenden Überlegungen sein soll.

Beispiel 5.33 Betrachte das System

$$y' = f(y) \text{ mit } f(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} -3y_2 - y_1^5 \\ -2y_2 + y_1^5 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte der Matrix $A = df(\theta)$ sind 0 und -2 . Sie ist daher keine Stabilitätsmatrix und die Stabilität des Gleichgewichtspunktes θ ist daher offen.

Setze $V(y_1, y_2) := y_1^6 + 9y_2^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Sei y eine Lösung des Systems. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}V(y_1(t), y_2(t)) = -6y_1(t)^{10} - 36y_2(t)^2 \leq 0$$

und es folgt

$$0 \leq V(y_1(t), y_2(t)) = V(y_1(0), y_2(0)) - \int_0^t (6y_1(s)^{10} + 36y_2(s)^2) ds, \quad t \geq 0.$$

Daraus folgt sofort die Stabilität des Gleichgewichtspunktes θ . Ferner folgt $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \theta$, denn:

Da $t \mapsto V(y_1(t), y_2(t))$ monoton nicht wachsend ist, existiert $a := \lim_{t \rightarrow \infty} V(y_1(t), y_2(t))$.

Annahme: $a > 0$. Dann gilt:

$$0 < a \leq V(y_1(t), y_2(t)) \leq V(y_1(0), y_2(0)), \quad t \geq 0.$$

Sei $m := \inf\{6y_1^{10} + 36y_2^2 \mid a \leq V(y_1, y_2) \leq V(y_1(0), y_2(0))\}$. Da V stetig ist, gilt $m > 0$ und es folgt für $t \geq 0$:

$$0 \leq V(y_1(t), y_2(t)) \leq V(y_1(0), y_2(0)) - m \int_0^t dt = V(y_1(0), y_2(0)) - mt.$$

Also ist $V(y_1(t), y_2(t)) < 0$, wenn t genügend groß gewählt wird. Damit ist ein Widerspruch erreicht. \square

Definition 5.34

Eine Funktion $V : U \rightarrow \mathbb{R}$, U Umgebung des Gleichgewichtspunktes $\bar{y} \in D$, heißt **Ljapunov-Funktion**, wenn gilt:

- i) V ist stetig in U und stetig differenzierbar in $U \setminus \{\bar{y}\}$.
- ii) $V(\theta) = 0, V(x) > 0$ für alle $x \in U, x \neq \bar{y}$.
- iii) $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$ für alle $x \in U$.

V heißt **strikte Ljapunov-Funktion**, wenn statt *iii*) gilt:

$$iii)^* \quad \langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0 \text{ für alle } x \in U \setminus \{\bar{y}\}.$$

\square

Satz 5.35

Sei $V : U \rightarrow \mathbb{R}$, U Umgebung von \bar{y} , eine Ljapunov-Funktion. Dann gilt:

- a) \bar{y} ist stabiler Gleichgewichtspunkt.
- b) \bar{y} ist attraktiver Gleichgewichtspunkt genau dann, wenn es eine Umgebung W von \bar{y} derart gibt, daß die Ruhelage die einzige Lösung $y : [0, \infty) \rightarrow U$ von $y' = f(y)$ ist mit $y(0) \in W, \frac{d}{dt}V(y(t)) = 0, t \in [0, \infty)$.

Beweis:

O.E. $\bar{y} = \theta$.

Sei $r > 0$ mit $B_{2r} \subset U$. Sei $\beta := \min\{V(x) \mid |x| = r\}$ und sei $U_\beta := \{x \in U \mid V(x) < \beta\} \cap \bar{B}_r$.

Es gilt: $\beta > 0, U_\beta \neq \emptyset, U_\beta$ Nullumgebung (V ist stetig!).

Sei y eine Lösung von

$$y' = f(y), \quad y(0) = \xi \in U_\beta.$$

Dann gilt

$$V(\xi) < \beta, \quad \frac{d}{dt}V(y(t)) \leq 0, \quad t \in [0, \omega(\xi)).$$

Wäre

$$|y(t_1)| = r \text{ für ein } t_1 \in (0, \omega(\xi)),$$

ergäbe

$$V(y(0)) < \beta \leq V(y(t_1)), \quad V(y(t_1)) \leq V(\xi),$$

einen Widerspruch. Also gilt $y(t) \in B_r$ für alle $t \in [0, \omega(\xi))$. Daraus folgt

$$\omega(\xi) = \infty, \quad y(t) \in B_r \text{ für alle } t \in [0, \infty).$$

Damit wissen wir, daß $\bar{y} = \theta$ ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist und a) ist bewiesen.

Wir zeigen b). Wiederum o.E. $\bar{y} = \theta$.

Sei \bar{y} attraktiv. Also gibt es eine Nullumgebung W' , so daß für alle $\xi \in W'$ $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t; \xi) = \bar{y}$ gilt. Sei $W := U_\beta \cap W'$. Sei $y : [0, \infty) \rightarrow W$ eine Lösung mit $\frac{d}{dt}V(y(t)) = 0, t \in [0, \infty)$.

Dann gilt

$$V(\xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(y(t)) = V(\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)) = V(\theta) = 0,$$

da \bar{y} attraktiv ist; also $\xi = \theta, y(t) = \theta, t \in [0, \infty)$. Damit ist eine Richtung von b) gezeigt.

Sei $W_0 := W \cap U_\beta$. Sei y eine Lösung von $y' = f(y)$ mit $y(0) \in W_0$. Dann wissen wir aus dem Beweis zu a) $y : [0, \infty) \rightarrow B_r$. Also enthält jede Folge $(y(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \in \mathbb{N}} t_n = \infty$ eine konvergente Teilfolge; sei diese Teilfolge wieder mit $(y(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet. Wir haben zu zeigen, daß dann $\lim_{n \in \mathbb{N}} y(t_n) = \theta$ gilt.

Sei eine solche Folge gegeben. Also

$$(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{n \in \mathbb{N}} t_n = \infty, \quad \lim_{n \in \mathbb{N}} y(t_n) = \hat{y}.$$

Annahme: $\hat{y} \neq \theta$.

Die Folge $(V(y(t_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton nicht wachsend und es gilt $\lim_{n \in \mathbb{N}} V(y(t_n)) = V(\hat{y})$; also

$V(\hat{y}) < \beta$. Betrachten wir die Lösung \tilde{y} von

$$y' = f(y), \quad y(0) = \hat{y},$$

so wissen wir aus dem Beweis zu a)

$$\tilde{y} : [0, \infty) \rightarrow B_r, \quad V(\tilde{y}(t)) \leq V(\hat{y}), \quad t \in [0, \infty).$$

Da $\hat{y} \neq \theta$ muß es nach Voraussetzung ein $\tau > 0$ geben mit $V(\tilde{y}(\tau)) < V(\hat{y})$. Da die Differentialgleichung autonom ist, ist jedes $y_n : [0, \infty) \rightarrow D$ mit $y_n(t) := y(t_n + t)$ eine

Lösung von $y' = f(y)$ mit Anfangswert $y_n(0) = y(t_n)$. Da $\lim_{n \in \mathbb{N}} y(t_n) = \hat{y}$ gilt, folgt mit Lemma 3.6

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} y_n(t) = \lim_{n \in \mathbb{N}} y(t_n + t) = \tilde{y}(t), \quad t \in [0, \tau].$$

Also ist

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} V(y(t_n + \tau)) = V(\tilde{y}(\tau)) < V(\hat{y}).$$

Dies ist ein Widerspruch, da zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$V(y(t_n + \tau)) \geq V(y(t_m)) \geq V(\hat{y}).$$

■

Folgerung 5.36

Sei V strikte Ljapunov-Funktion auf der Umgebung U des Gleichgewichtspunktes \bar{y} . Dann ist \bar{y} ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

Beweis:

Da nach *iii*)* $t \mapsto V(y(t))$ eine Ableitung besitzt, die kleiner Null ist für alle t mit $y(t) \neq \bar{y}$ für jede Lösung y , die in der Nullumgebung U bleibt, ist die einzige Lösung y , für die $\frac{d}{dt}V(y(t)) = 0$, $t \geq 0$, gilt, die Ruhelage. Anwendung von b) aus Satz 5.35 ergibt die die Behauptung. ■

Beispiel 5.37 Betrachte

$$y' = f(y) \text{ mit } f(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} -3y_2 - y_1^5 \\ -2y_2 + y_1^5 \end{pmatrix}.$$

In Beispiel 5.33 hatten wir dazu die strikte Ljapunov-Funktion

$$V(y_1, y_2) := y_1^6 + 9y_2^2, \quad (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

eingeführt. Wir wissen nun nach Folgerung 5.36, daß $\bar{y} = \theta$ asymptotisch stabil ist. □

Beispiel 5.38 Betrachte

$$y' = f(y) \text{ mit } f(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -LC^{-1} & -RL^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

wobei C, L, R positive Konstanten sind. (Die Bezeichnungen C, L, R sind in Anlehnung an Bezeichnungen bei elektrischen Schwingkreisen gewählt.) Eine Ljapunov-Funktion ist gegeben durch

$$V(y_1, y_2) := Ly_2^2 + C^{-1}y_1^2, \quad (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

und es gilt

$$\langle \nabla V(y_1, y_2), f(y_1, y_2) \rangle = -2Ry_2^2, \quad (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

V ist also eine nicht strikte Ljapunov-Funktion, aber Satz 5.35 ist anwendbar. Aus $-2Ry_2(t)^2 = 0$ für alle t folgt zusammen mit der Differentialgleichung $y_1(t) = y_2(t) = 0$ für alle t . Also ist $\bar{y} = \theta$ asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt. Dies wissen wir natürlich schon aus den Stabilitätsaussagen für lineare Systeme. □

Beispiel 5.39 Betrachte

$$y' = f(y) \text{ mit } f(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Eine Ljapunov-Funktion ist gegeben durch $V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$. $\bar{y} = \theta$ ist ein stabiler, aber kein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt (Argumentiere mit Satz 5.35). \square

Bemerkung 5.40

Ist V eine Ljapunov-Funktion bzgl. \bar{y} , so ist für jedes $c > 0$ die \bar{y} -Umgebung (Niveaumenge von V)

$$U_c := \{y \in U \mid V(y) \leq c\}$$

invariant, d.h., ist $y(\cdot; \xi)$ Lösung mit $\xi \in U_c$, dann gilt $y(t; \xi) \in U_c$ für alle $t \geq 0$. Ist V sogar strikt, so gilt sogar $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t; \xi) = \bar{y}$ für alle $\xi \in U_c$; U_c ist also ein **Attraktionsgebiet** für \bar{y} . \square

Wir haben nun einige Beispiel für die Existenz von Ljapunov-Funktion kennengelernt. Doch wie findet man in einer allgemeinen Situation eine Ljapunov-Funktion. Hierzu gibt es theoretische Ansätze, in der Praxis kommt man aber in der Regel nicht ohne ein Hintergrundwissen über den Sachverhalt, der mit dem DGL-System modelliert wird, aus. Lediglich bei skalaren DGLen ist die Frage leicht zu überschauen. Ist nämlich die skalare DGL

$$y' = f(y)$$

mit Gleichgewichtspunkt \bar{y} gegeben, so ist

$$V(y) := - \int_{\bar{y}}^y f(s) ds$$

wegen

$$\langle \nabla V(y), f(y) \rangle = -f(y)^2$$

offenbar ein erfolgsversprechender Ansatz für eine Ljapunov-Funktion.

Bei Aufgaben der Mechanik kommt man häufig mit einer Art "Gesamtenergie" als Ljapunov-Funktion weiter. Wir kommen darauf zurück, hier ein kleines Beispiel.

Bemerkung 5.41

Betrachte die DGL 2. Ordnung

$$\ddot{x} + g(\dot{x}) + \sin(x) = 0;$$

hier ist $g(\dot{x})$ ein geschwindigkeitsabhängiger Reibungsterm. Die Annahmen

$$g(0) = 0, \quad g'(y) \leq 0 \text{ und } yg(y) \geq 0 \text{ für alle } y \in \mathbb{R},$$

scheinen also gerechtfertigt. Als System haben wir dann

$$x' = y, \quad y' = -g(y) - \sin(x).$$

Wir setzen

$$V(x, y) := \frac{y^2}{2} + 1 - \cos(x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

und stellen fest, daß eine Ljapunov-Funktion vorliegt. Sie ist strikt, wenn sogar $yg(y) < 0$ gilt für alle $y \neq 0$.

Diese Ljapunov-Funktion läßt sich unmittelbar als Summe der kinetischen Energie $\frac{y^2}{2}$ und der potentiellen Energie $1 - \cos(x) \sim x$ deuten; Masse m und Gravitationskonstante g sind auf Eins gesetzt. \square

Bei Anwendungen außerhalb der Mechanik ist die Situation für das Auffinden einer Ljapunov-Funktion nicht so einfach, aber auch nicht aussichtslos.

Beispiel 5.42 Wir nehmen das Populationssystem aus Sektion 2.6 wieder auf:

$$\begin{cases} y' &= (az - b)y \\ z' &= (c - dy)z \end{cases} \quad (a, b, c, d > 0). \quad (5.17)$$

Die dortigen Ergebnisse lassen sich so deuten, daß der biologisch interessante Gleichgewichtspunkt

$$(\bar{y}, \bar{z}) := \left(\frac{c}{d}, \frac{b}{a} \right)$$

in unserer nun entwickelten Begriffsbildung stabil, aber nicht asymptotisch stabil ist. Mit der Linearisierungstechnik sieht man diese Tatsache sofort ein. Es ist ja die Linearisierung im Gleichgewichtspunkt gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{ac}{d} \\ -\frac{db}{a} & 0 \end{pmatrix},$$

die offenbar zwei verschiedene rein imaginäre Eigenwerte besitzt; die zugehörige Jordansche Normalform ist diagonal und Stabilität folgt (siehe Bemerkung 5.22). Dies folgt aber nun auch leicht aus der Tatsache, daß wir sogar eine Ljapunov-Funktion zu diesem Gleichgewichtspunkt V haben:

$$V(y, z) := dy - c - c \ln\left(\frac{d}{y}\right) + az - b - b \ln\left(\frac{a}{z}\right), \quad y > 0, z > 0.$$

Man rechnet leicht nach, daß eine (nicht strikte) Ljapunov-Funktion vorliegt. (Man findet sie mit einem Ansatz $V(y, z) := F(y) + G(z)$.) Gegenüber der Linearisierungstechnik haben wir nun den Vorteil, zu wissen, daß eine Niveaumenge $\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid V(y, z) < c\}$ eine invariante Menge ist.

Das obige Modell hat den Mangel, daß bei Abwesenheit von Räubern (y) die Beutepopulation (z) exponentiell wächst. Wir helfen dieser Tatsache ab durch Einführung eines sogenannten **sozialen Reibungsterms** bei beiden Populationen. Wir betrachten daher:

$$\begin{cases} y' &= (az - b - ey)y \\ z' &= (c - dy - fz)z \end{cases} \quad (a, b, c, d, e, f > 0). \quad (5.18)$$

Wir stellen fest, daß für $0 < f < \frac{ac}{b}$ der biologisch interessante Gleichgewichtspunkt

$$(\bar{y}, \bar{z}) := \left(\frac{ac - bf}{ad + ef}, \frac{bd + ce}{ad + ef} \right)$$

vorliegt. Dieser Gleichgewichtspunkt ist asymptotisch stabil, denn es ist ja die Linearisierung im Gleichgewichtspunkt gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} e\bar{y} & a\bar{y} \\ -d\bar{z} & -f\bar{z} \end{pmatrix},$$

die offenbar zwei Eigenwerte mit negativen Realteil besitzt; man kann dies etwa mit dem Routh–Hurwitz–Kriterium einsehen. (Analysiere die “biologisch“ weniger interessanten Gleichgewichtspunkte.) \square

5.7 Ljapunov’s Matrixgleichung

Zur Erinnerung:

Eine symmetrische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt **positiv semidefinit**, falls

$$\langle x, Mx \rangle \geq 0 \text{ ist für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Eine symmetrische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt **positiv definit**, falls

$$\langle x, Mx \rangle > 0 \text{ ist für alle } x \in \mathbb{R}^n, x \neq \theta.$$

Lemma 5.43

Seien $U \in \mathbb{R}^{n,n}$, $V \in \mathbb{R}^{m,m}$, $W \in \mathbb{R}^{n,m}$.

Sind U, V Stabilitätsmatrizen, so ist die eindeutige Lösung der Matrixgleichung

$$UX + XV + W = \Theta \quad (X \in \mathbb{R}^{n,m})$$

gegeben durch

$$X = \int_0^{\infty} e^{tU} W e^{tV} dt.$$

Beweis:

Nach Satz 4.7 gibt es $c \geq 0, \beta > 0$ derart, daß gilt:

$$\|e^{tU}\| \leq ce^{-\beta t}, \quad \|e^{tV}\| \leq ce^{-\beta t}, \quad t \geq 0.$$

Es ist mit $T > 0$

$$\begin{aligned} e^{TU} W e^{TV} - W &= \int_0^T \frac{d}{dt} (e^{tU} W e^{tV}) dt \\ &= \int_0^T (U e^{tU} W e^{tV} + e^{tU} W V e^{tV}) dt \\ &= \int_0^T (U e^{tU} W e^{tV} + e^{tU} W e^{tV} V) dt \end{aligned}$$

und Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ ergibt

$$UX + XV = -W \text{ für } X = \int_0^{\infty} e^{tU} W e^{tV} dt .$$

Damit ist die Existenz einer Lösung klar. Die Eindeutigkeit folgt so:
Sei $X \in \mathbb{R}^{n,m}$ eine Lösung von

$$UX + XV = \Theta .$$

Dann ist

$$\frac{d}{dt}(e^{tU} X e^{tV}) = e^{tU} (UX + XV) e^{tV} = \Theta ,$$

also

$$e^{tU} X e^{tV} = e^{0U} X e^{0V} = X .$$

Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ liefert $X = \Theta$. ■

Satz 5.44

Es sind äquivalent für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$:

- a) A ist Stabilitätsmatrix.
- b) Es gibt eine positiv definite Matrix $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit

$$A^*P + PA = -I \tag{5.19}$$

Beweis:

Lemma 5.43 besagt, daß aus der Stabilität von A die Existenz von P mit der gewünschten Eigenschaft folgt.

Erfülle nun $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ die Gleichung (5.19). Definiere

$$V(x) := \langle x, Px \rangle , \quad x \in \mathbb{R}^n .$$

Dann ist $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ für alle $x \neq \theta$, und V ist differenzierbar; es gilt:

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x), Ax \rangle &= \langle Px + P^*x, Ax \rangle \\ &= \langle A^*Px, x \rangle + \langle x, PAx \rangle \\ &= \langle (A^*P + PA)x, x \rangle \\ &= -\langle x, x \rangle \end{aligned}$$

Also ist V eine strikte Ljapunov-Funktion. Wende nun Folgerung 5.36 und Satz 5.18 an. ■

Kapitel 6

Periodische Lösungen

In diesem Paragraphen diskutieren wir das Auftreten von periodischen Lösungen und das Verhalten von Lösungen in der Umgebung von periodischen Lösungen.

6.1 Periodische Punkte

Wir betrachten

$$y' = f(y) \quad (f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}) \quad (6.1)$$

und **vereinbaren**: $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, f lokal L -stetig.

Wir erinnern an die **Bezeichnungen**:

$I^*(\xi)$ maximales Existenzintervall einer Lösung $y(\cdot; \xi)$ von (6.1) mit $y(0; \xi) = \xi$ und $\Phi_t \xi = y(t; \xi)$ für $t \in I^*(\xi)$.

Definition 6.1

Ein Punkt $x \in D$ heißt **periodisch**, wenn es $T > 0$ gibt mit

$$y(t + T; x) = y(t; x) \text{ für alle } t \in I^*(x).$$

Jedes T mit dieser Eigenschaft heißt eine **Periode** von x und die zugehörige Lösung $y(\cdot, x)$ heißt T -**periodisch**. \square

Offensichtlich ist jeder Gleichgewichtspunkt periodisch. Eine Klassifikation von periodischen Punkten ist von Interesse.

Folgerung 6.2

a) Ist $x \in D$ periodisch, so gilt $[0, \infty) \subset I^*(x)$.

b) $x \in D$ ist periodisch genau dann, wenn es $T > 0$ gibt mit $y(T; x) = x$.

Beweis:

Zu a). Es gibt $T > 0$ mit $y(T; x) = y(0; x)$, d.h. $T \in I^*(x)$. Sukzessive erhält man $kT \in I^*(x)$, $k \in \mathbb{N}$. Da $I^*(x)$ ein offenes Intervall ist, gilt $[0, kT) \subset I^*(x)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Zu b). Ist x periodisch, so gilt nach Definition $y(T; x) = y(0; x) = x$. Sei nun $t \in I^*(x)$. Wegen $y(t + T; x) = y(t; y(T; x))$ folgt aus $y(T; x) = x$ auch, daß x periodisch ist. \blacksquare

Lemma 6.3

Sei $x \in D$ periodisch. Dann sind äquivalent:

- a) x ist Gleichgewichtspunkt.
- b) $\inf\{T > 0 \mid y(t+T; x) = x \text{ für alle } t \in I^*(x)\} = 0$.

Beweis:

Zu a) \implies b) Offensichtlich, da $y(t; x) = x$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Zu b) \implies a) Es gibt also eine Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_n T_n = 0, T_n > 0, y(t + T_n, x) = y(t, x) \text{ für alle } t \in I^*(x), n \in \mathbb{N}.$$

Für $t \in [0, \infty) \subset I^*(x)$ gilt dann mit $y(t) := y(t; x), t \in I^*(x)$:

$$y'(t) = \lim_n T_n^{-1}(y(t + T_n) - y(t)) = 0.$$

Also gilt $y(t) = y(0) = x, f(x) = f(y(t)) = y'(t) = 0$ für alle $t \in [0, \infty)$ d.h. $f(x) = 0$. ■

Wir wissen also nun, dass ein periodischer Punkt $x \in D$ genau dann kein Gleichgewichtspunkt ist, wenn x eine minimale positive Periode T^* besitzt, d.h.

$$T^* := \inf\{T > 0 \mid y(t+T; x) = y(t), t \in [0, \infty)\} > 0.$$

Beachte: T^* ist stets wieder Periode. Damit gewinnen wir die Klassifizierung aus Satz 5.1 erneut:

Folgerung 6.4

Sei $x \in D$. Dann tritt genau eine der folgenden Aussagen ein:

- a) x ist Gleichgewichtspunkt.
- b) x ist periodisch mit minimaler positiver Periode.
- c) $y(t; x) \neq x$ für alle $t \in I^*(x)$.

Beweis:

Offenbar tritt c) genau dann nicht ein, wenn a) oder b) erfüllt ist. Lemma 6.3 besagt, dass dann genau eine der Aussagen a), b) eintritt. ■

6.2 Periodische Lösungen bei linearen Systemen

Wir betrachten das lineare System

$$y' = A(t)y + a(t) \tag{6.2}$$

mit $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}, a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Wir **setzen voraus**, dass (6.2) T -periodisch ist, d.h.

$$A(t+T) = A(t), a(t+T) = a(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}. \tag{6.3}$$

mit $T > 0$. Diese Voraussetzung scheint angebracht, wenn man nach periodischen Lösungen für (6.2) sucht. Die Differentialgleichung

$$y' = 1$$

zeigt, dass das Problem der Existenz von periodischen Lösungen nicht trivial ist, denn die Gleichung ist T -periodisch für jedes $T > 0$, besitzt aber keine nichttriviale periodische Lösung.

Bemerkung 6.5

Das System (6.2) ist nichtautonom. Wir benötigen Aussagen für nichtautonome lineare Systeme, wenn wir autonome nichtlineare Systeme auf periodische Lösungen mit Hilfe der Linearisierungstechnik untersuchen wollen. \square

Wir wissen, dass zu jedem $\tau \in \mathbb{R}$ Lösungen

$$y^1, \dots, y^n \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$$

von

$$y' = A(t)y \tag{6.4}$$

existieren mit $y^i(\tau) = e^i$, e^i i -ter Einheitsvektor; $1 \leq i \leq n$. Wir setzen

$$\Psi(t, \tau) := (y^1(t) | \dots | y^n(t)), t \in \mathbb{R}, \tag{6.5}$$

und wissen aus Satz 5.11, dass jede Lösung y von (6.2) sich folgendermaßen schreiben lässt:

$$y(t) = \Psi(t, 0)y(0) + \int_0^t \Psi(t, s)a(s)ds, t \in \mathbb{R}. \tag{6.6}$$

Satz 6.6

Es sind äquivalent

- a) Das System (6.2) besitzt eine T -periodische Lösung.
- b) Das System (6.2) besitzt eine beschränkte Lösung.

Beweis:

a) \implies b) Ist $y := (\cdot; x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, eine T -periodische Lösung, so gilt:

$$|y(t)| \leq \max\{|y(\tau)| \mid \tau \in [0, T]\} < \infty \text{ für alle } t \in [0, \infty).$$

Beachte dabei die Stetigkeit von y in $[0, \tau]$.

b) \implies a) Wegen (6.6) besitzt (6.2) eine T -periodische Lösung genau dann, wenn es $x \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$x = U(T)x + \eta, \tag{6.7}$$

wobei $\eta := \int_0^T \Psi(T, s)a(s)ds$ und $U(T) = \Psi(T, 0)$ ist.

Es ist also zu zeigen, dass jede Lösung von (6.2) beschränkt ist, falls (6.7) nicht lösbar ist. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass (6.7) genau dann nicht lösbar ist, wenn ein $u \in \mathbb{R}^n$ existiert mit¹

$$u = U(T)^*u, \langle u, \eta \rangle \neq 0. \tag{6.8}$$

Ist nun $y(\cdot; x)$ eine Lösung von (6.2), so gilt nach (6.6) mit einem $x \in \mathbb{R}^n$:

$$y(T; x) = U(T)x + \eta \tag{6.9}$$

und

$$y'(t + kT; x) = A(t + kT)y(t + kT; x) + a(t + kT) = A(t)y(t + kT; x) + a(t) \tag{6.10}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $t \geq 0$. Aufgrund der Eindeutigkeit ist somit

$$y_k : \mathbb{R} \longrightarrow \overset{n}{\mathbb{R}}, y_k(t) := y(t + kT; x), t \geq 0, k \in \mathbb{N},$$

Lösung der AWA

$$y' = A(t)y + a(t), y(0) = y(kT; x).$$

Mit (6.6) folgt $y_k(T) = y((k+1)T) = U(T)y(kT) + \eta$ und somit mit vollständiger Induktion

$$y_k(T) = U(T)^k x + \sum_{j=0}^{k-1} U(T)^j \eta, k \in \mathbb{N}.$$

Aus (6.8) erhalten wir

$$\langle u, y_k(T) \rangle = \langle U(T)^{*k}u, x \rangle + \sum_{j=0}^{k-1} \langle U(T)^{*j}u, \eta \rangle = \langle u, x \rangle + k \langle u, \eta \rangle \tag{6.11}$$

Wegen $\langle u, \eta \rangle \neq 0$ folgt hieraus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} | \langle u, y_k(T) \rangle | = \lim_{k \rightarrow \infty} | \langle u, y(kT) \rangle | = \infty.$$

Also ist die Lösung y unbeschränkt. ■

Im Beweis haben wir die Abbildung

$$U : [0, \infty) \ni T \longmapsto \Psi(T, 0) \in \overset{n,n}{\mathbb{R}}$$

definiert und verwendet. Diese Abbildung heißt **Monodromie-Operator** zum gegebenem System $y' = A(t)y$. Wir können damit die Existenz von periodischen Lösungen für das homogene Teilsystem von (6.2) so charakterisieren:

Satz 6.7

Sei $T > 0$. Das homogene System $y' = A(t)y$ besitzt genau dann eine nichttriviale T -periodische Lösung, wenn $\kappa = 1$ ein Eigenwert von $U(T)$ ist.

¹ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ euklidisches Skalarprodukt in \mathbb{R}^n und “*” Transposition

Beweis:

Wir wissen aus (6.7), dass $x \in \mathbb{R}^n$ Fixpunkt von $U(T)$ genau dann ist, wenn $\psi(\cdot, x)$ eine T -periodische Lösung von $y' = A(t)y$ ist. Also existiert genau dann eine nichttriviale T -periodische Lösung, wenn es ein $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta\}$ gibt mit

$$U(T)x = x,$$

d.h., wenn x Eigenvektor von $U(T)$ zum Eigenwert 1 ist. ■

Die Schwierigkeit in der Anwendung von Satz 6.7 liegt darin, dass zur Bestimmung von $U(T)$ die Lösungen von $y = A(t)y$ vollständig bekannt sein müssen.

Beispiel 6.8 Ist $\kappa = ia$ mit $a = 2k\pi/T$ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, so ist 1 ein Eigenwert von e^{TA} , denn für einen Eigenvektor x zu κ gilt

$$e^{TA}x = e^{T(A-\kappa E)}e^{\kappa TE}x = e^{\kappa T}e^{T(A-\kappa E)}x = e^{\kappa T}x = \cos(2k\pi x) = x. \quad (6.12)$$

Dies bedeutet, dass das zugehörige System

$$y' = Ay$$

eine nichttriviale Lösung T -periodische Lösung besitzt, da hier

$$U(T) = e^{TA}$$

gilt. Wir wissen dies allerdings schon aus Abschnitt 6. □

6.3 Floquetdarstellung

Wir betrachten

$$x' = A(t)x, \quad (6.13)$$

wobei $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n,n}$ stetig ist und $A(t+T) = A(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. $T > 0$ ist also eine Periode von A .

Wir gehen hier von einem System mit einer komplexen Matrix aus, da später wieder ein Rückgriff auf die komplexe Form der Jordanschen Normalform nötig sein wird. Der Übergang zu reellen Lösungen, wenn A reell ist, erfolgt wieder über Realteil- und Imaginärteilbildung. Die Lösungen von (6.13) müssen nicht notwendigerweise periodisch sein, etwa:

$$x' = x : \text{Lösung } x(t) = e^t, \quad x' = (\sin^2 t)x : \text{Lösung } x(t) = \exp\left(\int_0^t \sin^2 s ds\right)$$

In beiden Fällen haben wir sogar unbeschränkte Lösungen.

Die Lösungen von (6.13) sind auf ganz \mathbb{R} definiert (siehe Abschnitt 2.5 und jede Lösung führt bei Verschiebung der Zeit um eine Periode wieder zu einer Lösung.

Das Hauptergebnis hier ist:

Satz 6.9

Zu jeder Fundamentalmatrix Ψ von (6.13) gibt es $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n,n}$ und $R \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit

- i) $\Psi(t) = P(t) \exp(Rt)$, $t \in \mathbb{R}$;
- ii) $P(t+T) = P(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Sei Ψ eine Fundamentalmatrix. Nach unserer Vorbemerkung ist auch

$$\Psi(\cdot + T)$$

eine Fundamentalmatrix. Also gibt es nach Lemma 2.6 $C \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit

$$\Psi(t+T) = \Psi(t)C \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Im Vorgriff auf das nachfolgende Lemma ?? erhalten wir:

Es existiert $R \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit

$$C = e^{RT}.$$

Wir setzen $P(t) := \Psi(t) \exp(-Rt)$, $t \in \mathbb{R}$, und erhalten

$$\begin{aligned} P(t+T) &= \Psi(t+T) \exp(-R(t+T)) \\ &= \Psi(t) \exp(RT) \exp(-R(t+T)) \\ &= \Psi(t) \exp[-Rt] = P(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die Matrix e^{RT} heisst **Monodromie-Matrix** von Gleichung (6.13). Wegen

$$\Psi(0)^{-1} \Psi(T) = e^{RT}$$

folgt mit Lemma 2.16, dass die Eigenwerte von e^{RT} nicht von der Wahl der Fundamentalmatrix abhängen. Diese Eigenwerte heißen **charakteristische Multiplikatoren (Floquet-Multiplikatoren)**. Offenbar ist e^{-RT} gerade die Abbildung, die jedem Anfangswert x^0 den Wert der Lösung zu x^0 zur Zeit T zuordnet, d.h. e^{-RT} ist die Rückkehrabbildung.

Folgerung 6.10

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gibt es eine nichttriviale Lösung x von (6.13) mit

$$x(t+T) = \lambda x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

wenn λ_0 charakteristischer Multiplikator von (6.13) ist.

Beweis:

Sei λ charakteristischer Multiplikator und sei $x^0 \in \mathbb{C}$ ein Eigenvektor von e^{RT} . Dann gilt:

$$x(t) = P(t) e^{Rt} x^0 \in \mathbb{R},$$

ist nichttriviale Lösung und

$$x(t+T) = P(t+T) e^{R(t+T)} x^0 = P(t) e^{Rt} e^{RT} x^0 = \lambda x(t) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Umkehrung folgt genauso einfach.

Folgerung 6.11

- a) Genau dann besitzt die DGL (6.13) eine nichttriviale periodische Lösung mit Periode T , wenn $\lambda_0 = 1$ charakteristischer Multiplikator von (6.13) ist, es sind dies die Lösungen, deren Anfangswert x^0 Eigenvektor von e^{RT} .
- b) Genau dann besitzt die DGL (6.13) periodische Lösungen mit der kleinsten Periode $2T$, wenn $\lambda_0 = -1$ charakteristischer Multiplikator von (6.13) ist.

Beweis:Folge 6.14

□

■

Die Darstellung der Fundamentalmatrix in Satz 6.9 zeigt, dass das asymptotische Verhalten der Lösungen von (6.13) für $t \rightarrow \pm 1$ vollständig durch die Matrix e^{Rt} beschrieben wird. Die Matrix R wiederum lässt sich aus der Monodromiematrix auf rein algebraische Weise (siehe Lemma 2.23) berechnen. Jedoch ist es im allgemeinen nicht möglich, die Monodromiematrix bzw. ihre Eigenwerte direkt zu berechnen, ohne eine Fundamentalmatrix auf einem Intervall der Länge T zu berechnen. Direkt mit der Matrix $A(t), t \in [0, T]$, kann man nur das Produkt der Eigenwerte der Monodromiematrix erhalten:

Lemma 6.12

Sei $C = e^{RT}$ die Monodromiematrix von (6.13) und seien μ_1, \dots, μ_n die Eigenwerte von C . Dann gilt

$$\prod_{i=1}^n \mu_i = \exp\left(\int_0^T \text{spur} A(s) ds\right)$$

Beweis:Sei Ψ eine Fundamentalmatrix mit $\Psi(0) = I$. Eine zum Beweis von Satz 2.10 analoge Überlegung liefert

$$\det \Psi(t) = \exp\left(\int_0^t \text{spur} A(s) ds\right), t \in \mathbb{R}.$$

Andererseits

$$\det \Psi(T) = \det(\Psi(0)C) = \det C.$$

Ist μ ein charakteristischer Multiplikator und λ ein zugehöriger charakteristischer Exponent, d.h.

$$e^{\lambda T} = \mu,$$

so gilt nach Lemma 2.21: Ist

$$\frac{1}{T} \int_0^T \text{spur} A(s) ds \quad \text{mod} \quad \frac{2\pi i}{T}$$

positiv, so gibt es in jeder Nullumgebung einen Anfangswert für eine Lösung x mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty.$$

■

Beispiel 6.13 Betrachte (6.13) mit

$$A(t) := \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2 t & 1 - \frac{3}{4} \sin^2 t \\ -1 - \frac{3}{4} \sin^2 t & -1 + \frac{3}{2} \sin^2 t \end{pmatrix}$$

Wir haben für die charakteristischen Multiplikatoren μ_1, μ_2 bzw. ihre charakteristischen Exponenten λ_1, λ_2 :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-2 + \frac{3}{2} \cos^2 s + \frac{3}{2} \sin^2 s\right) ds = -\frac{1}{2}$$

Die Eigenwerte von $A(t)$ sind zeitunabhängig und gegeben durch

$$\lambda_{\frac{1}{2}} = (-1 \pm i\sqrt{7})/4$$

Dies verleitet mit Satz 4.8 zur Annahme, dass für alle Lösungen gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$$

Aber offenbar ist

$$x(t) = e^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

eine Lösung, für die $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$ gilt. Hat man diese Lösung, kann man eine weitere linear unabhängige Lösung berechnen und man erhält schließlich die charakteristischen Exponenten:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -1.$$

□

Lemma 6.14

Sei $M \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\det M \neq 0$. Dann gibt es $L \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit

$$M = \exp(L).$$

Beweis:

Man sieht sofort, dass es ausreicht, die Aufgabe zu lösen im Spezialfall, dass M in Form eines Jordanblockes vorliegt. Sei also

$$M = \lambda I + N \text{ mit } N^k = \Theta \text{ für ein } k \in \mathbb{N}.$$

Da $\det M \neq 0$ ist, folgt $\lambda \neq 0$. Ist dann $L \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit

$$\exp(L) = I + \frac{1}{\lambda} N \tag{6.14}$$

so erhält man

$$\exp((\ln \lambda)I + L) = \lambda \exp(L) = \lambda \left(I + \frac{1}{\lambda} N\right) = M.$$

Also reicht es (6.14) zu lösen.

Läßt man sich von der Analogie leiten, dass L der Logarithmus von $I + X$, $X := \frac{1}{\lambda}N$, sein soll, so wird man zu der aus der Analysis bekannten Reihendarstellung

$$\ln(1+x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l+1} x^{l+1} \quad (|x| < 1!)$$

geführt. Wir machen daher den Ansatz

$$L = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l+1} \left(\frac{1}{\lambda}N\right)^{l+1} = \sum_{l=0}^{k-2} \frac{(-1)^l}{l+1} \left(\frac{1}{\lambda}N\right)^{l+1} \quad (6.15)$$

Es gilt

$$L^s = \Theta, \quad s \geq k.$$

Also

$$\exp(L) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} L^s = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{1}{s!} L^s \quad (6.16)$$

Setzt man nun L aus (6.15) in (6.16) ein, so bestätigt man wie im reellen Fall die Identität

$$\exp(L) = I + \frac{1}{\lambda}N.$$

■

Beispiel 6.15 Der Logarithmus einer reellen Matrix ist nicht notwendigerweise reell. Dazu betrachte

$$C := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ist $R \in \mathbb{C}^{n,n}$ eine Matrix mit $C = \exp(R)$, so hat R komplexe Eigenwerte, die nicht komplex konjugiert zueinander sind. Also kann R nicht reell sein.

6.4 Existenz periodischer Lösungen: Ein Störungsergebnis

Wir betrachten hier

$$y' = A(t)y + g(t, y) \quad (6.17)$$

wobei $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$, $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegebene Funktionen sind.

Wie in Abschnitt 6.2 sei $\Psi(\cdot, \tau)$ eine Fundamentalmatrix mit

$$\Psi(\tau, \tau) = E, \quad \tau \in \mathbb{R};$$

siehe (6.6). Wir setzen wieder:

$$U(t) := \Psi(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Satz 6.16

Es seien A, g stetig und g lokal L -stetig gleichmäßig in t . Ferner seien A, g T -periodisch bezüglich t , d.h.

$$A(t+T) = A(t), g(t+T, y) = g(t, y) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n$$

Ist dann (6.17) asymptotisch linear in t , d.h.

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{|g(t, y)|}{|y|} = 0 \text{ gleichmäßig in } t, \quad (6.18)$$

so besitzt die Gleichung (6.17) eine T -periodische Lösung, falls $\kappa = 1$ kein Eigenwert von $U(T)$ ist.

Beweis:

Sei $\epsilon \in (0, 1)$. Wegen (6.18) existiert $M \geq 0$ mit

$$|g(t; y)| \leq \epsilon|y| \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } |y| \geq M$$

beachte: $g(t, y)$ ist periodisch bezüglich t .

Berücksichtigt man, dass g stetig ist, erhält man $\beta \geq 0$ mit

$$|g(t, y)| \leq \beta + \epsilon|y| \text{ für alle } t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n. \quad (6.19)$$

Ist $y(\cdot, x)$ eine Lösung von (6.17) mit $y(0; x) = x$, so gilt $[0, \infty) \subset I^*(x)$, denn:

$$\begin{aligned} |y(t, x)| &\leq |x| + \int_0^t |A(\tau)y(\tau; x) + g(\tau; x)| d\tau \\ &\leq |x| + \int_0^t \{|A(\tau)||y(\tau, x)| + \beta + \epsilon|y(\tau; x)|\} d\tau \\ &\leq |x| + \beta t + \int_0^t \alpha |y(\tau; x)| d\tau, \quad t \in I(x), \end{aligned}$$

wobei $\alpha := \max_{\tau \in [0, T]} \{|A(\tau)| + \epsilon\}$ ist. Das Lemma von Gronwall 3.3 ergibt:

$$|y(t; x)| \leq |x| + \beta t + \int_0^t (|x| + \beta s) \alpha e^{\alpha(t-s)} ds, \quad t \in I(x).$$

Daraus folgt $[0, \infty) \subset I^*(x)$, da sonst die Lösung in einem Kompaktum bliebe (Satz 2.32).

Sei nun $y(\cdot; x)$ wiederum eine Lösung von (6.17) mit $y(0; x) = x, x \in \mathbb{R}^n$. Aus der Formel „Variation der Konstanten“ folgt:

$$y(t; x) = \Psi(t, 0)x + \int_0^t \Psi(t, s)g(s, y(s; x))ds, \quad t \geq 0. \quad (6.20)$$

Sei $\alpha := \max\{|\Psi(t, s)|, t, s \in [0, \tau]\}$. Dann folgt aus (6.20) für $t \in [0, \tau]$

$$|y(t, x)| \leq \alpha|x| + \int_0^t \alpha\{\beta + \epsilon|y(s; x)|\}ds \leq \alpha|x| + \alpha\beta T + \alpha\epsilon \int_0^t |y(s)|ds.$$

Aus dem Lemma von Gronwall 3.3 folgt $|y(t; x)| \leq \gamma|x| + \delta$, $t \in [0, T]$, mit $\gamma := \alpha e^{\alpha T}$, $\delta := \alpha\beta T e^{\alpha T}$. Wir erhalten nun aus (6.19)

$$|y(t, x) - U(t)x| \leq \alpha T(\beta + \epsilon\delta + \epsilon\gamma|x|), t \in [0, T],$$

also

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |y(t; x) - U(t)x||x|^{-1} \leq \epsilon\alpha\gamma T$$

gleichmäßig in $[0, T]$. Da $\epsilon \in (0, 1)$ beliebig war, folgt

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |y(t; x) - U(t)x||x|^{-1} = 0 \text{ gleichmäßig in } t \in [0, \infty]. \quad (6.21)$$

Da $\kappa = 1$ kein Eigenwert von $U(T)$ ist, ist die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^n \ni x \longmapsto (E - U(T))^{-1}(y(T; x) - U(T)x)$$

stetig; beachte: Lösungen hängen stetig von den Anfangswerten ab. Dabei ist wieder $y(\cdot; x)$ Lösung von (6.17) mit $y(0; x) = x$. Aus (6.21) folgt

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |F(x)||x|^{-1} = 0.$$

Also gibt es $r > 0$ mit

$$|F(x)| \leq \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}|x|, x \in \mathbb{R}^n.$$

Dies zeigt, dass $F : \overline{B}_r \rightarrow \overline{B}_r$. Aus dem Brouwerschen Fixpunktsatz, den wir im folgenden Abschnitt beweisen werden, folgt:

$$F \text{ hat einen Fixpunkt, d.h. es gibt } x^* \in \overline{B}_r \text{ mit } F(x^*) = x^*. \quad (6.22)$$

Dies bedeutet $y(T, x^*) = x^*$, d.h. $y(\cdot; x^*)$ ist T -periodische Lösung. ■

Folgerung 6.17

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und sei $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal L -stetig gleichmäßig in t . Es gelte mit $T > 0$:

- i) A besitzt keinen Eigenwert der Form $\frac{2\pi i}{T}k$, $k \in \mathbb{Z}$.
- ii) $g(t + T, y) = g(t, y)$ für alle $t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n$.
- iii) $\lim_{|y| \rightarrow \infty} |g(t, y)||y|^{-1} = 0$ gleichmäßig in t .

Dann besitzt das System

$$y' = Ay + g(t, y) \quad (6.23)$$

mindestens eine T -periodische Lösung.

Beweis:

Wegen $U(T) = e^{TA}$ und Satz 6.16 genügt es nachzuprüfen, dass aus i) folgt, dass $\kappa = 1$ kein Eigenwert von e^{TA} ist.

Annahme: $\kappa = 1$ ist Eigenwert von e^{TA} mit Eigenvektor $x \neq \theta$.

Ist $A = QDQ^{-1}$ die Jordansche Normalform von A , so gilt $e^{QD}z = z, z = Q^{-1}x \neq \theta$. Wir wissen:

$$D = \text{diag}(D_1, \dots, D_m), D_j \in \mathbb{R}^{n_j, n_j}, D_j = \kappa_j E + N_j, N_j^{n_j} = \theta, 1 \leq j \leq m, \text{ mit } \sum_{j=1}^m n_j = n. \tag{6.24}$$

Wir zerlegen z gemäß $z = (z_1, \dots, z_m)$ und erhalten die Gleichungen:

$$e^{\kappa_j T} e^{TN_j} z_j = z_j, 1 \leq j \leq m.$$

Wegen $z \neq \theta$ gibt es j mit $z_j \neq \theta$. Wegen $N_j^{n_j} = \theta$ gibt es $l_j \leq n_j$ mit $N_j^{l_j} z_j \neq \theta, N_j^{l_j+1} z_j = \theta$. Dann $N_j^{l_j} z_j = e^{\kappa_j T} N_j^{l_j} e^{TN_j} z_j = e^{\kappa_j T} N_j^{l_j} z_j$, also

$$e^{\kappa_j T} = 1, \text{ d.h. } \kappa_j = \frac{2\pi i}{T} k, k \in \mathbb{Z}.$$

Dies ist im Widerspruch zu i). ■

Beispiel 6.18 Betrachte die DGL $y'' + y + \sqrt{|y|} \sin \omega t = 1$. Als System lautet sie:

$$\begin{pmatrix} y' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \sqrt{|y|} \omega t \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sind $\kappa_{1/2} = \pm i$. Für $g(t, y) := 1 - |y|^{\frac{1}{2}} \sin \omega t$ gilt

$$g\left(t + \frac{2\pi}{\omega}, y\right) = g(t, y), t \in \mathbb{R}, \lim_{|y| \rightarrow \infty} |g(t, y)| |y|^{-1} = 0.$$

□

6.5 Der Brouwer'sche Fixpunktsatz

Bezeichnungen:

$$|z| := \left(\sum_{i=1}^n z_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, z \in \mathbb{R}^n; S_r := \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z\| = r\}, r \geq 0.$$

Der **Fixpunktsatz** ist

Satz 6.19

Sei $r > 0$ und $F : \overline{B}_r \rightarrow \overline{B}_r$ stetig. Dann besitzt F einen Fixpunkt, d.h. es gibt $x \in \overline{B}_r$ mit

$$F(x) = x.$$

Den Beweis dieses Satzes führen wir auf zwei Lemmata zurück.

Lemma 6.20

Es gibt keine stetig differenzierbare Abbildung $f : \overline{B}_r \rightarrow S_r$ mit $f(z) = z$, $z \in S_r$.

Beweis:

Annahme: Es gibt eine stetig differenzierbare Abbildung $f : \overline{B}_r \rightarrow S_r$ und $z \in S_r$ mit

$$f(z) = z.$$

Wir setzen

$$g(z) := f(z) - z \quad f_t(z) := z + tg(z) = (1-t)z + tf(z), \quad z \in \overline{B}_r, t \in [0, 1].$$

f_t, g sind stetig differenzierbar und es gibt $c > 0$ mit

$$\|g(x) - g(y)\| \leq c\|x - y\|, \quad x, y \in \overline{B}_r.$$

f_t ist injektiv für $t \in [0, \frac{1}{c})$, denn:

Seien $x, y \in \overline{B}_r$ und $f_t(x) = f_t(y)$. Dann ist

$$\|x - y\| = \|tg(y) - tg(x)\| \leq tc\|x - y\|,$$

d.h. $x = y$ wegen $tc < 1$.

Für die Funktionalmatrizen Df_t, Dg von f_t bzw. g gilt

$$Df_t(x) = Et + tDg(x), \quad x \in \overline{B}_r, t \in [0, 1],$$

und es gibt $t_0 \in (0, \frac{1}{c})$, so dass

$$\det Df_t(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in \overline{B}_r, t \in [0, t_0).$$

Dies folgt aus der Tatsache, dass g stetig differenzierbar ist.

Sei $G_t := \{z \in \overline{B}_r \mid \exists x \in B_r \text{ mit } z = f_t(x)\}$, $t \in [0, t_0]$. G_t ist offen für alle $t \in [0, t_0)$. Dies folgt aus dem Satz über implizite Funktionen unter Zuhilfenahme der Kenntnisse über die Funktionalmatrizen.

$B_r \subset G_t, t \in [0, t_0)$, denn:

Sei $z \notin G_t$. Wähle einen Punkt $\omega \in G_t$ und einen Punkt u auf der Verbindung von z, ω mit $u \in \overline{G}_t \setminus G_t$. Da das Bild von \overline{B}_r unter f_t kompakt ist, gibt es $x \in \overline{B}_r$ mit $u = f_t(x)$.

Da $u \notin G_t$ gilt $x \in \overline{B}_r \setminus B_r$ d.h. $\|x\| = 1$. Nach Voraussetzung haben wir

$$u = f_t(x) = (1-t)x + tf(x) = (1-t)x + tx = 1.$$

Also $u = x, \|u\| = \|x\| = 1, \|z\| = 1$, da $\|\omega\| < 1$ wegen $\omega \in G_t, G_t$ offen. Dies zeigt $z \notin B_r$.

Da f_t die Sphäre S_r auf S_r abbildet, $t \in [0, t_0)$, folgt aus den obigen Vorbereitungen

$$f_t : \overline{B}_r \rightarrow \overline{B}_r \text{ bijektiv, } 0 \leq t < t_0.$$

Wir setzen

$$I(t) := \int_{\overline{B}_r} \det Df_t(x) dx, \quad t \in [0, 1],$$

und erhalten aus der Substitutionsregel für Bereichsintegrale

$$|I(t)| = v, \quad 0 \leq t < t_0,$$

wobei v für das Volumen von \overline{B}_r steht. Es folgt, dass I ein Polynom ist. Da es in $[0, t_0)$ konstant ist, ist I konstant in $[0, 1]$, d.h.

$$|I(t)| = v, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Aus der Voraussetzung

$$f(x) \in S_r \text{ für alle } x \in \overline{B}_r$$

folgt $\langle f_1(x), f_1(x) \rangle = 1$ für alle $x \in \overline{B}_r$. Daraus erhalten wir

$$\left\langle \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x), f_1(x) \right\rangle = 0, \quad x \in \overline{B}_r, 1 \leq i \leq n,$$

also

$$\det Df_1(x) = 0 \text{ für alle } x \in \overline{B}_r.$$

Dies bedeutet $I(1) = 0$ im Widerspruch zu $v > 0$. ■

Lemma 6.21

Es gibt keine stetige Abbildung $f : \overline{B}_r \rightarrow S_r$ mit $f(z) = z, z \in S_r$.

Beweis:

Annahme: Es gibt eine stetige Abbildung $f : \overline{B}_r \rightarrow S_r$ mit $f(z) = z, z \in S_r$.

Es gilt:

$$f(x) - x = \theta, \quad x \in S_r, \quad \|f(x) - x\| \leq 2, \quad x \in \overline{B}_r.$$

Da f stetig ist, gibt es also $r \in (\frac{3}{4}, 1)$ mit

$$\|f(x) - x\| < \frac{1}{4} \text{ für } r \leq \|x\| \leq 1.$$

Der Approximationssatz von Weierstraß liefert reelle Polynome P_1, \dots, P_n mit

$$\left\| \sum_{i=1}^n P_i(x)e_i - (f(x) - x) \right\| < \frac{1}{4}, \quad x \in \overline{B}_r.$$

Sei $P(x) := \sum_{i=1}^n P_i(x)e_i, x \in \overline{B}_r$. Nun können wir ein Polynom Q wählen mit

$$\frac{3}{4} \leq Q(t^2) \leq 1 \text{ für } 0 \leq t \leq r, \quad |Q(t^2)| \leq 1 \text{ für } r \leq t \leq 1, \quad Q(1) = 0.$$

Wir setzen $g(x) := x + Q(\|x\|^2)P(x)$ und erhalten für $0 \leq \|x\| \leq r$

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &= \|x + Q(\|x\|^2)P(x)\| \\ &= \|f(x) + Q(\|x\|^2)\{P(x) - f(x) + x\} + \{Q(\|x\|^2) - 1\}\{f(x) - x\}\| \\ &\leq \|f(x)\| - \|Q(\|x\|^2)\| \|P(x) - f(x) + x\| - |1 - Q(\|x\|^2)| \|f(x) - x\| \\ &\leq 1 - 1 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Für $r \leq \|x\| \leq 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &= \|x + Q(\|x\|^2)\{P(x) - f(x) + x\} + Q(\|x\|^2)\{f(x) - x\}\| \\ &\leq \|x\| + |Q(\|x\|^2)| \{\|P(x) - f(x) + x\| + \|f(x) - x\|\} \\ &< r - 1\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) < \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Also haben wir

$$\|g(x)\| \geq \frac{1}{4}, \quad x \in \overline{B}_r, \quad g(x) = x \quad x \in S_r.$$

Jede Komponente von g ist ein Polynom, also stetig differenzierbar. Daher ist auch h definiert durch

$$h(x) := g(x)\|g(x)\|^{-1}, \quad x \in \overline{B}_r,$$

stetig differenzierbar. Da $h(x) = x$, $x \in S_r$, und $h(x) \in S_r$, $x \in \overline{B}_r$, gilt, haben wir mit Lemma 6.20 einen Widerspruch. ■

Beweis des Satzes 6.19 Annahme: $F(x) \neq x$ für alle $x \in \overline{B}_r$.

Wir definieren $f : \overline{B}_r \rightarrow S_r$ durch folgende Vorschrift:

$f(x)$ sei der Punkt in S_r , der auf der durch x und $F(x)$ gehenden Geraden liegt, und zwar so, dass x zwischen $f(x)$ und $F(x)$ liegt.

Offensichtlich: f ist wohldefiniert, da stets $F(x) \neq x$, f ist stetig, und

$$\|f(x)\| = 1, \quad x \in \overline{B}_r; \quad f(x) = x, \quad x \in S_r.$$

Lemma 6.21 ergibt den gewünschten Widerspruch. ■

Bemerkung 6.22

Eng verwandt mit den Brouwerschen Fixpunktsatz ist der Satz vom gekämmten Igel: Es gibt keine stetig differenzierbare Abbildung $T : S_1 \rightarrow S_1$ mit der Eigenschaft $\langle u, T(u) \rangle = 0$, $u \in S_1$. Allerdings ist dies nur richtig in R^n mit n ungerade. □

Bemerkung 6.23

Für $n = 1$ ist der Brouwer'sche Fixpunktsatz eine einfache Folge des Zwischenwertsatzes. Für $F : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ gilt nämlich

$$(Id - F)(-1) \leq 0, \quad (Id - F)(1) \geq 0.$$

Also gibt es $x \in [-1, 1]$ mit $F(x) = x$. □

Kapitel 7

Differentialgleichungen und Mechanik

7.1 Die Keplerschen Gesetze und Newton's Gravitationsgesetz

Kepler formulierte folgende Aussagen:

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. Die (gedachte) Linie, die die Sonne mit den Planeten verbindet, überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Das Verhältnis zwischen dem Quadrat der Umlaufzeit und dem Kubus der großen Achse (der Bahnellipse) ist für alle Planeten des Sonnensystems konstant.

Abbildung 7.1: *Die Keplerschen Gesetze*

Nimmt man die Beobachtung hinzu, dass die Bahnen der neun Planeten praktisch in ein und derselben Ebene liegen, erhält man daraus eine vollständige Beschreibung der Planetenbewegung; siehe unten.

Die Schwierigkeiten, die Planetenbewegungen zu enträtseln, kann man in einem Planetarium erkennen. Das Liniengewirr ihrer Bahnen nimmt sich aus wie die verhedderte Angelschnur eines Anglers. Zur Illustration siehe Abbildung 7.3.

Eine **Bewegung** eines Objektes in \mathbb{R}^d ist eine Abbildung

$$x : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

Abbildung 7.2: *Die Bahndistanzen*

Abbildung 7.3: *Die Bahn des Saturn*

wobei I ein (Zeit-)Intervall in \mathbb{R} ist; d nennt man den **Freiheitsgrad** der Bewegung. Hinreichende Glattheit der Bewegung vorausgesetzt, vereinbaren wir: Die Ableitung

$$\dot{x}(t_0) := \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(x(t_0 + h) - x(t_0))$$

(““ ist „Physiker-Notation“) ist der **Geschwindigkeitsvektor in t_0**

Die zweite Ableitung

$$\ddot{x}(t_0) := \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(\dot{x}(t_0 + h) - \dot{x}(t_0))$$

heisst der **Beschleunigungsvektor in t_0** . Hat man etwa n Objekte im Anschauungsraum \mathbb{R}^3 , so kann man mit einer Abbildung

$$x : I \longrightarrow \mathbb{R}^d, d := 3n$$

ihre Bewegung beschreiben.

Die Ergebnisse, die Newton in der Schrift „Principia“ vorstellt, sind u.a.:

- Einführung der Begriffe **Kraft**, (Trägheits-) **Masse**, **Beschleunigung**
(Kraft: Einwirkung auf einen Körper, die Bewegung oder Bewegungsänderung hervorruft; Kraft ist Ursache für Beschleunigung)
- Zusammenführung im Aktionsprinzip

$$K = mb = m\ddot{x} \tag{7.1}$$

x : Bewegung ; K : Kraft ; m : Masse ; $b = \ddot{x}$: Beschleunigung .

- Formulierung des allgemeinen Massenanziehungsgesetzes: Zwischen zwei Körpern mit Masse *m* bzw. *M*, deren Abstand *r* beträgt, wirkt eine Anziehungskraft vom Betrage

$$\gamma \frac{mM}{r^2}. \quad (7.2)$$

Dabei ist γ die Gravitationskonstante, die messbar ist; $\gamma \approx 6,67_{10} - 8 \left[\frac{\text{cm}^3}{\text{sec}^2} \right]$

- Ableitung der Keplerschen Gesetze aus dem Massenanziehungsgesetz.

7.2 Das Zweikörperproblem

Seien x_p, x_s die Bewegungen von zwei Körpern mit Masse m bzw. M . Wir haben nach (7.1) und (7.2):

$$m\ddot{x}_p = -\gamma \frac{mM}{|x_p - x_s|^3} (x_p - x_s) \quad (7.3)$$

$$M\ddot{x}_s = -\gamma \frac{mM}{|x_p - x_s|^3} (x_s - x_p) \quad (7.4)$$

Uns interessiert die Ableitung der Bewegungen x_p, x_s . Für die Bewegung des Schwerpunkts R ergibt sich

$$R = (m + M)^{-1} (mx_p + Mx_s)$$

und seine Bewegung verläuft nach

$$\ddot{R} = (m + M)^{-1} (m\ddot{x}_p + M\ddot{x}_s) = \theta$$

Also vollführt der Schwerpunkt eine gleichförmige Bewegung:

$$R(t) = vt + x^0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wir setzen

$$x := x_p - x_s$$

und erhalten

$$\ddot{x} = -\frac{G}{|x|^3} x; \quad G := \gamma(m + M) \quad (7.5)$$

Für jeden Planeten gilt $m/M \ll 1$, so dass hier G im wesentlichen vom jeweiligen Planeten unabhängig ist und der Schwerpunkt des Zweikörpersystems in der Sonne liegt.

Wir legen den Bezugspunkt nun in die Masse M und beschreiben die Bewegung der Masse m um M . (Die Diskussion von (bewegten) Bezugssystemen ist wesentlicher Bestandteil des Fundaments der Mechanik.)

Die durch (1.5) beschriebene Bewegung verläuft in einer festen Ebene in \mathbb{R}^3 . Dazu betrachten wir das Kreuzprodukt $z := x \wedge \dot{x}$, haben nach einer Rechenregel über Kreuzprodukte $\dot{z} = \dot{x} \wedge \dot{x} + x \wedge \ddot{x} = \theta$, und daher $\dot{z} = \theta$. z ist also eine Bewegung mit Geschwindigkeit θ , d.h. die Bewegung x verläuft in der Ebene, die senkrecht zu

$$z(0) := x(0) \wedge \dot{x}(0)$$

ist. Wir ziehen uns auf diese Ebene zurück und führen ebene Koordinaten x, y ein. (7.5) lautet dann:

$$\ddot{x} = -\frac{G}{\sqrt{x^2 + y^2}}x, \ddot{y} = -\frac{G}{\sqrt{x^2 + y^2}}y \quad (7.6)$$

Mit Polarkoordinaten

$$x(t) := r(t) \cos \delta(t), y(t) := r(t) \sin \delta(t)$$

erhalten wir

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \delta - r \dot{\delta} \sin \delta, \dot{y} = \dot{r} \sin \delta + r \dot{\delta} \cos \delta, \quad (7.7)$$

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \delta - 2\dot{r} \dot{\delta} \sin \delta - r \dot{\delta}^2 \cos \delta - r \ddot{\delta} \sin \delta \quad (7.8)$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \delta + 2\dot{r} \dot{\delta} \cos \delta + r \dot{\delta}^2 \sin \delta + r \ddot{\delta} \cos \delta \quad (7.9)$$

Dies ergibt mit (7.6):

$$\ddot{r} \cos \delta - 2\dot{r} \dot{\delta} \sin \delta - r \dot{\delta}^2 \cos \delta - r \ddot{\delta} \sin \delta = -\frac{G}{r^2} \cos \delta \quad (7.10)$$

$$\ddot{r} \sin \delta + 2\dot{r} \dot{\delta} \cos \delta - r \dot{\delta}^2 \sin \delta + r \ddot{\delta} \cos \delta = -\frac{G}{r^2} \sin \delta \quad (7.11)$$

Multiplikation von (7.10) mit $\cos \delta$, (7.11) mit $\sin \delta$ und Addition der resultierenden Gleichungen ergibt

$$\ddot{r} - r \dot{\delta}^2 = -\frac{G}{r^2}. \quad (7.12)$$

Multiplikation von (7.10) mit $\sin \delta$, (7.11) mit $\cos \delta$ und Subtraktion der resultierenden Gleichungen ergibt

$$2\dot{r} \dot{\delta} + r \ddot{\delta} = 0. \quad (7.13)$$

Die Relationen (7.12), (7.13) gelten solange r nicht verschwindet. Wir nehmen dies nun an und analysieren weiter. Wegen

$$2\dot{r} \dot{\delta} + r \ddot{\delta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\delta}) \quad (7.14)$$

erhalten wir mit (7.13)

$$r(t)^2 \dot{\delta}(t) = r(0)^2 \dot{\delta}(0) =: H \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \quad (7.15)$$

Aus (7.13) und (7.15) folgt

$$\ddot{r} = \frac{H^2}{r^3} - \frac{G}{r^2} \quad (7.16)$$

$$\dot{\delta} = \frac{H}{r^2} \quad (7.17)$$

Aus (7.17) leiten wir ab, dass die Winkelkoordinate eine monotone Funktion (keine „Umkehr“!) ist. Dies bedeutet, dass $t \mapsto \delta(t)$ eine Umkehrfunktion hat. Wir können daher r als eine Funktion der Winkelvariablen δ darstellen; $r = r(\delta)$. Differentiation bzgl. δ notieren wir durch r' . Mit der Kettenregel

$$\dot{r} = r' \dot{\delta}, \ddot{r} = r'' \dot{\delta}^2 + r' \ddot{\delta}$$

und mit (7.13)

$$\ddot{\delta} = -\frac{2H}{r^3} r' \dot{\delta} = -\frac{2H^2}{r^5} r'$$

erhalten wir:

$$\frac{H^2}{r^2} r'' - 2 \frac{H^2}{r^3} r' r' = \frac{H^2}{r} - G \quad (7.18)$$

Dies ist eine **nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung** (zweimalige Differentiation, die abhängigen Variablen r, r', r'' kommen nichtlinear vor !)

Nun kommt ein Trick ! Durch die Einführung der neuen Variablen

$$u := \frac{1}{r}$$

gelingt eine bemerkenswerte Vereinfachung, denn wir erhalten für u die lineare Differentialgleichung

$$u'' + u = \frac{G}{H^2}, \quad (7.19)$$

die sogenannte **Binetsche Differentialgleichung**. Für lineare Differentialgleichungen überlegen wir uns später ein allgemeineres Lösungskonzept. Hier lösen wir ad hoc; man vergleiche mit der Lösung linearer Gleichungssysteme in der Linearen Algebra. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (7.19) ist

$$u^s(\delta) := \frac{G}{H^2}, \delta \in \mathbb{R}.$$

Eine Lösung der homogenen Gleichung

$$u'' + u = \theta \quad (7.20)$$

ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$u^h(\delta) := a \cos(\delta + \varphi), \delta \in \mathbb{R};$$

hierbei heißt a **Amplitude**, φ **Phasenverschiebung**. Also haben wir eine Schar von Lösungen

$$u(\delta) := \frac{G}{H^2} + a \cos(\delta + \varphi), \delta \in \mathbb{R}. \quad (7.21)$$

Die Parameter a und φ ergeben sich aus Anfangswerten $u(0), u'(0)$. Damit ist die Existenz von Lösungen $u \in C^2(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ zweimal stetig differenzierbar}\}$ geklärt. Die

Eindeutigkeit der Lösung von (7.19) bei vorgegebenen Anfangswerten $u(0), u'(0)$ ergibt sich aus der Beobachtung, dass aus (7.19) folgt:

$$u \in C^\infty(\mathbb{R}), u^{2k}(0) = (-1)^k u(0), u^{2k+1}(0) = (-1)^k u'(0)$$

Ein Reihenansatz führt dann auf die Lösung (1.15). Damit haben wir die Differentialgleichung (1.12) gelöst:

$$r(\delta) = \frac{P}{1 + e \cos \delta}, P := \frac{H^2}{G}, e := a \frac{H^2}{G} \quad (7.22)$$

Dabei haben wir o.E. die Phasenverschiebung φ auf 0 gesetzt. Aus der analytischen Geometrie ist bekannt, dass durch (7.22) ein Kegelschnitt K beschrieben wird.

Der Fall $|e| < 1$ K ist eine Ellipse, in derem einem Brennpunkt die Sonne steht. Dies ist das **1. Keplersche Gesetz**. Wir haben die folgenden Beziehungen:

$$P = \frac{\beta^2}{\alpha}, \beta \text{ kleine Halbachse, } \alpha \text{ große Halbachse, } e := \sqrt{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}} \text{ numerische Exzentrizität.}$$

Kometen und Asteroiden bewegen sich auf elliptischen Bahnen !

Der Fall $|e| = 1$ K ist eine Parabel.

Der Fall $|e| > 1$ K ist eine Hyperbel.

Die drei Lösungstypen zeigen, dass kein Sturz auf die Sonne möglich ist. Also vermissen wir einen Lösungstyp. Wir haben ihn durch die Annahme

$$H \neq 0$$

verloren. Er ergibt sich aus $H = 0$, d.h. $\dot{\delta} = 0$.

Das **2. Keplersche Gesetz** ist eine Konsequenz aus der Tatsache, dass eine Bewegung in einem Zentralfeld vorliegt. Wir erhalten es aus der Lösungsdarstellung (1.15) sehr einfach. Es korrespondiert zu folgender Überlegung: Für kleines h gilt für die Fläche eines überstrichenen Segments

$$F(\delta + h) - F(\delta) \sim \frac{1}{2} r(\delta)^2 \sin(h) \sim \frac{1}{2} r(\delta)^2 h,$$

also haben wir

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{1}{2} r(\delta)^2 \dot{\delta} = \frac{1}{2} H$$

Zum 3. Keplerschen Gesetz:

Der Flächeninhalt einer Planetenbahn ist

$$F = \pi \alpha \beta, \alpha \text{ große Halbachse, } \beta \text{ kleine Halbachse.}$$

Aus dem 2. Keplerschen Gesetz folgt

$$F = \frac{1}{2} HT$$

und daher

$$T = \frac{2\pi\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{GM}}.$$

Für zwei unterschiedliche Bahnen folgt:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{\alpha_1^3}{\alpha_2^3}, T_i, \alpha_i \text{ zur Bahn } i \text{ gehörend !}$$

In neuerer Zeit wurde angezweifelt, ob Newton gezeigt hat, dass die Keplerschen Gesetze aus dem Gravitationsgesetz folgen. Wir haben die Lösungen produziert, die die Keplerschen Gesetze bestätigen, und dabei auch die Eindeutigkeitsfrage geklärt. Der Zweifel ergibt sich daraus, dass man unterstellt, dass Newton keine Eindeutigkeit gezeigt hat, eine Unterstellung, die irrig ist, denn zu Newtons Zeit dachte man an Lösungen, die unendlich oft differenzierbar und (lokal) durch eine Taylorreihe dargestellt werden. So hatten wir gerade den Eindeutigkeitsbeweis geführt, Newton kannte diesen Weg.

Die obigen Herleitungen scheinen gerade auf den Spezialfall zugeschnitten zu sein. Eine Studium der qualitativen Eigenschaften an der Lösung selbst ist nicht zufriedenstellend; man möchte qualitative Eigenschaften direkt aus der Differentialgleichung ablesen. Dies wollen wir nun vorführen.

Setze:

$$F(u) := -u + \frac{G}{H^2} \quad (7.23)$$

Dann lautet (7.13):

$$u'' = F(u). \quad (7.24)$$

Sei V eine Stammfunktion von F , d.h. $V' = F$, und sei E definiert durch

$$E(u, u') := \frac{u'^2}{2} + V(u).$$

E ist also eine Funktion auf dem sogenannten Phasenraum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, der eine Orts- und eine Geschwindigkeitskomponente hat. E steht für Energie, $\frac{u'^2}{2}$ ist die kinetische Energie, $V(u)$ die potentielle Energie. Entlang einer Lösung u von (7.13) bzw. (7.24) gilt

$$\frac{d}{d\delta} E(u(\delta), u'(\delta)) = u''(\delta)u'(\delta) + V'(u(\delta))u'(\delta) = 0 \text{ für alle } \delta \in \mathbb{R}.$$

Also bleibt die Energie entlang einer Lösung konstant. O.E. können wir dann die Stammfunktion V von F so

$$V(u) = \frac{1}{2}u^2 - \frac{G}{H^2}u$$

ansetzen. Jede Lösung ist dann ein Teil einer Niveaulinie von E :

$$E(u, u') = e.$$

Abbildung 7.4: Niveaulinien

Der Fall $e = e_-$ Wegen $e_- = E(u, u') \geq V(u) \geq e_-$ kommt nach Definition von V als Bewegung auf diesem Energieniveau nur eine Kreisbewegung in Frage; also $u' \delta = 0$.

Der Fall $e = e_1 \in (e_-, 0)$ Aus $e = E(u(\delta), u'(\delta)) \geq V(u(\delta))$ folgt $u(\delta) \in [u_1, u_2]$ für alle δ , wobei $V(u_1) = V(u_2) = e_1$ ist.
Aus $u'(\delta) \neq 0$ für $u(\delta) \in (u_1, u_2)$ liest man ab: Das Energieniveau e_1 gehört zu einer elliptischen Bahn.

Der Fall $e = e_2 > 0$ Aus $e = E(u(\delta), u'(\delta)) \geq V(u(\delta))$ folgt $u(\delta) \in [0, u_3]$ ($u(\delta) \geq 0!$).
Dieses Energieniveau e_2 gehört zu einer hyperbolischen Bahn.

Der Fall $e = e_3 = 0$ Dieses Energieniveau e_3 gehört zu einer Parabelbahn.

7.3 Eine relativistische Lösung

A. Einstein formulierte 1916 die allgemeine Relativitätstheorie. Ziemlich verkürzt schreiben wir sie so auf:

Die Körper ziehen sich nicht im leeren Raum an, sondern Massen krümmen den Orts-/Zeit-Raum; Bewegung findet entlang von Geodätischen in diesem Raum statt. Die Gesamtenergie, die einem Körper „innewohnt“, ist

$$E = mc^2, \quad c \text{ Lichtgeschwindigkeit.}$$

Dies muss auch Konsequenzen für die Planetenbahnen haben, es muss Abweichungen von den Keplerschen Bahnen geben. Am stärksten sollte diese Abweichung bei dem Planeten Merkur feststellbar sein, da er im Sonnensystem die innerste Bahn verfolgt und damit die größte Bahngeschwindigkeit aufweist. In der Tat wurde von J. Le Verrier 1859 eine „Unstimmigkeit“ in den Bahndaten des Merkur beobachtet: Das Perihel (Punkt grösster Sonnennähe) wird in einem Jahrhundert von 43 Bogensekunden verschieden von dem berechneten Wert beobachtet: Die Einsteinsche Theorie sagt 42,98 Bogensekunden voraus. Diese Theorie schlägt sich in der Binetschen DGL (7.19) durch einen Zusatzterm nieder:

$$u'' = -u + \frac{G}{H^2} + \frac{3G}{C^2}u^2 \quad (7.25)$$

Dies ist nun eine nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung, der Term $\frac{3G}{C^2}u^2$ kann als (kleine) Störung aufgefasst werden. Wir setzen (siehe oben):

$$V(u) := \frac{1}{2}u^2 - \frac{G}{H^2}u - \frac{G}{C^2}u^3$$

Dann lautet (7.25)

$$u'' = -V'(u) \quad (7.26)$$

und mit der Energiefunktion

$$E(u, u') := \frac{1}{3}u'^2 + V(u)$$

erhält man wieder den Satz, dass entlang einer Lösung von (7.25) die Energie erhalten bleibt:

$$\frac{d}{d\delta}E(u(\delta), u'(\delta)) = 0.$$

Seien $A := \frac{G}{H^2}$, $B := \frac{3G}{C^2}$, $\epsilon := AB$. Wir haben $u_{\pm} = \frac{1}{2B}(1 \pm \sqrt{1 - 4B})$. Wegen

$$\sqrt{1 - 4\epsilon} \sim 1 - 2\epsilon = 1 - 2AB$$

korrespondiert u_- mit u_- aus der Newtonschen Skizze ($\epsilon \ll 1$).

Der Fall $e > e_+$ Da $e = \frac{1}{2}u'^2 + V(u) \geq V(u)$ gilt, folgt $u' \neq 0$ entlang einer solchen Bahn. Zwei Fälle sind zu unterscheiden

- $u'(\delta) < 0$. Es gilt dann $\lim_{\delta \rightarrow \infty} r(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{1}{u(\delta)} = \infty$ und der Körper entkommt der Sonne!
- $u'(\delta) > 0$. Es gilt dann $\lim_{\delta \rightarrow \infty} r(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{1}{u(\delta)} = 0$ und der Körper stürzt auf die Sonne. Nicht-Newtonscher Crash!

Der Fall $e \in (e_-, e_+)$ Wir haben drei Möglichkeiten für die Bahn.

- $u_1 \leq 0$ und $u(\delta) \in [0, u_2]$. Wir haben eine Hyperbelbahn.
- $u_1 > 0$ und $u(\delta) \in [u_1, u_2]$. Wir haben eine elliptische Bahn.
- $u(\delta) \in [u_3, \infty]$. Der Körper entkommt!

Der Fall $e = e_-$ Eine kreisförmige Bahn ist möglich: $u(\delta) = u_-$ für alle δ . Diese ist stabil gegen Störungen!

Der Fall $e = e_+$ Eine kreisförmige Bahn ist möglich. Sie kann bei geringfügiger Störung des Energieniveaus zu einer Sturzbahn auf die Sonne werden. (Instabilität!)

Wir wollen nun die Perihel-Anomalie in der Bahn des Merkur aufdecken. Die Newtonsche Bahn ist o.E. gegeben durch

$$u(\delta) = A + a \cos \delta, \delta \in \mathbb{R}, \quad (7.27)$$

mit $|a| < \frac{G}{H^2} =: A$ (H, a bekannt aus Beobachtungen!)

Die Anfangswerte sind:

$$u(0) = A + a, u'(0) = 0 \text{ Perihel !}.$$

Wir transformieren (7.19) (7.25) durch den Ansatz

$$w := A^{-1}u$$

und erhalten für $w = w_N, w = w_E$ die Anfangswertaufgaben

$$w_N'' = -w_N + 1, w_N(0) = \frac{A+a}{A}, w_N'(0) = 0 \quad (7.28)$$

$$w_E'' = -w_E + 1 + \epsilon w_E^2, w_E(0) = \frac{A+a}{a}, w_E'(0) = 0 \quad (7.29)$$

Wir haben offenbar mit $d := \frac{a}{A}$

$$w_N(\delta) = 1 + d \cos \delta, \delta \in \mathbb{R},$$

und machen für w_E den folgenden Ansatz:

$$w_E(\delta) := w_N(\delta) + \epsilon v$$

Für v erhalten wir die DGL

$$v'' + v = 1 + \frac{d^2}{2} + 2d \cos \delta + \frac{d^2}{2} \cos 2\delta + O(\epsilon) \quad (7.30)$$

mit Anfangsbedingungen

$$v(0) = 0, v'(0) = 0. \quad (7.31)$$

Wir vernachlässigen den Term $O(\epsilon)$ und lösen die resultierende lineare Differentialgleichung 2. Ordnung gemäß

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_h$$

wobei

$$v_1'' + v_1 = 1 + \frac{d^2}{2}, v_1(\delta) = 1 + \frac{d^2}{2} \quad (7.32)$$

$$v_2'' + v_2 = 2d \cos \delta, v_2(\delta) = d\delta \sin \delta \quad (7.33)$$

$$v_3'' + v_3 = \frac{d^2}{2} \cos 2\delta, v_3(\delta) = -\frac{d^2}{6} \cos 2\delta \quad (7.34)$$

$$v_h'' + v_h = 0, v_h(\delta) = \left(-1 - \frac{d^2}{3}\right) \cos \delta \quad (7.35)$$

Also erhalten wir für w_E die Approximation

$$w(\delta) := 1 + d \cos \delta + \epsilon \left(-1 - \frac{d^2}{3} \cos \delta + \epsilon \left(1 + \frac{d^2}{2}\right) + \epsilon d\delta \sin \delta - \epsilon \frac{d^2}{6} \cos 2\delta\right).$$

Da

$$\cos(\delta - \epsilon\delta) = \cos \delta \cos(\epsilon\delta) + \sin \delta \sin(\epsilon\delta) \sim \cos \delta + \epsilon\delta \sin \delta$$

ist, erhalten wir schließlich für w_E die Approximation

$$\tilde{w}(\delta) := 1 + F(\delta - \epsilon\delta) + \epsilon f(\delta)$$

wobei $F(\xi) := \cos \xi$ und f und 2π -periodisch ist. Die Funktion

$$\delta \mapsto 1 + F(\delta - \epsilon\delta)$$

nimmt ihre Maxima in

$$\delta_n := 2\pi n(1 - \epsilon)^{-1} \sim 2\pi n(1 + \epsilon), \quad n \in \mathbb{Z},$$

an; die Maxima bestimmen die Perihel-Positionen. Die folgende Übung zeigt, dass der Beitrag von Term $\delta \mapsto \epsilon f(\delta)$ nur quadratische Beiträge bzgl. ϵ zur Abänderung von δ_n bringt. Also ist die Änderung aufgrund der relativistischen Störung in erster Ordnung.

$$\Delta\delta = 2\pi\epsilon = 6\pi \frac{G^2}{H^2 C^2} \sim 0,103518 \quad \text{Bogensekunden je Umlauf}$$

Da der Merkur in einem Jahrhundert 415,2 mal umläuft, erhält man 42,98 Bogensekunden Anomalie. Man hat sich noch zu vergewissern, dass die getätigten Approximationen das Ergebnis nicht dramatisch verändern!

Übung: Seien F, f zweimal stetig differenzierbar, 2π -periodisch, $G(\delta) := F(\delta - \epsilon\delta) + \epsilon f(\delta)$, $\delta \in \mathbb{R}$. Es gelte: $G(\delta_0) = 0$, $F'(\delta_0 - \epsilon\delta_0) \neq 0$, ϵ genügend klein. Dann gilt für $\Delta\delta$ mit $G(\delta_0 + 2\pi + \Delta\delta) = 0$:

$$\Delta\delta = 2\pi\epsilon + O(\epsilon^2)$$

7.4 Konservative Systeme

Wir knüpfen an die Abschnitte 1.2, 1.3 an und betrachten eine DGL der folgenden Form:

$$x'' = F(x), \quad (F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \text{ differenzierbar}). \quad (7.36)$$

Die Gleichung (1.19) ist mit dem System

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = F(x_1) \quad (7.37)$$

in naheliegender Weise äquivalent. In der Mechanik wird folgende Terminologie benutzt:

x_1	(Orts-)Koordinate
x_2	Geschwindigkeit
x'_2	Beschleunigung
$x'_2 = x''$	Konfigurationsraum
$C \times \mathbb{R}$	Phasenraum
$F(x)$	Kraft

Von großer Bedeutung sind folgende Funktionen auf dem Phasenraum:

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2) &:= \frac{1}{2}x_2^2 && \text{Kinetische Energie} \\ U(x_1) &:= \int_{x_1} F(\xi)d\xi && \text{Potentielle Energie} \\ E &:= \overset{z}{T} + U && \text{Gesamte mechanische Energie} \end{aligned}$$

Eine Lösung ist eine zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$x : I \mapsto \mathbb{R}, I \text{ offenes Intervall}$$

mit:

$$x''(t) = F(x(t)) \text{ für alle } t \in I.$$

Man nennt ein System, das durch eine DGL der Form (7.36) beherrscht wird, ein **Konservatives System**, denn:

Satz 7.1 (Energieerhaltungssatz)

Ist $x : I \mapsto \mathbb{R}$ Lösung von (7.36), so gilt:

$$\frac{d}{dt}E(x(t), x'(t)) = 0 \forall t \in I.$$

Beweis:

Trivial. ■

Satz 7.1 besagt, dass die gesamte mechanische Energie ein **erstes Integral** ist. Dieser Satz erlaubt es, Gleichungen der Gestalt (7.36) zu lösen. Dazu studiere man die Energieniveaulinien.

Satz 7.2

Die Energieniveaumenge

$$N_e := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid E(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + U(x_1) = e\}$$

ist eine zweimal stetig differenzierbare Kurve in der Umgebung eines Punktes $(x_1^0, x_2^0) \in N_e$, falls

$$(x_1^0, F(x_1^0)) \neq \theta$$

gilt.

Beweis:

Satz über implizierte Funktionen ist anwendbar, denn

$$\frac{\partial E}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) = F(x_1^0), \frac{\partial E}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) = x_2^0.$$

Die in Satz 1.2 ausgeschlossenen Punkte sind die Gleichgewichtspunkte (oder stationären Punkte) des Systems: Jede Lösung, die in einem solchen Punkt startet, bleibt konstant (Hier ist natürlich wieder ein Eindeutigkeitssatz vonnöten!)

Um die Energieniveaulinie zu zeichnen, ist es zweckmäßig, sich ein Kügelchen vorzustel-

len, das in der „Potentialmulde“ von U hin- und herrollt. Da die kinetische Energie nicht negativ ist, kann die potentielle Energie nicht größer als die Gesamtenergie sein. Ferner ist die Geschwindigkeit dem Betrage nach um so größer, je kleiner die potentielle Energie ist: $|x_2| = \sqrt{2(E - U(x_1))}$:

Das Kügelchen rollt rauf und runter !

Beispiel 7.3 „Ein Stein fällt auf die Erde“ oder die Entdeckung von G. Gallilei.

In unmittelbarer Umgebung der Erdoberfläche kann man die Gravitationskraft als konstant annehmen. Also

$$x'' = -g$$

wobei $g := \frac{M_E}{R_E^2}$ die Gravitationskonstante (M_E Erdmasse, R_E Erdradius) ist und Störkräfte wie Luftwiderstand, Corioliskraft,... unberücksichtigt sind. Das Potential U und die mechanische Energie E sind gegeben durch

$$U(x) := gx, E(x, x') := \frac{x'^2}{2} + g(x)$$

Offenbar ist die Bewegung x durch zweimalige Integration zu erhalten:

$$x(t) = -g\frac{t^2}{2} + vt + x_0, t \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 7.4 Fall eines Körpers aus großer Höhe. Ohne Berücksichtigung von Störkräften (siehe oben) ist

$$\ddot{r} = -g\frac{R^2}{r^2}$$

die das Geschehen steuernde Differentialgleichung. Mit dem Potential $U(r) := -\frac{k}{r}$, wobei $k := gR^2$ ist, ist die Gesamtenergie gegeben durch $E(r, r') := \frac{r'^2}{2} + U(r)$. Wir betrachten nur Bahnen mit negativer Energie. Als Anfangssituation:

$$r_0 > 0, r'_0 = 0; e := -\frac{k}{r_0}.$$

Aus dem Energieerhaltungssatz folgt

$$r' = -\sqrt{2e + \frac{2k}{r}} \quad (7.38)$$

und Trennung der Variablen führt zu

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{2e + \frac{2k}{r}}} = -\int_0^t dt = -t$$

d.h.

$$-t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{-\frac{2k}{r_0} + \frac{2k}{r}}} = \sqrt{\frac{r_0}{2k}} \int_{r_0}^r \sqrt{\frac{r}{r_0 - r}} dr;$$

also

$$\sqrt{r(r_0 - r)} + r_0 \arctan \sqrt{\frac{r_0 - r}{r}} = t \sqrt{\frac{r_0}{2k}} \quad (7.39)$$

Wir wollen ermitteln, mit welcher Geschwindigkeit ein Körper von der Erde hochgeschossen werden muss, damit er dem Schwerfeld der Erde gerade entkommt. Diese Geschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, mit der ein Körper auf der Erdoberfläche aufschlägt, der zur Zeit $t = 0$ in $r_0 = \infty$ die Geschwindigkeit $r'_0 = 0$ hat. Die Energie, die ja konstant ist, verschwindet. Also gilt für die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_* des Aufschlages:

$$r'(t_*) = \sqrt{\frac{2k}{R}} = \sqrt{2gR} \sim 11,2 \frac{km}{sec}$$

Wir führen die neue Variable φ durch

$$\varphi := 2 \arctan \sqrt{\frac{r_0 - r}{r}}, \quad 0 \leq \varphi < \pi,$$

ein; also

$$r = \frac{r_0}{1 + \tan^2(\frac{\varphi}{2})} = r_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{r_0}{2}(1 + \cos \varphi)$$

Ferner skalieren wir die Zeit neu:

$$\tau := \sqrt{\frac{2k}{r_0}} t = \frac{r_0}{2}(\varphi + \sin \varphi)$$

Die Kurve

$$\varphi \mapsto (\tau, r) := \left(\frac{r_0}{2}(\varphi + \sin \varphi), r_0(1 + \cos \varphi) \right)$$

beschreibt eine sogenannte **Zykloide**:

Es handelt sich um die Kurve, die ein Punkt P auf der Peripherie eines Kreises mit dem Durchmesser r_0 beschreibt, der auf der τ -Achse abrollt und für $\varphi = 0$ seine höchste Lage erreicht.

Beispiel 7.5 Ebenes Pendel

Der Kreisbogen x zum Winkel φ ist lx , die Rückführkraft ist gegeben durch $F = -mg \sin x$. Also ergibt das Newtonsche Gesetz

$$-mg \sin x = ml\ddot{x}$$

d.h.

$$\ddot{x} + w_0^2 \sin x = 0 \quad (7.40)$$

wobei $w_0 := \sqrt{\frac{g}{l}}$ ist.

Für kleine Auslenkungen (kleine Energie!), können wir $\sin x$ durch x ersetzen und erhalten als Approximation für die DGL

$$\ddot{x} + w_0^2 x = 0 \quad (7.41)$$

Diese Gleichung hat die allgemeine Lösung (vergleiche mit der linearen Algebra)

$$x(t) = a \cos(w_0 t + \varphi), \text{ wobei } a, \varphi \in \mathbb{R} \text{ freie Parameter sind.} \quad (7.42)$$

Dies ist eine $\frac{2\pi}{w_0}$ -periodische Funktion. Da $w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ist, können wir also die Periode durch l einstellen (Pendeluhrgenauigkeit!).

Sind große Auslenkungen zugelassen (Überschlagschaukel, ..) haben wir es mit der nicht-linearen DGL (7.40) zu tun. Die potentielle Energie wird durch das Potential $U(x) := w_0^2(1 - \cos x)$ gegeben und die Gesamtenergie ist dementsprechend $E(x, x') := \frac{x'^2}{2} + U(x)$. Wir haben Fallunterscheidung je nach Energieniveau e zu machen:

Der Fall $e = \omega_0^2$ Die Bewegung entspricht der Ruhelage $x(0) = 0, x'(0) = 0$.

Der Fall $e = e_1$ $x(t) \in [x_1, x_2]$ und wir haben eine periodische Bewegung ohne Überschlag

Der Fall $e = e_2$ Periodische Bewegung mit Überschlag

In der Phasenebene (x, x') -Ebene ergeben die Energieniveaulinien folgendes Bild:
Schreiben wir die DGL (7.40) als System

$$x'_1 = x_2 \quad (7.43)$$

$$x'_2 = -w_0^2 \sin x_1 \quad (7.44)$$

so korrespondiert das unterschiedliche qualitative Verhalten in

$$(x_1, x_2) = (2k\pi, 0) \text{ bzw. } (x_1, x_2) = ((2k+1)\pi, 0), k \in \mathbb{Z},$$

mit der unterschiedlichen Lage der Eigenwerte der Linearisierung des Vektorfeldes

$$V : (x_1, x_2) \longmapsto (x_2, -w_0^2 \sin x_1)$$

in diesen Punkten: Wir haben:

(a)

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(2k\pi, 0)\right)_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}((2k+1)\pi, 0)\right)_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte im Falle (a): $\lambda_{\pm} = \pm i\omega_0$

Sie liegen also auf der imaginären Achse. Diese Punkte im Phasenporträt heißen **elliptische Punkte** oder **Zentren**.

Eigenwerte im Falle (b): $\lambda_{\pm} = \pm \omega_0$

Die Realteile haben unterschiedliche Vorzeichen. Solche Punkte im Phasenporträt heißen **hyperbolische Punkte**.

Die obige Darstellung im Phasenraum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist nicht sehr zufriedenstellend, da nur zwei ausgezeichnete Positionen ($x = 0, x = \pi$) von Interesse sind. Es ist eine Darstellung im Phasenraum

$$S^1 \times \mathbb{R} \quad (S^1 := \mathbb{Z}/2\pi k \mathbb{Z})$$

anzustreben. Dies ist ein unendlich langer Zylinder.

Kehren wir zur allgemeinen Situation der Gleichung (7.40) zurück. Wir werden sehen, dass Volumina im Phasenraum unter den Bewegungen erhalten bleiben. Die entscheidende Tatsache dafür ist, dass die Divergenz ∇v des Vektorfeldes

$$v : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x_1, x_2) \longmapsto (x_2, F(x_1))$$

verschwindet. Allerdings treten Verzerrungen auf:

7.5 Dissipative Systeme

Die Energieerhaltung ist eine charakteristische Eigenschaft einer Bewegung in einem Zentralfeld; das Gravitationsgesetz von Newton beschreibt ein solches. Systemen, die diese Eigenschaften haben – Hamiltonsche Systeme gehören dazu – stehen die dissipativen System gegenüber¹. Solche Systeme werden geführt von Gesetzen, in denen sich jede Bewegung im Laufe der Zeit abschwächt und schließlich einen Zustand der Ruhe anstrebt; die möglichen Ruhezustände (Ruhelagen) nennt man Gleichgewichtspunkte. Die Dynamik solcher Systeme ist i.a. einfacher zu durchschauen, zeigt aber trotzdem in vielen interessanten konkreten Beispielen große Vielfalt.

Beispiel 7.6 Pendel mit Reibung (Man stelle sich etwa eine Pendeluhr in einem Ölbad vor).

Wir betrachten nur kleine Auslenkungen (relativ zur Pendellänge l !) und damit auch nur betragsmäßig kleine Geschwindigkeiten. Dann ist die Annahme, dass die Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit ist, gerechtfertigt. Wir erhalten dann aus dem Aktionsgesetz $mb = K$ statt (7.40):

$$x'' = -\omega_0^2 x - 2dx' \tag{7.45}$$

Entlang einer Lösung nimmt die Energie

$$E(x, x') := \frac{1}{2}x'^2 + \omega_0^2 x^2$$

wegen

$$\frac{dE}{dt}(x(t), x'(t)) = -dx'(t)^2$$

ab; es wird also aufgrund von Reibung Energie verbraucht. Stellt man sich wieder ein Kügelchen in der Potentialmulde $U(x) := \omega_0^2 x^2$, $x \in \mathbb{R}$ vor, so bedeutet dies, dass die

¹dissipare (lat.) = zerstreuen, verteilen

Kugel schließlich im Minimum der Potentialmulde zur Ruhe kommt.
Wir versuchen für (7.45), exponentielle Abschwächung vermutend, folgenden Ansatz

$$x(t) = e^{\mu t} x_0, \quad t \in \mathbb{R} \quad (7.46)$$

und erhalten als notwendige Bedingung für den Parameter μ :

$$\mu^2 + 2\mu d + \omega_0^2 = 0 \quad (7.47)$$

Die Wurzeln sind nun:

$$\mu_{\pm} = -d \pm \sqrt{d^2 - \omega_0^2}$$

Ungedämpfter Fall: $d = 0$ Einsetzen von $\mu_{\pm} = \pm i\omega_0$ ergibt

$$x^1(t) = x_0^1 \cos \omega_0 t \quad \text{bzw.} \quad x^2(t) = x_0^2 \sin \omega_0 t$$

und wir sehen die bereits im letzten Abschnitt erhaltene Lösung.

Starke Dämpfung: $d^2 > \omega_0^2$ Lösungen:

$$x^1(t) = e^{\mu_1 t} x_0^1, \quad x^2(t) = e^{\mu_2 t} x_0^2$$

Man beachte, dass μ_{\pm} negative reelle Zahlen sind. Eine Überlagerung der Lösungen ergibt qualitativ folgendes Bild:

Grenzfall: $d = \omega_0$ Nun liefert uns der Ansatz offenbar nur eine Lösung:

$$x^1(t) = e^{-dt} x_0^1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Eine weitere Lösung ist (Rezept später):

$$x^2(t) = t e^{-dt} x_0^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungen sehen qualitativ (Langzeitverhalten!) wie in Fall b) aus dem letzten Abschnitt aus.

Schwache Dämpfung: $0 < d^2 < \omega_0^2$. Einsetzen von $\mu_{\pm} = -d \pm i\sqrt{\omega_0^2 - d^2}$ in (7.46) und Aufspaltung in Real- und Imaginärteil führt uns auf Lösungen, die als gedämpfte Schwingungen wahrzunehmen sind:

$$x^1(t) = x_0^1 e^{-dt} \cos \omega_0 t \quad \text{bzw.} \quad x^2(t) = x_0^2 e^{-dt} \sin \omega_0 t,$$

□

Aus dem obigen Beispiel erkennt man, dass nun Volumina im Phasenraum sicher nicht erhalten bleiben: Sie schrumpfen mit einer von der Situation abhängigen Rate. Die einzige Ruhelage ist der Nullpunkt. Approximiert man $\sin x$ in (7.40) durch $x - cx^3$ ($c := \frac{1}{6}!$), so erhält man bei Reibung aus (7.40) folgende DGL:

$$x'' + 2dx' + \omega_0^2(x - cx^3) = 0 \quad (7.48)$$

Hier haben wir bereits 3 Ruhelagen:

$$(0, 0), \left(+\sqrt{\frac{1}{c}}, 0\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{c}}, 0\right).$$

Die zugehörige Potentialmulde wird durch

$$U(x) := \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 - \frac{1}{4}c\omega_0^2 x^4$$

definiert. Bei $(\pm\sqrt{\frac{1}{c}}, 0)$ liegt sicher eine recht „unbequeme“ Ruhelage vor! Wohin rollt die Kugel?

Auf die Gleichung (7.48) stößt man auch, wenn man das gedämpfte Federpendel mit nichtlinearer Rückstellkraft (Abänderung des Hookschen Gesetzes) betrachtet.

Kapitel 8

Zur Theorie von Poincaré–Bendixon

8.1 Limesmengen und Attraktoren

Wir betrachten hier wieder

$$y' = f(y) \tag{8.1}$$

wobei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Bezeichnungen¹

$\phi(\cdot, x) :=$ Lösung von (10.1) mit $\phi(0, x) = x$ auf dem maximalen Existenzintervall $I(x)$.

$I^+(x) := I(x) \cap [0, \infty)$

$t^*(x) := \sup_{t \in I^+(x)} t$

$\gamma^+(x) := \{\phi(\pi, x) \mid \pi \in I^+(x)\}$; positiver Orbit mit kanonischer Orientierung

$w^+(x) := \bigcap_{t \in I^+(x)} \overline{\gamma^+(\phi(t, x))}$; positive Limesmenge

Definition 8.1

Eine Menge $M \subset D$ heisst positiv invariant, falls gilt:

$$y^+(x) \subset M$$

für alle $x \in M$.

Bevor wir Folgerungen im Zusammenhang mit Def 10.1. auflisten können, ist es nötig, eine Aussage zur Abbildung

$$t^+ : D \ni x \rightarrow t^+(x) \in [0, \infty)$$

zu beweisen.

Lemma 8.2

Die Abbildung $t^+ : D \ni x \rightarrow t^+(x) \in [0, \infty)$ ist unterhalbstetig, d.h.:

$$\text{Ist } x \in D \text{ und } x = \lim_k x_k \text{ mit } x_k \in D, k \in \mathbb{N}, \text{ so gilt } \lim_k t^+(x_k) \geq t^+(x). \tag{8.2}$$

¹Ist M eine Menge in \mathbb{R}^n , so bezeichnen wir mit \overline{M} den Abschluss von M .

Beweis: Sei $t^+ < t^+(x)$.

Da D offen ist, gibt es

$\epsilon < 0$ mit

$$M_\epsilon := \{z \in \mathbb{R}^n \mid |z - \phi(t, x)| \leq \epsilon, t \in [0, t^+ J] \subset D\}$$

Da M_ϵ kompakt und f -stetig differenzierbar ist f auf $M_\epsilon L$ -stetig; sei L die L -Konstante.

Wähle $\delta \in (0, \epsilon)$ mit

$$\delta \exp(L, t^{**}) \leq \epsilon$$

Sei $z \in D$ mit $|z - x| \leq \delta$, sei $I^+(z) := [0, \alpha)$.

Annahme: $\alpha \leq t^*$

Wie in Satz 4.5. erhält man:

$$|\phi(t, z) - \phi(t, x)| \leq |z - x| \exp(Lt) \leq \epsilon, t \in [0, \alpha).$$

Also bleibt $\phi(\cdot; z)$ in der kompakten Menge M_2 , was im Widerspruch zur Definition von α ist.

Also gilt $\alpha > t^*$. Da $t^* < t^+(x)$ beliebig war, muss also $\alpha \geq t^+(x)$ gelten. Wir haben also gezeigt:

$$\exists \delta > 0 \forall z \in D(|z - x| \leq \delta \implies t^+(z) \geq t^+(x))$$

Daraus folgt (10.2) sofort.

Folgerung 8.3

Sei $x \in D, M \subset \cdot$. Dann gilt

- i) $\gamma^+(x)$ ist positiv invariant
- ii) Ist M positiv invariant, so auch \overline{M} .
- iii) Ist M abgeschlossen und gibt es zu jedem $z \in M \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus M}$ ein $\epsilon > 0$ mit

$$\{\phi(t, x) \mid t \in [0, \epsilon)\} \subset M,$$

so ist M positiv invariant.

Beweis:

- Offensichtlich
- Sei $z \in \overline{M}$ und dazu eine Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_k z_k = z, z_k \in M$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Aus Lemma 10.2 wissen wir: $t^+(z) \leq \lim_k t^+(z_k)$. Also existiert zu jedem $t \in [0, t^+(z))$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $t^+(z_k) > t$ für $k \geq k_t$. Folglich gilt $t \in I^+(z_k)$ für $k \geq k_t$ und $\lim_k \phi(t, z_k) = \phi(t, z)$. Somit ist $\phi(t, z) \in \overline{M}$, da $\phi(t, z_k) \in M, k \in \mathbb{N}$, wegen der positiven Invarianz von M ist.
- Ist M nicht positiv invariant, so existieren ein $x \in M$ und ein $t \in (0, t^+(x))$ mit $\phi(t, x) \notin M$.
Da M abgeschlossen ist, gibt es ein $\tau \in [0, t)$ mit $\phi(\tau, x) \in M$, aber $\phi(s, x) \notin M$ für $\tau < s \leq t$. Dann ist $z := \phi(\tau, x) \in \mathbb{R}^n \setminus M \cap \overline{M}$ und die angegebene Bedingung ist für z nicht erfüllt.

Folgerung 8.4

Sei $x \in D$. Dann gilt:

- $y \in w^+(x)$ genau dann, wenn es eine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gibt mit

$$t_k \in I^+(x), k \in \mathbb{N}; \lim_k t_k = t^+(x); \lim_k \phi(t_k, x) = y.$$

- $w^+(x)$ ist abgeschlossen und $w^+(x) \cap D$ ist positiv invariant
- $\overline{\gamma^+(x)} = \gamma^+(x) \cup w^+(x)$.
- Ist x periodisch, so gilt:

$$\gamma^+(x) = \omega^+(x), \gamma^+(x) \text{ ist kompakt}$$

Beweis:

- Sei $y \in \omega^+(x)$, also $y \in \gamma^+(\phi(t, x))$ für alle $t \in I^+(x)$. Dann gibt es eine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_k t_k = t^+(x), |\phi(t_k, x) - y| < \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}.$$

Dies bedeutet: $\lim_k \phi(t_k, x) = y, \lim_k t_k = t^+(x)$.

Umgekehrt, ist $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge der angegebenen Art, so gilt

$$y \in \overline{\gamma^+(x)}$$

und wegen

$$y = \lim_k \phi(t_k, x) = \lim_k \phi(t_k - t, \phi(t, x))$$

für alle $t \in [0, t^+(x))$ folgt

$$y \in \overline{\gamma^+(\phi(t, x))} \text{ für alle } t \in I^+(x).$$

- Die Abgeschlossenheit folgt unmittelbar aus der Definition. Da $\gamma^+(x)$ positiv invariant ist (siehe Folgerung 10.3), ist nach Folgerung 10.3. auch $\overline{\gamma^+(x)}$ positiv invariant, also auch $\overline{\gamma^+(\phi(t, x))}$ für alle $t \in I^+(x)$. Da der Durchschnitt von positiv invarianten Mengen wieder positiv invariant ist (Beweis!), ist auch $w^+(x) \cap D$ positiv invariant.
- Für alle $t \in I^+(x)$ gilt: $\gamma^+(\phi(t, x)) \subset \gamma^+(x) \subset \overline{\gamma^+(x)}$. Dies zeigt: $w^+(x) \subset \overline{\gamma^+(x)}$. Dann ist $\overline{w^+(x)} \cup \gamma^+(x) \subset \overline{\gamma^+(x)}$ klar. Sei $y \in \overline{\gamma^+(x)}$. Dann gibt es eine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $y = \lim_k \phi(t_k, x), t_k \in I^+(x), k \in \mathbb{N}$.

α) $\lim_k t_k = t^+(x)$. $y \in w^+(x)$ nach i).

β) Es gibt Teilfolge $(t_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ mit:

$$0 \leq t_{k_l} \leq t^* < t^+(x), l \in \mathbb{N}, \tilde{k} = \lim_l t_{k_l}$$

existiert.

Dann gilt: $y = \lim_l \phi(t_{k_l}, x) = \phi(\tilde{k}, x)$, d.h. $y \in \gamma^+(x)$.

- Offensichtlich

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $z \in \mathbb{R}^n$. Wir setzen

$$\text{dist}(z, M) := \inf\{|z - m| \mid m \in M\}$$

Satz 8.5

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $\overline{\gamma^+(x)}$ kompakt. Dann gilt

- $w^+(x) \neq \emptyset$.
- $w^+(x)$ ist kompakt.
- $w^+(x) \cap D$ ist positiv invariant.
- $w^+(x)$ ist zusammenhängend, d.h. aus $w^+(x) = w_1 \cup w_2$, w_1, w_2 abgeschlossen,

$$w_1 \cap w_2 = \emptyset$$

folgt $w_1 = \emptyset$ oder $w_2 = \emptyset$.

Beweis:

- Wegen $\gamma^+(x) \subset \overline{\gamma^+(x)}$ und $\overline{\gamma^+(x)}$ kompakt gilt $t^+(x) = w$ (siehe Satz 3.23). Folglich ist $\gamma^+(\phi(t, x)) \neq \emptyset$ für alle $t \geq 0$. Sei $t_k := k, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\phi(t_k, x) \in \gamma^+(\phi(t_k, x)) \subset \gamma^+(c) \subset \overline{\gamma^+(x)} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Da $\overline{\gamma^+(x)}$ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(t_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ und $z \in \mathbb{R}^n$ mit

$$z = \lim_l \phi(t_{k_l}, x), \quad \lim_l t_{k_l} = \infty.$$

Folgerung 10.4 i) liefert $z \in w^+(x)$.

- Folgt aus der Definition $w^+(x) := \bigcup_{t \geq 0} \overline{\gamma^+(\phi(t, x))}$, da jede Menge $\gamma^+(\phi(t, x))$ beschränkt und abgeschlossen ist.
- Folge 10.4. ii).
- Seien $w_1, w_2 \subset \mathbb{R}^n$ mit $w^+(x) = w_1 \cup w_2, w_1 \cap w_2 = \emptyset$, w_1, w_2 abgeschlossen.

Annahme: $w_1 \neq \emptyset, w_2 \neq \emptyset$. Da $w^+(x)$ kompakt ist, sind auch w_1, w_2 und $M := w_1 - w_2 := \{z - y \mid z \in w_1, y \in w_2\}$ kompakt. Also gilt wegen $w_1 \cap w_2 = \emptyset$

$$\alpha := \inf\{|u| \mid u \in M\} = \min\{|u| \mid u \in M\} > 0.$$

Seien

$$M_1 := \{z \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(z, w_1) \leq \frac{\alpha}{3}\}$$

$$M_2 := \{z \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(z, w_2) \leq \frac{\alpha}{3}\}$$

Damit gilt: $w_1 \subset M_1, w_2 \subset M_2$

$M_1 \cap M_2 = \emptyset$ (*) $\exists t^* \geq 0$ mit $\gamma^+(\phi(t, x)) \subset M_1 \cup M_2$ f.a. $t \geq t^*$, denn ist $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit (*)

$$\lim_k t_k = \infty, z_k := \phi(t_k, x) \notin M_1 \cup M_2, k \in \mathbb{N},$$

so können wir wegen der Kompaktheit von $\overline{\gamma^+(x)}$ O.E. annehmen:

$$Z := \lim_k \phi(t_k, x) \text{ existiert.}$$

Dann gilt also wegen Folge 10.4. i) $z \in w^+(x)$ und wegen

$$(*) \text{dist}(z, M_1) \geq \frac{\alpha}{3}, \text{dist}(Z, M_2) \geq \frac{\alpha}{3},$$

was im Widerspruch zu $z \in w^+(x)$ ist.

Seien $z_1 \in w_1, z_2 \in w_2$ und $(t_k^1)_{k \in \mathbb{N}}, (t_k^2)_{k \in \mathbb{N}}$ Folgen in $[0, \infty)$ mit:

$$\lim_k t_k^1 = \lim_k t_k^2 = \infty$$

$$\lim_k \phi(t_k^1, x) = z_1, \lim_k \phi(t_k^2, x) = z_2.$$

(beachte $w_1 \subset w^+(x), w_2 \subset w^+(x)$ und Folg. 10.4 i)). Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $t_k^1 \geq t^*, t_k^2 \geq t^*$ (siehe (#) und

$$\phi(t_k^1, x) \in M_1, \phi(t_k^2, x) \in M_2$$

(beachte $z_i \in w_i \subset M_i, i = 1, 2$). Dann gibt es wegen $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ ein τ zwischen t_k^1 und t_k^2 mit $\phi(\tau, x) \notin M_1 \cup M_2$. Dies ist im Widerspruch zu (#).

Definition 8.6

Sei $x \in D$ und $M \subset D$.

a) Wir sagen, x werde von M angezogen, wenn $t^+(x) = \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(t, x), M) = 0$.

b) Die Menge

$$A(M) := \{z \in D \mid M \text{ zieht } z \text{ an} \}$$

heißt Anziehungsbereich von M .

b) M heißt attraktiv genau dann, wenn es $\epsilon > 0$ gibt mit

$$\{z \in D \mid \text{dist}(z, M) \leq \epsilon\} \subset A(M)$$

d) Ist $A(M) = D$, so heißt M ein globaler Attraktor.

□

Beispiel 8.7

$$(*) \begin{cases} x' = -y + xr^2 \sin \frac{\pi}{r} \\ y' = x + yr^2 \sin \frac{\pi}{r} \end{cases}, r := x^2 + y^2$$

(Stetige Ergänzung für $r = 0!$)

In Polarkoordinaten r, γ lautet (*):

$$r' = r^3 \sin \frac{\pi}{r}, \gamma' = 1$$

Daraus schließt man:

- i) Kreise um $(0, 0)$ mit Radien $\frac{1}{n}$ sind periodische Orbits
- ii) Alle anderen Orbits sind Spiralen, die sich gegen die äußeren Kreise drehen.
- iii) Also wird jeder Punkt (x, y) mit $\frac{1}{(n+1)^2} < x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n^2}$ von $M_n := \{(x, y) | x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}$ angezogen, aber M_n ist für kein n ein Attraktor.

Folgerung 8.8

Sei $M \subset D$. Dann gilt:

- i) $A(M)$ ist positiv invariant.
- ii) Ist M attraktiv, so ist $A(M)$ offen.
- iii) $w^+(x) \subset \overline{M}$ für alle $x \in A(M)$.

Beweis:

- i) Sei $z \in A(M)$; zu zeigen ist $\gamma^+(z) \subset A(M)$, d.h. $\phi(t, z) \in A(M)$ für alle $t \leq 0$. Dies ist offensichtlich.
- ii) Sei $z \in A(M)$. Es gilt also:

$$t^+(z) = \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(t, z), M) = 0.$$

Da M attraktiv ist, gibt es $\epsilon > 0$ mit (*)

$$\{v \in D | \text{dist}(v, M) \leq \epsilon\} \subset A(M)$$

Wähle $t^* \geq 0$ mit

$$\text{dist}(\phi(t^*, z), M) \leq \frac{\epsilon}{2}, t \leq t^*.$$

Wegen Lemma 10.2 gibt es $\delta > 0$ mit:

$$t^+(u) = \infty, |\phi(t^*, u) - \phi(t^*, z)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

für alle $u \in D$ mit $|u - z| < \delta$. Dann gilt für $u \in D$ mit $|u - z| < c\delta$ wegen (*)

$$\phi(t^*, u) \in A(M)$$

Dies bedeutet auch $u \in A(M)$. Also ist

$$\{u \in D | |u - z| < \delta\} \subset A(M).$$

iii) Folgt unmittelbar aus Folge 10.4. ii).

Bemerkung 8.9

Die Begriffsbildungen in Definition 10.7. sind geeignet, die Stabilitätsbegriffe auf Mengen (von Punkten) auszudehnen, etwa: $M \subset D$ heiße **stabil**

$$: \iff \forall \epsilon > 0 \forall x \in M \exists \delta > 0 \forall y \in D \forall t \leq 0 \\ (|y - x| < \delta \implies t^+(y) = \infty, \text{dist}(\phi(t, y), M) \leq \epsilon)$$

□

8.2 Das Theorem von Poincare–Bendixon

Wir betrachten hier den Spezialfall $n = 2$ (ebene Flüsse), d.h. in (10.1)

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2, dD \subset \mathbb{R}^2 \text{ offen}$$

Die folgende Begriffsbildung ist wesentlich für das Studium von ebenen Flüssen.

Definition 8.10

Seien $\tilde{x}, \tilde{x} \in \mathbb{R}^2, -\infty > \tau_1 < \tau_2 < \infty$. Das Bild \mathcal{S} unter der Abbildung

$$(\tau_1, \tau_2) \ni \tau \iff \bar{x} + \tau \tilde{x} \in \mathbb{R}^2$$

heißt eine **Transversale** zu (10.1), falls

- i) $\overline{\mathcal{S}} \subset D$
- ii) $\tilde{x}, f(x)$ sind linear unabhängig f.a. $x \in \mathcal{S}$

Eine Transversale ist also eine an beiden Enden offene Teilstrecke einer Geraden, auf der nur solche Vektoren $f(x), x \in D$, liegen, die nicht gleich dem Nullvektor oder parallel zur Geraden sind. Der Vektor $f(x)m, x \in \mathcal{S}$, weit in eine der beiden durch die Gerade $\tau \iff \bar{x} + \tau \tilde{x}$ bestimmten Halbebenen, und zwar muss es für alle $x \in \mathcal{S}$ aus Stetigkeitsgründen dieselben Halbebenen sein: Die Trajektorien des Systems (10.1) durchsetzen also eine Transversale stets in einer Richtung. Aus dieser Tatsache ergeben sich die folgenden Lemmata:

Lemma 8.11

Sei \mathcal{S} eine Transversale zu (10.1), sei $x \in D$, seien $0 \leq t_1 < \dots < t_k < t^+(cx)$ und es gelte

$$y_i := \phi(t_i, x) \in \mathcal{S}, 1 \leq i \leq k.$$

Dann sind y_1, \dots, y_k wachsend auf \mathcal{S} , d.h. es gibt $\tau_i \geq 1, 2 \leq i \leq k$, mit

$$y_i - y_1 = \tau_i(y_2 - y_1), 1 \leq i \leq k.$$

Lemma 8.12

Sei \mathcal{S} eine Transversale zu (10.1) und seien $x \in D, y \in w^+(x)$. Dann gilt ²

$$\#\mathcal{S} \cap w^+(x) \leq 1, \#\mathcal{S} \cap \gamma^+(y) \leq 1$$

Lemma 8.13

Ist $x \in D$ mit $\gamma^+(x) \cap w^+(x) \neq \emptyset$, so ist x periodisch

Lemma 8.14

Sei $x \in D, K \subset D$ kompakt mit $\gamma^+(x) \subset K$. Enthält $w^+(x)$ einen periodischen Punkt y , der kein Gleichgewichtspunkt ist, so gilt:

$$w^+(x) = \gamma^+(y)$$

Satz 8.15

Sei $x \in D, K \subset D$ kompakt mit $\gamma^+(x) \subset K$. Enthält $w^+(x)$ keinen Gleichgewichtspunkt, so ist $w^+(x)$ ein periodischer Orbit, d.h. es gibt einen periodischen Punkt $y \in w^+(x)$.

Beweis: Wir wissen aus Satz 10.5.: $w^+(x) \neq \emptyset$, kompakt, positiv invariant. Also gibt es $y \in w^+(x)$, und es gilt:

$$\gamma^+(y) \subset w^+(x)$$

Also ist $w^+(y)$ ebenfalls nicht leer, und $w^+(y) \subset w^+(x)$. Sei $z \in w^+(y)$. Da $w^+(x)$ keinen Gleichgewichtspunkt enthält, ist $f(z) \neq z$, und es gibt eine Transversale \mathcal{S} durch z . Wegen $z \in w^+(y)$ erhalten wir, dass $\mathcal{S} \cap \gamma^+(y)$ die Transversale \mathcal{S} schneidet. Nach Lemma 10.12 kann dies nur in z erfolgen. Also ist $z \in \gamma^+(y) \cap w^+(y)$, und aus Lemma 10.13 folgt, dass $\gamma^+(y)$ ein periodischer Orbit ist. Die Behauptung ergibt sich nun aus Lemma 10.14. ■

² $\#M :=$ Anzahl der Elemente von M .

Kapitel 9

Stabilität periodischer Lösungen

Wir wollen das Lösungsverhalten in der Nähe von periodischen Punkten studieren.

9.1 Limesmengen

Wir setzen

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &:= \{(v, V) \in \mathcal{S} \mid V \text{ offen, } v \in C^1(V; \mathbb{R}^n)\} \\ \mathcal{S}^+ &:= \{(v, V) \in \mathcal{S} \mid \phi_t^v \xi \text{ existiert für alle } t \geq 0 \text{ für jedes } \xi \in V\}\end{aligned}$$

Ist $(v, V) \in \mathcal{S}^+$, so schreiben wir

$$\phi_t^v B := \{\phi_t^v \xi \mid \xi \in B\}, \quad \phi_{[t, \infty)}^v B := \{\phi_s^v \xi \mid s \geq t, \xi \in B\}$$

für jede Teilmenge B von V .

Definition 9.1

Sei $(v, V) \in \mathcal{S}^+$; sei $x \in V, B \subset V$.

- $\gamma^+(B) := \phi_{[t, \infty)}^v B$; $\gamma^+(x) := \gamma^+(\{x\})$ (**Positive Orbits**).
- x heisst **Limespunkt** von B genau dann, wenn es Folgen $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(0, \infty)$ bzw. B gibt mit $\lim_n t_n = \infty$ und $\lim_n \phi_{t_n}^v x_n = x$.
- $\omega(B) := \bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi_{[t, \infty)}^v B}$; $\omega(x) := \omega(\{x\})$ (**ω -Limesmengen**).
- B heisst **invariant**, wenn $\phi_t^v B \subset B$ für alle $t \geq 0$ gilt.
- B heisst **stark invariant**, wenn $\phi_t^v B = B$ für alle $t \geq 0$ gilt.¹

□

Vereinbarung: \emptyset ist invariant und stark invariant.

Lemma 9.2

Sei $(v, V) \in \mathcal{S}^+, B \subset V, x \in V$.

¹Mit \overline{M} bezeichnen wir den Abschluss einer Menge M .

- i) B ist invariant genau dann, wenn $\gamma^+(x) \subset B$ für alle $x \in B$ gilt.
- ii) B ist stark invariant genau dann, wenn $\phi_t^v \xi \in B$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $\xi \in B$ gilt.
- iii) Ist B invariant, so ist auch \overline{B} invariant.
- iv) $\gamma^+(x), \overline{\gamma^+(x)}$ sind invariant.

Beweis:

Der Nachweis von i) ist trivial. Zu ii). Sei B stark invariant, d.h. $\phi_t^v B = B$ für alle $t \geq 0$. Sei $\xi \in B, y_0 := \xi$. Wähle y_1 mit $\phi_1^v y_1 = x_0$. Damit haben wir $x(\cdot; \xi)$ auf $[-1, \infty)$ fortgesetzt, denn $x(-1; \xi) = x(0; y_1)$. Induktiv erhalten wir so eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und Fortsetzungen von $x(\cdot; \xi)$ auf $[-n, \infty)$. Also ist $x(\cdot; \xi)$ auf $(-\infty, \infty)$ definiert. Wir zeigen die Umkehrung. Wegen i) ist noch zu zeigen $B \subset \phi_t^v B$ für alle $t \geq 0$. Sei $\xi \in B$. Es gilt: $\phi_s^v \xi \in B$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Sei $t \geq 0$. Dann gilt: $\xi = \phi_t^v \phi_{-t}^v \xi \in \phi_t^v(B)$. Zu iii) Folgt aus der Stetigkeit von $\xi \mapsto \phi_t^v \xi$ für alle $t \geq 0$. Zu iv) Offenbar ist $\gamma^+(x)$ invariant. Nach iii) ist auch $\overline{\gamma^+(x)}$ invariant. ■

Lemma 9.3

Sei $(v, V) \in \mathcal{S}^+, B \subset V, x \in V$.

- i) $\omega(B) = \{y \in V | y \text{ Limespunkt von } B\}$.
- ii) $\omega(B) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{\phi_{[t_k, \infty)} B}$.
- iii) $\omega(B)$ ist abgeschlossen und invariant.
- iv) $\overline{\gamma^+(x)} = \gamma^+(x) \cup \omega(x)$.

Beweis:

i), ii), iii) sind offensichtlich. Zu iv). Wegen $\gamma^+(x) \subset \overline{\gamma^+(x)}, \omega(x) \subset \overline{\gamma^+(x)}$ gilt: $\gamma^+(x) \cup \omega(x) \subset \overline{\gamma^+(x)}$. Sei $y \in \overline{\gamma^+(x)}$. Sei dazu $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\gamma^+(x)$ mit $y = \lim_n y_n$. Dazu gibt es eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\phi_{t_n}^v x = y_n$ mit $t_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

1. Fall: $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Wähle eine konvergente Teilfolge $\{t_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}; t := \lim_k t_{n_k}$. Dann gilt:

$$y = \lim_k y_{n_k} = \lim_k \phi_{t_{n_k}}^v x = \phi_t^v x, \text{ d.h. } y \in \gamma^+(x) \subset \gamma^+(x) \cup \omega(x).$$

2. Fall: $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist unbeschränkt. Mit i) folgt: $y \in \omega(x) \subset \gamma^+(x) \cup \omega(x)$. ■

Satz 9.4

Sei $(v, V) \in \mathcal{S}^+, x \in V$. Ist $\overline{\gamma^+(x)}$ kompakt, so gilt:

- a) $\omega(x) \neq \emptyset$, kompakt, zusammenhängend, stark invariant.
- b) Ist $\xi \in \omega(x)$, so ist $\phi_t^v \xi$ für alle $t \in (-\infty, \infty)$ definiert.

Beweis:

Zu a). Wir haben: $\omega(x) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{\gamma^+(\phi_k^v x)}$ Da $\gamma^+(x)$ kompakt ist, ist $\overline{\gamma^+(\phi_k^v x)} \neq \emptyset$ und

kompakt für alle $k \in \mathbb{N}$. Da $\overline{\gamma^+(\phi_k^v x)} \subset \overline{\gamma^+(\phi_{k'}^v x)}$ gilt, falls $k' \geq k$ ist, folgt aus dem Cantorschen Durchschnittssatz²

$$\omega(x) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{\gamma^+(\phi_k^v x)} \neq \emptyset.$$

Da $\omega(x)$ eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\gamma^+(x)$ ist, ist $\omega(x)$ auch kompakt.

Annahme: $\omega(x)$ nicht zusammenhängend, d.h.

$$\omega(x) = F \cup G, F, G \text{ abgeschlossen, } F, G \neq \emptyset, F \cap G = \emptyset.$$

Da $\omega(x)$ kompakt ist, sind auch F, G kompakt. Also gibt es $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$U, V \text{ offen, } F \subset U, G \subset V, U \cap V = \emptyset, \omega(x) \subset U \cup V.$$

Nach Definition von $\omega(x)$ gibt es $t_0 \geq 0$ mit $\overline{\gamma^+(\phi_t^v x)} \subset U \cup V$ für alle $t \geq t_0$. Da $\gamma^+(\phi_{t_0}^v x)$ als stetiges Bild einer zusammenhängenden Menge zusammenhängend ist, ist auch $\overline{\gamma^+(\phi_{t_0}^v x)}$ zusammenhängend. Also o.E. $\overline{\gamma^+(\phi_{t_0}^v x)} \subset U$. Da offenbar $\omega(x) \subset \overline{\gamma^+(\phi_{t_0}^v x)}$ ist, folgt $\omega(x) \subset U$, also $F \cup G = \omega(x) \subset U$, $G \subset U \cap V$, was ein Widerspruch ist.

Wir wissen bereits, dass $\omega(x)$ invariant ist (Lemma 9.3). Bleibt zu zeigen: $\omega(x) \subset \phi_t^v(\omega(x))$ für alle $t \geq 0$. Sei $y \in \omega(x)$. Seien dazu die Folgen $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gemäß Lemma 9.3 i), ii) gewählt: $\lim_n t_n = \infty$, $y_n = \phi_{t_n}^v$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\lim_n y_n = y$. Sei $\tau > 0$.

O.E. $t_n \geq \tau$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $z_n := \phi_{t_n - \tau}^v x, n \in \mathbb{N}$. Da $z_n \in \gamma^+(x) \subset \overline{\gamma^+(x)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, gibt es eine konvergente Teilfolge $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_k z_{n_k} = \lim_k \phi_{t_{n_k} - \tau}^v x \in \omega(x).$$

Es folgt $\phi_\tau^v z = \lim_k \phi_\tau^v z_{n_k} = \lim_k \phi_\tau^v (\phi_{t_{n_k} - \tau}^v x) = y$. Also ist $y \in \phi_\tau^v \omega(x)$.

Zu b). Folgt aus Lemma 9.2 ii). ■

Folgerung 9.5

Sei $(v, V) \in \mathcal{S}^+, x \in V$. Gibt es $0 < t_1 < t_2$ mit $\phi_{t_1}^v x = \phi_{t_2}^v x$, so ist $\omega(x) = \gamma^+(z)$, wobei $t \mapsto \phi_t^v z$ eine periodische Lösung ist.

Beweis:

Sei $z := \phi_{t_1}^v x$. Offenbar ist $t \mapsto \phi_t^v z$ eine $(t_2 - t_1)$ -periodische Lösung. Wegen

$$z = \phi_{t_1}^v x = \phi_{n(t_2 - t_1)}^v (\phi_{t_1}^v x), n \in \mathbb{N},$$

gilt $z \in \omega(x)$. Da $\omega(x)$ abgeschlossen ist, gilt $\overline{\gamma^+(z)} \subset \omega(x)$. Also

$$\gamma^+(z) = \{\phi_s^v z \mid 0 \leq s \leq t_2 - t_1\} = \overline{\{\phi_s^v z \mid 0 \leq s \leq t_2 - t_1\}} = \overline{\gamma^+(z)} \subset \omega(x) = \omega(z) \subset \overline{\gamma^+(z)},$$

d.h. $\gamma^+(z) = \omega(x)$. ■

Definition 9.6

Sei $(v, V) \in \mathcal{S}^+$. Eine Teilmenge A von V heißt **minimal** genau dann, wenn gilt:

²Siehe etwa:

- i) $A \neq \emptyset$, abgeschlossen und invariant.
 ii) Ist $B \subset A, B \neq \emptyset$, abgeschlossen, invariant, so gilt $B = A$.

□

Satz 9.7

Sei $(v, V) \in \mathcal{S}^+$. Sei $K \subset V$ kompakt, $\neq \emptyset$, invariant. Dann gibt es eine minimale Menge $A \subset K$.

Beweis:

Sei $\mathcal{M} := \{B \subset V \mid B \neq \emptyset, \text{abgeschlossen, invariant}\}$. Da $K \in \mathcal{M}$ ist, ist \mathcal{M} nichtleer. Ordne \mathcal{M} mit der Inklusion. \mathcal{M} besitzt dann nach dem Lemma von Zorn ein minimales Element. ■

Beispiel 9.8 Betrachte das System

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(x^2 + y^2) \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ y' &= +x + y(x^2 + y^2) \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Beachte dabei $z^2 \sin \frac{\pi}{z} = 0$ für $z = 0$.

Der einzige Gleichgewichtspunkt ist $(0, 0)$. In Polarkoordinaten (r, γ) erhalten wir

$$r' = r^3 \sin \frac{\pi}{r}, \quad \gamma' = 1,$$

also

$$\begin{aligned} r' &> 0 \quad \text{für} \quad r > 1, \\ r' &< 0 \quad \text{für} \quad r \in \left(\frac{1}{2m}, \frac{1}{2m-1}\right), \quad m \in \mathbb{N}, \\ r' &> 0 \quad \text{für} \quad r \in \left(\frac{1}{2m+1}, \frac{1}{2m}\right), \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass die Kreise mit Radius $r = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, ω -Limesmengen sind, die einseitig anziehen bzw. abstoßen. □

9.2 Ebene autonome Systeme

Wir betrachten hier Systeme der Form

$$x'_1 = f(x_1, x_2), \quad x'_2 = g(x_1, x_2) \quad (9.1)$$

und setzen $v := (f, g)$ auf dem gemeinsamen Definitionsgebiet V von f, g . Stets sei vorausgesetzt

$$f, g \in C^1(V; \mathbb{R}) \quad (9.2)$$

Parallel zum System (9.1) werden wir die Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f(x_1, x_2)}{g(x_1, x_2)} \text{ bzw. } \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{g(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)} \quad (9.3)$$

betrachten. Man erhält diese Gleichungen formal aus (9.1), indem man die dortigen Gleichungen dividiert. In der Umgebung eines Punktes, der kein Gleichgewichtspunkt ist, lässt sich stets lokal eine der beiden Differentialgleichungen in (9.3) durch Umparametrisierung erreichen.

Eine Besonderheit, durch die sich die Untersuchung ebener autonomer Systeme auszeichnet, ist die Möglichkeit, den Jordanschen Kurvensatz verwenden zu können. Eine Jordan-Kurve J in \mathbb{R}^2 ist eine Kurve, zu der es eine Parameterdarstellung

$$j : [\alpha, \beta] \ni \tau \longmapsto (x_1(\tau), x_2(\tau)) \in \mathbb{R}^2$$

gibt mit

$$\text{Bild}(j) = J, \quad j(\alpha) = j(\beta), \quad j(\tau_1) \neq j(\tau_2), \quad \text{falls } \alpha \leq \tau_1 < \tau_2 \leq \beta.$$

Für Jordan-Kurven gilt der **Jordanscher Kurvensatz**:³

Sei J eine Jordan-Kurve. Dann gibt es offene, nichtleere, zusammenhängende Mengen G_1, G_2 mit:

- i) $\mathbb{R}^2 \setminus J = G_1 \cup G_2, G_1 \cap G_2 = \emptyset; \partial G_1 = \partial G_2 = J$ ($\partial \dots$ Rand von \dots);
- ii) G_1 („Innengebiet“) beschränkt, einfach zusammenhängend („zusammenziehbar“).

Definition 9.9

Das Bild Γ eines offenen Intervalls (τ_1, τ_2) unter einer Abbildung $\mathbb{R}^2 \ni \tau \longmapsto \tau L_0 + L_1 \in \mathbb{R}^2$ ($L_0, L_1 \in \mathbb{R}^2$), heißt eine **Transversale** zu (9.1), falls gilt:

$$\bar{\Gamma} \subset V; \det(L_0|v(x_1, x_2)) \neq 0 \text{ für alle } (x_1, x_2) \in \bar{\Gamma}.$$

□

Hat man eine Transversale Γ zu (9.1), so durchsetzen die Lösungen von (9.1) die Transversale (aus Stetigkeitsgründen) stets in eine Richtung.

Die lokalen, maximal definierten Lösungen bezeichnen wir wieder mit $x(\cdot; \xi)$, ξ Anfangswert.

Lemma 9.10

Sei Γ eine Transversale zu (9.1). Dann gilt:

- a) Ist $\xi \in \bar{\Gamma}$, so gibt es $\delta > 0$ derart, dass $x(t; \xi) \notin \bar{\Gamma}$ für $0 < |t| < \delta$.
- b) Ist $\xi \in \Gamma$, so gibt es $\epsilon > 0$ derart, dass es eine stetige Funktion $\sigma : B(\xi) \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $\sigma(\xi) = 0, \sigma(\bar{\xi}) \in [-\delta, \delta]$ für alle $\bar{\xi} \in \bar{B}_\epsilon(\xi)$ gibt.

³Siehe etwa: Fischer O., Funktionentheorie.

Beweis:

Zu a). Die Transversale Γ ist Teil einer Geraden $G : \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma = 0$. Nach Definition 9.9 ist $\alpha f(x_1, x_2) + \beta g(x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in \bar{\Gamma}$ entweder stets positiv oder stets negativ; o.E.

$$\alpha f(x_1, x_2) + \beta g(x_1, x_2) > 0 \text{ für alle } (x_1, x_2) \in \bar{\Gamma}.$$

Die Funktion $\lambda(\cdot; \bar{\xi})$, $\lambda(t; \bar{\xi}) := \alpha x_1(t; \bar{\xi}) + \beta x_2(t; \bar{\xi}) + \gamma$, ist für jedes $\bar{\xi} \in \bar{\Gamma}$ in einer Umgebung von $(0, \bar{\xi})$ definiert (lokale Lösbarkeit!), stetig und stetig partiell nach t differenzierbar. Es gilt:

$$\lambda(0; \bar{\xi}) = \alpha x_1(0; \bar{\xi}) + \beta x_2(0; \bar{\xi}) + \gamma = 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial t}(0; \bar{\xi}) = \alpha f(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) + \beta g(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) > 0. \quad (9.4)$$

Es gibt daher $\delta > 0$ mit

$$\lambda(t; \bar{\xi}) < 0, t \in (-\delta, 0), \quad \lambda(t; \bar{\xi}) > 0, t \in (0, \delta), \quad (9.5)$$

d.h. $x(t; \bar{\xi})$ liegt nicht auf G , falls $0 < |t| < \delta$.

Zu b). Wegen (9.4), (9.5) gibt es $\epsilon_1 > 0$ derart, dass

$$\lambda(-\delta; \tilde{\xi}) < 0, \quad \lambda(\delta; \tilde{\xi}) > 0 \quad \forall \tilde{\xi} \in \overline{B_{\epsilon_1}}(\xi), \quad \frac{\partial \lambda}{\partial t}(t; \tilde{\xi}) < 0 \quad \forall (t, \tilde{\xi}) \in [-\delta, -\delta] \times \overline{B_{\epsilon_1}}(\xi)$$

gilt. Sei nun $\tilde{\xi} \in \overline{B_{\epsilon_1}}(\xi)$. Im Intervall $[-\delta, \delta]$ gibt es genau ein $\sigma(\tilde{\xi})$ mit $\lambda(\sigma(\tilde{\xi}); \tilde{\xi}) = 0$. Da $x(\cdot; \cdot)$ in beiden Variablen stetig ist, ist auch $\sigma : \overline{B_{\epsilon_1}}(\xi) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. $\lambda(\sigma(\tilde{\xi}), \tilde{\xi}) = 0$ bedeutet, dass $x(\sigma(\tilde{\xi}); \tilde{\xi})$ auf der Geraden G liegt. Da $\xi \in \Gamma$ gilt, gibt es eine Umgebung von ξ auf der Geraden G , die ebenfalls zu Γ gehört. Also gilt $x(\sigma(\tilde{\xi}); \tilde{\xi}) \in \Gamma$ für $\tilde{\xi} \in B_\epsilon(\xi)$, $\epsilon \in (0, \epsilon_1)$ hinreichend klein. ■

Lemma 9.11

Sei Γ eine Transversale zu (9.1), sei $x(\cdot; \xi)$ eine Lösung und seien $t_1 < \dots < t_k$ mit $x(t_i; \xi) \in \Gamma$, $1 \leq i \leq k$. Dann gibt es eine Orientierung⁴ von Γ derart, dass durch $x(t_1), \dots, x(t_k)$ auch die Reihenfolge der $x(t_i; \xi)$ auf Γ gegeben ist.

Beweis:

Sei o.E. $k = 3$ und $x(t; \xi) \cap \Gamma = \emptyset$ für $t \in (t_1, t_2), (t_2, t_3)$. Setze $\xi_i := x(t_i; \xi)$, $1 \leq i \leq 3$. Orientiere so, dass $\xi_2 > \xi_1$ gilt (ξ_1 kommt vor ξ_2). Wir setzen

$$\Gamma_1 := \{\xi \in \Gamma \mid \xi < \xi_1\}, \quad \Gamma_2 := \{\xi \in \Gamma \mid \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2\}, \quad \Gamma_3 := \{\xi \in \Gamma \mid \xi > \xi_2\},$$

und betrachten die Jordan-Kurve J , die aus den „Stücken“

$$x(t; \xi), t_1 \leq t \leq t_2, \quad \Gamma_2 \text{ durchlaufen entgegen der Orientierung,}$$

ableitbar ist. Dadurch wird \mathbb{R}^2 in zwei Gebiete (offene zusammenhängende Mengen) G_1, G_2 , dem Jordanschen Kurvensatz entsprechend, zerlegt. Wir zeigen:

Γ_3 und $\{x(t; \xi) \mid t > t_2\}$ liegen in demselben der beiden Gebiete, Γ_1, Γ_3 liegen in verschiedenen Gebieten.

Die Aussage des Lemmas folgt dann daraus. Sei $U := B_r(\xi_2)$, wobei r so klein sei, dass U durch J in zwei Gebiete U_1, U_2 zerlegt wird. Da U_1, U_2 bogenweise zusammenhängend sind, können wir die Bezeichnung so wählen, dass $U_1 \subset G_1, U_2 \subset G_2$ gilt.

⁴Mittels der Parameterdarstellung für Γ (siehe Definition ??) können wir Γ eine Orientierung aufprägen; wir haben offenbar zwei Möglichkeiten.

- 1) Ist $\tilde{\xi} \in \Gamma, \tilde{\xi} < \xi_2$, so gibt es $t < 0$ mit $x(s; \tilde{\xi}) \in G_1, s \in (t, 0)$.
Dies folgt aus der Tatsache, dass $x(-t, \tilde{\xi})$ für hinreichend kleines $t < 0$ parallel zu Γ mit einem Punkt in U_1 verbunden werden kann.
- 2) Ist $\tilde{\xi} \in \Gamma, \tilde{\xi} > \xi_1$, so ergibt es $t > 0$ mit $x(s; \tilde{\xi}) \in G_2, s \in (0, t)$.
Begründung: siehe oben.

Aus 1): $\Gamma \subset G_1$. Aus 2): $\Gamma_3 \subset G_2$. Aus der Wahl von U_2 folgt: Es gibt $t > t_2$ mit $x(t; \xi) \in U_2 \subset G_2$.

Annahme: Es gibt $t^* > t_2$ mit $x(t^*, \xi) \in J, x(t; \xi) \in G_2$ für $t \in (t_2, t^*)$. (Beachte: $\partial G_1 = \partial G_2 = J$).

1. Fall: $x(t^*; \xi) \in \Gamma, \xi_1 < x(t^*, \xi) < \xi_2$. Wegen $x(t; \xi) = x(t - t^*; x(t^*; \xi)), t < t^*$, haben wir einen Widerspruch zu 1).

2. Fall: $x(t^*; \xi) = x(\tilde{t}, \xi)$ für ein $\tilde{t} \in [t_1, t_2]$. Die Lösung ist also periodisch und $\gamma^+(\xi) = \{x(s; \xi) | \tilde{t} \leq s \leq t^*\}$. Aus $x(t; \xi) \in G_2, t \in (t_2, t^*), x(t^*, \xi) \in J$, folgt $\gamma^+(\xi) \in G_2$, d.h. $\gamma^+(\xi) \cap G_1 = \emptyset$. Dies ist im Widerspruch zu 1) (Beachte: $x(t; \xi) = x(t - t_1; x(t_1; \xi)) = x(t - t_1; \xi_1)$). Also ist auch gezeigt: $x(t; \xi) \in G_2$ für alle $t > t_2$. ■

Folgerung 9.12

Sei $\eta \in V$ und sei Γ eine beschränkte Transversale zu (9.1). Sei $x(\cdot; \eta)$ auf $[0, \infty)$ definiert.

a) Es gilt entweder

$$x(t; \eta) \notin \Gamma \text{ für alle } t \geq 0$$

oder es existiert eine (endliche oder unendliche) Folge $t_1 < t_2 < \dots$, die keine Häufungspunkte besitzt, derart, dass

$$x(t_k; \eta) \in \Gamma, k \in \mathbb{N}, x(t; \eta) \notin \Gamma \text{ für } t \neq t_k, k \in \mathbb{N}.$$

b) Ist $\bar{\eta} \in \omega(\eta) \cap \Gamma$, so ist die Folge $t_1 < t_2 < \dots$ in a) unendlich und $(x(t_k; \eta))_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\bar{\eta}$; insbesondere ist $\omega(\eta) \cap \Gamma = \{\bar{\eta}\}$.

Beweis:

Zu a). Sei $T := \{t \geq 0 | x(t; \eta) \in \bar{\Gamma}\}$. T ist abgeschlossen und hat wegen Lemma 9.10 a) keine Häufigkeitspunkte. Daher ist T entweder leer oder enthält als Teilmenge der beschränkten Menge Γ höchstens abzählbar viele Elemente. Entfernt man aus T diejenigen Elemente t , für die $x(t; \eta)$ Endpunkt von $\bar{\Gamma}$ ist, so bleibt eine Menge mit denselben Eigenschaften.

Zu b). Sei $\bar{\eta} \in \omega(\eta) \cap \Gamma$. Dann gibt es eine Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_n s_n = \infty, \lim_n x(s_n; \eta) = \bar{\eta}$. Nach Lemma 9.10 gibt es $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für jedes $n \geq N$ ein $\delta_n = \sigma(x(s_n; \eta))$ existiert mit $x(s_n + \delta_n; \eta) = x(\delta_n; x(s_n; \eta)) \in \Gamma$. Es gilt $\lim_n \delta_n = 0$, da σ stetig ist, und $\lim_n x(s_n; \eta) = \bar{\eta}, \sigma(\bar{\eta}) = 0$ ist. Also gilt

$$\lim_n (s_n + \delta_n) = \infty, \lim_n x(s_n + \delta_n; \eta) = \bar{\eta}, x(s_n + \delta_n; \eta) \in \Gamma \forall n \geq N, \tag{9.6}$$

und die Folge in a) ist unendlich. Da Γ beschränkt ist, enthält $(x(t_k; \eta))_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x(t_{k_l}; \eta))_{k_l \in \mathbb{N}}$. Wegen (9.6) $\lim_l x(t_{k_l}; \eta) = \bar{\eta}$. Da die Folge $(x(t_k; \eta))_{k \in \mathbb{N}}$ auf Γ monoton ist (9.10), konvergiert sogar $(x(t_k; \eta))_{k \in \mathbb{N}}$ gegen $\bar{\eta}$. Da der Limes von $(x(t_k; \eta))_{k \in \mathbb{N}}$ eindeutig bestimmt ist, muss $\omega(\eta) \cap \Gamma = \{\bar{\eta}\}$ gelten. ■

Satz 9.13 (Poincaré–Bendixon)

Sei $\gamma^+(\xi)$ ein beschränkter positiver Orbit, $\xi \in V$. Enthält $\omega(\xi)$ keinen Gleichgewichtspunkt, so gilt entweder

$$\gamma^+(\xi) \text{ ist periodischer Orbit und } \gamma^+(\xi) = \omega(\xi)$$

oder es gibt $z \in \omega(\xi)$ derart, dass

$$\gamma^+(z) \text{ ist periodischer Orbit, } \gamma^+(z) = \omega(\xi).$$

Beweis:

Offenbar ist $\overline{\gamma^+(\xi)}$ kompakt. Aus Satz 9.4 wissen wir: $\omega(\xi) \neq \emptyset$, kompakt, zusammenhängend, stark invariant. Ist $\gamma(\xi)$ periodischer Orbit, so gilt offenbar $\omega(\xi) = \gamma^+(\xi)$. Sei $\eta \in \omega(\xi)$. Dann ist $x(\cdot; \eta)$ auf $(-\infty, \infty)$ definiert und es gilt $\gamma^+(\eta) \subset \omega(\xi)$, $\omega(\xi) \subset \omega(\xi)$. η ist kein Gleichgewichtspunkt. Also gibt es eine beschränkte Transversale durch η . Nun tritt die zweite Alternative in Folgerung 9.12 ein:

$$t_1 < t_2 < \dots; x(t_n; \eta) \in \Gamma \cap \omega(\xi), n \in \mathbb{N}.$$

Wäre η kein periodischer Punkt, so wären $x(t_n; \eta), n \in \mathbb{N}$, verschiedene Punkte in $\omega(\xi) \cap \Gamma$. Dies ist nach Folgerung 9.12 ausgeschlossen. Also etwa $x(t_n; \eta) = x(t_m; \eta), t_n > t_m$. Dann ist $x(\cdot; \eta)$ periodische Lösung mit Periode $t_n - t_m$, die nicht konstant ist, da η kein Gleichgewichtspunkt ist. Also liegt der periodische Punkt $\gamma^+(\eta)$ in $\omega(\xi)$, da $\omega(\xi)$ stark invariant ist. Wir zeigen: $\gamma^+(\eta) = \omega(\xi)$, d.h. $\omega(\xi) \setminus \gamma^+(\eta) = \emptyset$.

Annahme: $\omega(\xi) \setminus \gamma^+(\eta) \neq \emptyset$.

Da $\omega(\xi)$ zusammenhängend ist, kann $\omega(\xi) \setminus \gamma^+(\eta)$ nicht abgeschlossen sein. Also gibt es einen Häufungspunkt $\bar{\eta} \in \gamma^+(\eta)$ von $\omega(\xi) \setminus \gamma^+(\eta)$; $\bar{\eta} = \lim_n \xi_n$ mit $\xi_n \in \omega(\xi) \setminus \gamma^+(\eta), n \in \mathbb{N}$. Da $\omega(\xi)$ abgeschlossen ist, gilt $\bar{\eta} \in \omega(\xi)$, d.h. $\bar{\eta}$ ist kein Gleichgewichtspunkt. Also gibt es eine beschränkte Transversale Γ durch $\bar{\eta}$. Wähle ξ_n derart, dass $\gamma^+(\xi_n) \cap \Gamma \neq \emptyset$ ist; dies ist möglich, da $\lim_n \xi_n = \bar{\eta}$ kein Gleichgewichtspunkt ist. Also etwa $x(t^*; \xi_n) \in \Gamma, t^* \in \mathbb{R}$. Da $\omega(\xi)$ stark invariant ist, ist $\gamma^+(\xi_n) \subset \omega(\xi)$. Aus Folgerung 9.12 folgt $\eta = x(t^*; \xi_n)$. Nun folgt $\gamma^+(\xi_n) = \gamma^+(\eta)$. Aus $\xi_n \neq \gamma^+(\eta)$ erhalten wir einen Widerspruch. ■

Tritt in Satz 9.13 die zweite Alternative ein und ist $\gamma^+(\xi)$ selbst kein periodischer Orbit, so heißt $\omega(\xi)$ **Limeszyklus**. Das 16. Hilbertsche Problem ist die Frage, wieviele Limeszyklen ein polynomiales Vektorfeld zuläßt.

Anschaulich bedeutet der Satz von Poincaré–Bendixon: Eine in einer ω -Limesmenge enthaltene nicht-periodische Lösung beginnt und endet in je einem Gleichgewichtspunkt. Diese beiden Punkte, die auch zusammenfallen können, gehören als Häufungspunkte eines Orbits wieder zur ω -Limesmenge.

Folgerung 9.14

Sei $\gamma^+(\xi)$ ein beschränkter, positiver, nicht periodischer Orbit, $\xi \in V$. Enthält $\omega(\xi)$ keinen Gleichgewichtspunkt, so gibt es $z \in \omega(\xi)$ derart, dass gilt:

i) $\gamma^+(z) = \omega(\xi), x(\cdot; z)$ ist periodisch mit Periode $T > 0$.

ii) Es gibt eine strikt monoton wachsende Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[0, \infty)$ mit $\lim_n (t_{n+1} - t_n) = T$ und $\lim_n x(\cdot + t_n; \xi) = x(\cdot; z)$ gleichmäßig auf $[0, T]$.

Beweis:

i) ist in Satz 9.13 gezeigt. Beachte dabei $T > 0$, da $\omega(\xi)$ keinen Gleichgewichtspunkt enthält.

Zu ii) Sei Γ eine Transversale durch z . Aus Folgerung 9.12 folgt die Existenz einer strikt monoton wachsenden Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ derart, dass gilt:

$$x(t_k; \xi) \in \Gamma, k \in \mathbb{N}, x(t; \xi) \notin \Gamma, \text{ falls } t \neq t_k, k \in \mathbb{N}, \lim_k x(t_k; \xi) = z.$$

Da die Konvergenz bei $\lim_k x(t_k; \xi) = z$ „monoton“ ist, ist die Konvergenz von $(x(\cdot + t_n; \xi))_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf jedem beschränkten Intervall $[0, T']$, $T' > 0$. Insbesondere: $\lim_n x(T + t_n; \xi) = x(T; z) = z$. Sei $\epsilon > 0$ und sei $r < 0$ mit $\overline{B_r}(z) \subset V$. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $x(t_{n+1}; \xi), x(t_n + T; \xi) \in \overline{B_r}(z)$ folgt (Mittelwertsatz)

$$|x(t_{n+1}; \xi) - x(t_n + T; \xi)| \geq M |t_{n+1} - (t_n + T)|$$

mit $M > 0$, da z kein Gleichgewichtspunkt ist. Schließlich:

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N (t_{n+1} \in [t_n + T - \epsilon, t_n + T + \epsilon]).$$

■

Wir schließen ab mit einem negativen Kriterium für periodische Lösungen für (9.1)

Satz 9.15 (Bendixon)

Sei $D \subset V$ offen mit $\overline{D} \subset V$. Sei D von einer C^1 -Jordan-Kurve J berandet (D ist Innengebiet zu J). Hat die Divergenz des Vektorfeldes $v := (f, g)$ in D konstantes Vorzeichen, so kann (9.1) keine periodische Lösung besitzen, die ganz in D liegt.

Beweis:

Sei $\xi \in D$ mit $x(t + T; \xi) = x(t; \xi) \in D$ für alle $t \geq 0$. Aus dem Gaußschen Integralsatz⁵ folgt

$$\int_G \nabla v dz = \int_{\partial G} \partial_v v d\sigma = \int_0^T \left\langle v(x(t; \xi)), \frac{(x'_2(t; \xi), -x'_1(t; \xi))}{\sqrt{x'_1(t; \xi)^2 + x'_2(t; \xi)^2}} \right\rangle dt = 0.$$

Also kann ∇v nicht konstantes Vorzeichen haben. ■

Beispiel 9.16 Betrachte einen nichtlinearen „Oszillator“ mit Dämpfung

$$x'' + p(x)x' + q(x) = 0 \tag{9.7}$$

Voraussetzung : $p, q \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ mit $p(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Als System haben wir

$$x'_1 = x_2, x'_2 = -q(x_1) - p(x_1)x_2$$

Die Divergenz des zugehörigen Vektorfeldes ist gegeben durch $-p$. Also kann (??) (unabhängig von q) kein periodische Lösung haben. Im folgenden Abschnitt schauen wir etwas genauer hin. □

⁵Siehe etwa Forster, O., Analysis III

9.3 Die Lienardsche Differentialgleichung

Wir betrachten

$$x'' + p(x)x' + x = 0 \quad (9.8)$$

und setzen generell voraus:

- i) $p \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$
- ii) $\mathbb{R} \ni x \rightarrow F(x) := \int_0^x p(s)ds \in \mathbb{R}$ ist ungerade, d.h. $F(x) = -F(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$ und es gibt $\beta > 0$ derart, dass F auf $[\beta, \infty)$ monoton wachsend ist.
- iv) Es gibt $\alpha > 0$ derart, dass $F(x) < 0, x \in (0, \alpha)$.

Das „typisches“ Aussehen von F ist in Abbildung 9.1 wiedergegeben.

Ist $t \mapsto x(t)$ eine Lösung von (9.8), so gilt

$$\frac{d}{dt}(x'(t) + F(x(t))) + x(t) = 0.$$

Also ist (9.8) äquivalent mit dem System

$$x'_1 = x_2 - F(x_1), \quad x'_2 = -x_1, \quad (9.9)$$

wobei $x_1 := x, x_2 := x' + F(x)$ gesetzt ist. Wir zeigen:

- a) (9.9) besitzt mindestens eine periodische Lösung
- b) Ist $\alpha = \beta$, so gibt es genau eine periodische Lösung und diese Lösung ist ω -Limesmenge aller Orbits mit Ausnahme der Ruhelage in $(0, 0)$.

Klar: (9.9) besitzt $(0, 0)$ als einzigen Gleichgewichtspunkt. Die Eigenwerte zur Linearisierung von (9.9) in $(0, 0)$ sind:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2}p(0) \pm \frac{1}{2}\sqrt{p(0)^2 - 4}$$

Also folgt $\operatorname{Re}\lambda_{1/2} > 0$, d.h. die Ruhelage „abstoßend“.

Sei $z := \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$. Wir erhalten:

$$\phi' = -x_1 F(x_1) \quad (9.10)$$

entlang einer Lösung. Daraus lesen wir ab:

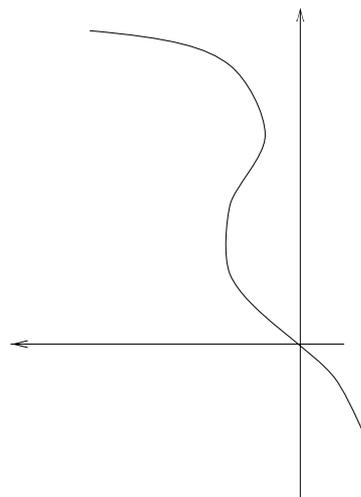


Abbildung 9.1: Aussehen von F

Keine Lösung, die auf einem Kreis mit Radius $r_0 \in (0, \alpha)$ startet, tritt in diesen Kreis ein. (Dies ist verträglich mit dem abstoßenden Charakter von $(0, 0)$.)

Da das System (9.9) durch „Spiegelung“ an $(0, 0)$ in sich übergeht, genügt es nun das System (9.9) in der echten Halbebene zu betrachten. Unter Verwendung der Differentialgleichung

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{x_2 - F(x_1)} \quad (9.11)$$

kann man zeigen, dass für η_0 genügend groß, gilt: $|\eta_1| < \eta_0$. Man zeigt, dass

$$z(\eta_1) - z(\eta_0) = \int_{ABECD} \rho'(s) ds < 0$$

Dann ist das Innengebiet von $ABECD A' B' E' C' D'$ invariant. Nun ist Satz 9.15 anwendbar; a) ist damit gezeigt.

Der Fall $\alpha = \beta$;

Startet ein Orbit in $A_1(0, \eta_1)$ und schneidet dieser Orbit die x_1 -Achse in $E_1(v_1, 0)$ mit $0 < v_1 < \alpha$, so ist $\rho(0, \eta_1) - \rho(0, \zeta_1) = \int_{A_1 E_1 D_1} \rho'(s) ds > 0$, da $F(x) < 0, x \in (0, \alpha)$, gilt.

Also kann es keinen periodischen Orbit geben, der die x_1 -Achse in einem $E_1(v_1, 0)$ mit $v_1 \in (0, \alpha)$ schneidet.

Startet ein Orbit in $A_2(0, \eta_2)$ und schneidet dieser Orbit die x_1 -Achse in $E_2(0, v_2)$ mit $v_2 > \alpha$, so ist

$$0 > \rho(0, \eta_2) - \rho(0, \xi_2) = \int_{A_2, B_2} \rho'(s) ds + \int_{C_2 D_2} \rho'(s) ds + \int_{B_2 E_2 C_2} \rho'(s) ds$$

für η_2 genügend groß. Also gibt es aus Monotoniegründen genau ein η_2 mit $\phi(0, \eta_2) = \phi(0, \xi_2)$. Dies ist der gesuchte periodische Orbit. Damit ist b) gezeigt.

Die skizzierten Beweisschritte zeigen, dass die Anwendung des Satzes von Poincaré-Bendixon, der auf tiefliegenden Überlegungen beruht, nicht einfach, aber elementar ist. Mit der obigen Problemklasse wird auch die van der Polsche Differentialgleichung erfasst:

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0.$$

Man wähle

$$p(x) = \mu(x^2 - 1), F(x) := \mu\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right), x \in \mathbb{R}.$$

und findet den Fall

$$\alpha = \beta = \sqrt{3}$$

vor. Also hat die van der Polsche Differentialgleichung genau einen Limeszyklus.

9.4 Stabilität

Wir betrachten ein nichtautonomes System:

$$x' = v(t, x) \quad (9.12)$$

wobei $v \in C^1(\mathbb{R} \times V; \mathbb{R}^n)$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die lokale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (9.12) bei vorgegebenem Anfangswerten

$$x(t_0) = \xi \quad (t_0 \in \mathbb{R}, \xi \in V) \quad (9.13)$$

ist Ergebnis des Banachschen Fixpunktsatzes, die globale Lösbarkeit ist mit einem Kompaktheitsargument anzugehen.

Bezeichnung Eine Lösung von (9.12), (9.13) auf $[t_0, \tau)$, $\tau > t_0$, bezeichnen wir meist mit $x(\cdot; t_0, \xi)$.

Definition 9.17

Sei $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (9.12).

- x heißt **stabil**, wenn für alle $\epsilon > 0$ und für alle $t_0 > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so dass für alle $\xi \in V$ mit $|\xi - x(t_0)| < \delta$ gilt: $x(\cdot; t_0, \xi)$ ist definiert auf $[t_0, \infty)$ und $|x(t, t_0, \xi) - x(t)| \leq \epsilon$ für alle $t \geq t_0$. Anderenfalls heißt x **instabil**.
- Ist δ in *a*) unabhängig von t_0 wählbar, so heißt x **gleichmäßig stabil**.
- x heißt **asymptotisch stabil**, wenn x stabil ist und wenn zusätzlich gilt:

$$\forall t_0 > 0 \exists \eta > 0 \forall \xi \in V (|\xi - x(t_0)| < \eta \implies x(\cdot; t_0, \xi) \text{ ist definiert auf } [t_0, \infty), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t; t_0, \xi) - x(t)| = 0).$$

□

Im Auge haben wir die Frage nach der Stabilität von Ruhelagen ($x \equiv \theta$) und periodischen Lösungen ($x(t+T) = x(t)$ für alle $t \geq 0$; $T > 0$ Periode).

Beispiel 9.18 Betrachte das System

$$x_1' = -x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad x_2' = x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (9.14)$$

In Polarkoordinaten (r, ϑ) :

$$r' = 0, \quad \vartheta' = r. \quad (9.15)$$

(Die DGL in Polarkoordinaten steht am Anfang, sie ist zur „Verschleierung“ in kartesische Koordinaten umgeschrieben.) Als Lösungen von 9.15 haben wir

$$r(t) = r_0, \quad \vartheta(t) = r_0 t + \vartheta_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (r_0, \vartheta_0 \in \mathbb{R}).$$

Dies ergibt für (9.14) die Lösungen

$$x_1(t) = r_0 \cos(r_0 t + \vartheta_0), \quad x_2(t) = r_0 \sin(r_0 t + \vartheta_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Also sind die Lösungen von (9.14) periodisch mit Periode $\frac{2\pi}{r_0}$. Man sieht, dass mit Ausnahme der Ruhelage ($r_0 = 0, \vartheta_0 = 0$), alle Lösungen instabil sind, da die Umlaufgeschwindigkeit für verschiedene Lösungen verschieden ist. Man beachte aber, dass die Lösungskurven in \mathbb{R}^2 „benachbart“ sind, wenn die Anfangswerte benachbart sind. □

Innerhalb der Stabilitätstheorie spielen die autonomen und periodischen Differentialgleichungen eine Sonderrolle. Das Beispiel 9.18 zeigt dies für autonome Differentialgleichungen, für periodische DGLen wird dies klar aus folgender Überlegung: Ist v in (9.12) autonom und ist x eine Lösung mit Periode $T > 0$, so wird offenbar durch die Verschiebung $x(\cdot + \tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, eine Schar von T -periodischen Lösungen von (9.12) definiert. Die Lösung $x(\cdot)$ kann nicht asymptotisch stabil sein, da für kein $\tau \neq 0$ gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t + \tau) - x(t)| = 0.$$

Die Definition von Stabilität, die bei autonomen DGLen für periodische Lösungen angemessen ist, folgt später. Man beachte, dass Kandidaten für solche periodische Lösungen, die Limeszyklen sind.

Wir betrachten nun den periodischen Spezialfall von (9.12):

$$x' = v(t, x) \tag{9.16}$$

Also setzen wir voraus: $v \in C^1(\mathbb{R} \times V; \mathbb{R}^n)$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, v T -periodisch, d.h. $v(t + T; x) = v(t, x)$ für alle $t \in \mathbb{R}, x \in V$.

Sei $\bar{x} : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine T -periodische Lösung von (9.16), d.h. $\bar{x}(t + T) = \bar{x}(t)$ $t \in \mathbb{R}$. Wir wollen die Stabilität von \bar{x} mit Hilfe der Linearisierung von (9.16) entlang \bar{x} untersuchen, Wir haben dazu die Differentialgleichung

$$y' = A(t)y + g(t, y) \tag{9.17}$$

zu betrachten mit

$$A(t) := \frac{\partial v}{\partial x}(t, \bar{x}), t \in \mathbb{R},$$

$$G(t, y) := v(t, y + \bar{x}(t)) - v(t, \bar{x}(t)) - \frac{\partial v}{\partial x}(t, \bar{x}(t))y, (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \text{ mit } y + \bar{x}(t) \in V.$$

Da \bar{x} und $v(\cdot, x)$ T -periodisch sind, ist die Systemmatrix $A(\cdot)$ des homogenen Systems

$$y' = A(t)y \tag{9.18}$$

ebenfalls T -periodisch. Damit sind die Floquet-Multiplikatoren von $A(\cdot)$ wohldefiniert (siehe Abschnitt 2.7).

Satz 9.19 (Floquet)

Für die Floquet-Multiplikatoren $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}$ von $A(t) := \frac{\partial v}{\partial x}(t, \bar{x}(t)), t \in \mathbb{R}$, gelte:

$$|\mu_i| < 1, 1 \leq i \leq n.$$

Dann ist \bar{x} asymptotisch stabil.

Beweis:

Sei Φ die Fundamentalmatrix zu (9.18) mit $\Phi(0) = Id$. Wir wissen aus Satz 2.18, dass es $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n,n}, R \in \mathbb{C}^{n,n}$ gibt mit

$$\Phi(t) = P(t)e^{Rt}, t \in \mathbb{R}, P(t + T) = P(t), t \in \mathbb{R},$$

und μ_1, \dots, μ_n sind die Eigenwerte von e^{RT} . Also hat R Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda_i < 0, 1 \leq i \leq n$. Betrachte

$$z' = Rz + P(t)^{-1}g(t, P(t)z). \quad (9.19)$$

Offenbar hängen die Lösungen von (9.19) mit (9.17) mittels der Transformation

$$y(t) := P(t)z(t) \quad t \in \mathbb{R}, \quad (9.20)$$

zusammen. Da $\lim_{|y| \rightarrow 0} \frac{|g(t, y)|}{|y|} = 0$ gleichmäßig in t gilt, ist die Ruhelage $z \equiv \theta$ von (9.19) asymptotisch stabil (Übertrage dazu den Beweis zu Satz 3.14). Daraus folgt, wegen (9.19) sofort, dass die Ruhelage $y \equiv \theta$ von (9.17) asymptotisch stabil ist und die periodische Lösung \bar{x} im Sinne von Definition 9.17 asymptotisch stabil ist. ■

Nach den eingangs gemachten Beobachtungen ist es sinnvoll, bei autonomen Systemen Stabilität anders zu definieren. Dazu betrachten wir statt (9.12)

$$x' = v(x) \quad (9.21)$$

wobei $v \in C^1(V; \mathbb{R}^n), V \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Definition 9.20

Sei $\xi \in V$ und sei die Lösung $x(\cdot, \xi)$ von (9.21) auf $[0, \infty)$ definiert.

a) $x(\cdot; \xi)$ heißt **orbital stabil** (oder $\gamma^+(\xi)$ heißt stabil), wenn gilt:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \eta \in V (\operatorname{dist}(\eta, \gamma^+(\xi)) < \delta \implies \operatorname{dist}(x(t; \eta), \gamma^+(\xi)) < \varepsilon \text{ für alle } t \geq 0).$$

b) $x(\cdot; \xi)$ heißt **asymptotisch orbital stabil** (oder $\gamma^+(\xi)$ heißt stabil), wenn gilt:

i) $\gamma^+(\xi)$ ist stabil;

$$\text{ii) } \exists \delta_1 > 0 \forall \eta \in V (\operatorname{dist}(\eta, \gamma^+(\xi)) < \delta_1 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{dist}(x(t; \xi), \gamma^+(\xi)) = 0).$$

□

Sei $\bar{x}(\cdot) := x(\cdot; \xi)$ eine T -periodische Lösung von (9.21). Dann gilt:

$$\bar{x}'(t) = v(\bar{x}(t)), \quad \bar{x}''(t) = dv(\bar{x}(t))\bar{x}'(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

d.h. $\bar{y} := \bar{x}'$ ist T -periodische Lösung von $y' = A(t)y$ mit $A(t) := dv(\bar{x}(t)), t \in \mathbb{R}$. Daraus folgt mit der Fundamentalmatrix $\Phi(t) := P(t)e^{RT}$, $t \in \mathbb{R}$ (siehe Satz 2.18) ($P(0) = id!$) schließlich

$$\bar{x}'(t) = P(t)e^{RT}\bar{x}'(0), \quad \text{d.h. } \bar{x}'(0) = \bar{x}'(T) = e^{RT}\bar{x}'(0).$$

Also ist $\bar{x}'(0)$ ein Fixpunkt von e^{RT} . Dies bedeutet, dass mindestens ein Floquet-Multiplikator den Betrag 1 hat. Bezüglich orbitaler Stabilität „stört“ uns ein Multiplikator vom Betrag 1 nicht, wenn er nur entlang der Lösung wirkt: er bewirkt dann nur die eingangs erwähnte Phasenverschiebung benachbarter periodischer Orbits. Alle anderen Multiplikatoren sollten vom Betrag kleiner 1 sein, um asymptotisch orbitale Stabilität zu implizieren.

Satz 9.21

Sei \bar{x} eine nicht-konstante T -periodische Lösung von (9.21), seien μ_1, \dots, μ_n die Floquet-Multiplikatoren von $A(t) := dv(\bar{x}(t)), t \in \mathbb{R}$, und es gelte $|\mu_i| < 1, 1 \leq i \leq n-1, |\mu_n| = 1$. Dann ist \bar{x} asymptotisch orbital stabil.

Beweis: ■

9.5 Stabilität periodischer Lösungen

Die qualitative Untersuchung von Systemen mit periodischen Lösungen erfordert eine gekonnte Behandlung des autonomen und der nicht autonomen Falles. Wir wollen uns zunächst dem nichtautonomen Fall zuwenden.

Sei $f \in C^1(\mathbb{R} \times D, \mathbb{R}^n), D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei f T -riodisch, d.h. $f(t + T, x) = f(t, x)$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times D$.

Sei $p : \mathbb{R} \rightarrow D$ eine periodische Lösung von

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{9.22}$$

$\gamma := p(\mathbb{R})$ sei der Orbit von p . Wie immer: $x(\cdot; t_0, x_0)$ ist die globale Lösung von (9.22) mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$.

Definition 9.22

i) p heißt **Ljapunov-stabil** : \iff

$$\forall t_0 \in \mathbb{R} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_0 \in K(p(t_0), \delta) \forall t \geq t_0 (|x(t; t_0, x_0) - p(t)| < \epsilon)$$

ii) p heisst **asymptotisch Ljapunov-stabil** : \iff

$$p \text{ ist Ljapunov-stabil und } \forall t_0 \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x_0 \in K(p(t_0), \delta) (\lim_{t \rightarrow \infty} (|p(t) - x(t; t_0, x_0)|) = 0)$$

□

Man sieht sofort, dass im autonomen Fall eine periodische Lösung nie asymptotisch Lyopanov-stabil sein kann.

Analog zur Untersuchung von Gleichgewichtslösungen kann man in folgender Weise eine Linearisierung vornehmen: Offenbar ist x genau dann eine Lösung von (9.22), wenn $y := x - p$ Lösung von

$$\dot{y} = A(t)y + g(t, y) \tag{9.23}$$

ist, wobei

$$\begin{aligned} A(t) &:= d_x f(t, p(t)) - f(t, p(t)) - d_x f(t, p(t))y, \\ g(t, y) &:= f(t, y + p(t)) - f(t, p(t)) - d_x f(t, p(t))y, \\ (t, y) &\in \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \overset{n}{\mathbb{R}} \mid y + p(t) \in D\} \end{aligned}$$

Man rechnet nach: $\lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{|g(t, y)|}{|y|} = 0$ gleichmässig in t . Ohne Beweis geben wir den folgenden wichtigen Satz von Floquet an:

Satz 9.23

Sei $T > 0$, $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n,n})$ T -periodisch, $\Phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n,n})$ Fundamentalsystem von $\dot{x} = A(t)x$. Dann gibt es eine T -periodische Abbildung $P \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n,n})$ und $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit

$$\Phi(t) = P(t)R^{Bt} \text{ f\u00fcr alle } t \in \mathbb{R}.$$

Mit den obigen Bezeichnungen hei\u00dft der durch $C := R^{BT} = \Phi^{-1}(0)\Phi(T)$ bestimmte Operator **Monodromieoperator** von Φ . Man rechnet nach, dass die Monodromieoperatoren zweier Fundamentalsysteme zueinander konjugiert sind. Damit sind seine Eigenwerte, und damit auch die Eigenwerte von B nur durch A festgelegt und heissen Floquetmultiplikatoren von A . Die Eigenwerte von B heissen Floquetexponenten von A . Ist γ Floquetmultiplikator, dann gibt es einen Floquetexponenten von λ mit $\gamma = e^{\lambda T}$. Umgekehrt ist eine Zahl $e^{\lambda T}$ Floquetmultiplikator, falls λ Floquetexponent ist. Man sieht, dass sich so n linear unabh\u00e4ngige L\u00f6sungen der Form

$$v_i(t) = p_i(t)e^{\lambda_i t} \cdot q_i(t), 1 \leq i \leq n,$$

gewinnen lassen, wobei jedes p_i T -periodisch und jedes q_i ein Polynom ist. Folglich bestimmt der Realteil der Floquetexponenten bzw. der Betrag der Floquetmultiplikatoren das L\u00f6sungsverhalten. Doch bleibt (unter Voraussetzungen) auch im gest\u00f6rten Fall 1.2 richtig und \u00fcbertr\u00e4gt sich so auf 1.1.

Satz 9.24

A habe Floquetmultiplikatoren von Betrag < 1 . Dann ist p asymptotisch Ljapunov-stabil.

Beweis:

Zu zeigen ist die asymptotische Stabilit\u00e4t der Nulll\u00f6sung von Gleichung 1.2 Sei Φ Fundamentalsystem von $\dot{y} = A(t)y$.

Nach dem Satz von Floquet gibt es $P \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n,m})$, $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $\theta(t) = P(t)e^{Bt}$, $t \in \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung hat B nur Eigenwerte mit Realteil < 0 . Betrachte:

$$\dot{z} = Bz + P^{-1}(t)g(t, P(t)z) \quad (9.24)$$

Man rechnet nach: $\lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{P^{-1}(t)g(t, P(t)z)}{|z|} = 0$ gleichm\u00e4ssig in $t \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz von

Poincar\u00e9-Ljapunov (???) ist die Nulll\u00f6sung von (1.3) asymptotisch stabil.

Behauptung : y l\u00f6st (1.2) $\iff z := P^{-1}(\cdot)y$ l\u00f6st (1.3)

Beweis der Behauptung: Aus

$$\dot{P}(t) = \dot{\Phi}(t)e^{Bt} - \Phi(t)e^{-Bt}B = A(t)P(t) - P(t)B \text{ und } \dot{P}^{-1}(t)P(t) = -P^{-1}(t)\dot{P}(t)$$

folgt

$$B = P^{-1}(t)a(t)P(t) + \dot{P}^{-1}(t)P(t), t \in \mathbb{R}.$$

\implies

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \dot{P}^{-1}(t)y(t) + P^{-1}(t)\dot{y}(t) \\ &= \dot{P}^{-1}(t)P(t)z(t) + P^{-1}(t)(A(t)P(t)z(t) + g(t, P(t)z(t))) \\ &= Bz(t) + P^{-1}(t)g(t, P(t)z(t)), t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

⇒

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \dot{P}(t)z(t) + P(t)\dot{z}(t) \\ &= \dot{P}(t)P^{-1}(t)y(t) + P(t)(P^{-1}(t)A(t)y(t) + \dot{P}^{-1}(t)y(t) + P^{-1}(t)g(t, y(t))) \\ &= A(t)y(t) + g(t, y(t)), t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sei nun $\epsilon > 0, t_0 \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $\hat{\delta} > 0$, so dass, falls z Lösung von 1.3. mit $|z(t_0)| < \hat{\delta}$ ist, $|z(t)| < \frac{\epsilon}{\sup_{s \in \mathbb{R}} \|P(s)\|}$ für alle $t \geq t_0$ erfüllt ist und $\lim_{t \rightarrow \infty} |z(t)| = 0$ gilt (Beachte: Jede

Lösung von 1.3 ist für alle Zeiten definiert). Setze $\delta := \frac{\hat{\delta}}{\sup_{s \in \mathbb{R}} \|P^{-1}(s)\|}$. Sei y Lösung von

1.2 mit $|y(t_0)| < \delta$. Aus der obigen Behauptung folgt:

- $y(t)$ ist definiert für alle $t \geq t_0$.
- $|y(t)| = |P(t)P^{-1}(t)y(t)| \|P(t)\| \cdot \frac{\epsilon}{\sup_{s \in \mathbb{R}} \|P(s)\|} = \epsilon$ für alle $t \geq t_0$.
- $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

Die oben erwähnte Bemerkung, dass asymptotische Ljapunov-Stabilität im autonomen Fall nicht möglich ist, bestätigt sich in deren Voraussetzungen des Satzes, denn aus $\dot{p}(t) = f(p(t))$ folgt, dass p wieder stetig differenzierbar ist und $\dot{p}(t) = df(p(t))\dot{p}(t)$ gilt, d.h. mindestens ein Floquetmultiplikator hat Betrag 1, denn \dot{p} löst $\dot{y} = df(p(t))y$, d.h. $\dot{p}(0)$ ist Fixpunkt von $\phi(T) := e^{BT}$. ■

Wir beweisen im 2. Abschnitt ein Analogon dieses Satzes im autonomen Fall. Dazu muss jedoch ein angemessener Stabilitätsbegriff definiert werden. ■

9.6 Orbitale Stabilität: Der autonome Fall

Sei $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Betrachte

$$x' = f(x). \tag{9.25}$$

Wir setzen

$$D(f) := \{(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid \xi \in D, t \in I_{\max}(\xi)\}$$

und nennen

$$\Phi : D(f) \ni (t, \xi) \mapsto x(t; \xi) \in D$$

den **Fluss** von f bzw. (9.25). $D(f)$ ist offen und es ist $\Phi \in C^1(D(f); \mathbb{R}^n)$. Weiterhin existieren die gemischten zweiten partiellen Ableitungen des Flusses und sind stetig.

Sei nun $p \in D$ ein periodischer Punkt, d.h. die zugehörige Lösung $x(\cdot; p)$ von (9.25) ist periodisch mit einer Periode $T > 0$. $\gamma(p)$ sei der Orbit dazu.

Definition 9.25

Sei $T > 0$ und sei $x : \mathbb{R} \rightarrow D$ eine T -periodische Lösung von (9.25).

i) $\gamma := \gamma(p)$ heißt **stabil** genau dann, wenn gilt:

$$\forall U \in \mathcal{U}(\gamma) \exists V \in \mathcal{U}(\gamma) \forall \xi \in V \forall t \geq 0 (\Phi(t, \xi) \in U).$$

ii) γ heißt **asymptotisch stabil** genau dann, wenn γ stabil ist und wenn gilt:

$$\exists V \in \mathcal{U}(\gamma) \forall \xi \in V (\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\Phi(t, \xi), \gamma) = 0).$$

iii) p heißt **(asymptotisch) orbital-stabil** genau dann, wenn γ (asymptotisch) stabil ist. □

Der Begriff der orbitalen Stabilität berücksichtigt also in erster Linie die geometrischen Eigenschaften des Orbits. Es wird sich jedoch herausstellen, dass auch im Falle der asymptotisch orbitalen Stabilität die Lösungen in der Umgebung eines periodischen Orbits zumindest asymptotisch wie $x(\cdot; p)$ verlaufen („asymptotisch mit x in der Phase“).

Analog zum Abschnitt ?? definieren wir

$$\begin{aligned} A(t) &:= df(p(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ g(t, y) &:= f(y + x(t; p)) - f(x(t; p)) - df(x(t; p))y, \quad (t, y) \in \{(t, y) | y + x(t; p) \in D\}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\lim_{|y| \rightarrow 0} \frac{|g(t, y)|}{|y|} = 0 \text{ gleichmässig in } t,$$

und $x(\cdot; \xi)$ löst genau dann (9.25), wenn $y := x(\cdot; \xi) - x(\cdot; p)$ Lösung von

$$\dot{y} = A(t)y + g(t, y) \tag{9.26}$$

ist.

Satz 9.26

A habe $n - 1$ Floquetmultiplikatoren vom Betrag < 1 . Dann gilt:

- i) $x(\cdot; p)$ ist asymptotisch orbital-stabil;
- ii) $\exists V \in \mathcal{U} \forall \xi \in V \exists \xi_0 \in \gamma (\lim_{t \rightarrow \infty} |\Phi(t, \xi_0) - \Phi(t, p)| = 0)$.

Beweis:

Wir beweisen den Satz in drei Schritten:

- 1) Einführung eines geeigneten transversalen Schrittes
- 2) Übertragung der Eigenschaften des Monodromieoperators auf die linearisierte Poincarèabbildung.
- 3) Beweis der Behauptung

Zu 1).

Sei $\xi_0 := p$. Definiere $U(t) := \Phi_x(t, \xi_0), t \in \mathbb{R}$.

U ist Fundamentalsystem von $y' = A(t)y$, denn:

$$U'(t) = \frac{d}{dt} \frac{d}{dx} \Phi(t, \xi_0) = \frac{d}{dx} \frac{d}{dt} \Phi(t, \xi_0) = \frac{d}{dx} f(\Phi(t, \xi_0)) = d_x f(x(t, p)) U'(t) = A(t) U(t)$$

und $U(0) = I$. Wegen $U^{-1}(0)U(T) = U(T)$ hat $U(T)$ $n - 1$ Eigenwerte vom Betrag < 1 und den Eigenwert 1; $f(\xi_0)$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 1, da

$$f(\xi_0) = x'(0; \xi_0)(0) = x'(T; \xi_0) = U(T)x'(0; \xi_0) = U(T)f(\xi_0).$$

Wir zerlegen den \mathbb{R}^n in Unterräume G und H : $G := \text{Kern}(I - U(T)) \cap \mathbb{R}^n = \text{span}(f(p_0))$
 $H := (\oplus_{\beta|\beta \text{ Eigenwert von } U(T), \beta \neq 1} \text{Kern}(\beta I - U(T))^{m(\beta)}) \cap \mathbb{R}^n$, wobei $m(\beta)$ die Vielfachheit des Eigenwertes β angibt. Da $U(T) \in \mathbb{R}^{n,n}$, ist H $n - 1$ dimensionaler Unterraum der \mathbb{R}^n und es gilt $\mathbb{R}^n = G \oplus H$.

Weiterhin ist $U(T) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear, bijektiv und es gilt $U(T)(H) = H$.

Wegen $f(\xi_0) \notin H$ gibt es $V \in p_0 + H, V$ offen bzgl. der Relativtopologie, $\xi_0 \in V$, so dass V einen transversalen Schnitt durch γ darstellt (d.h. $f(x) \notin H \forall x \in V$)

Sei $H \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\langle h, x \rangle = 0 \forall x \in H$. Da $D(f)$ offen ist, gibt es $Q_1 \in \mathcal{U}(T); Q_2 \in \mathcal{U}(\xi_0)$ und $Q_1 \times Q_2 \subset D(f)$.

Definiere: $j : Q_1 \times Q_2 \ni (t, x) \mapsto \langle h, \gamma(t, x) - p_0 \rangle \in \mathbb{R}$

Es gilt: $j \in C^1(Q_1 \times Q_2, \mathbb{R})$,

$\dot{j}(T, \xi_0) = 0, \frac{d}{dt} j(T, \xi_0) = \langle h, f(\xi_0) \rangle \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es $\widetilde{Q}_2 \subset \widetilde{Q}_2, \widetilde{Q}_2$ offen, $\xi_0 \in \widetilde{Q}_2, \tau \in C^1(\widetilde{Q}_2, Q_1)$ mit $j(\tau(x), x) = 0 \forall x \in \widetilde{Q}_2$, d.h. $\gamma(\tau(x), x) \in \xi_0 + H \forall x \in \widetilde{Q}_2$.

Jetzt läßt sich eine Poincarèabbildung π definieren:

$$W := V \cap \widetilde{Q}_2, \pi : W \ni x \mapsto \gamma(\tau(x), x) \in V$$

(o.E. kann W so verkleinert werden, dass $\pi(x) \in V \forall x \in W$)

Es gilt: $\pi \in C^1(W, V), \pi(\xi_0) = \xi_0$

$\pi_0 : W_0 \ni x \mapsto \pi(\xi_0 + x) - \xi_0 \in H, \pi_0 \in C^1(w_0, H)$

Zu 2). Behauptung: $d\pi_0(0) = U(T)|_H$

Beweis der Behauptung:

Aus $\pi_0(x) = \gamma(\tau(\xi_0 + x), \xi_0 + x) - p_0, x \in W_0$, folgt

$$d\pi_0(0) = d_t \phi(T, p_0) \cdot d\tau(p_0)|_H + U(T)|_H \quad (9.27)$$

Andererseits folgt mit $k : W \ni x \mapsto j(\tau(x), x) = 0 \in \mathbb{R}$:

$$0 = dk(p_0) = d_x j(T, p_0) + d_t j(T, p_0) \cdot d\tau(p_0)$$

Aber wegen $d_t j(T, p_0) = \langle h, f(p_0) \rangle \neq 0$ und $d_x j(T, p_0) = \langle h, U(T)(\cdot) \rangle$

$$d\tau(p_0) = - \langle h, f(p_0) \rangle^{-1} \cdot \langle h, U(T)(\cdot) \rangle \quad (9.28)$$

Aus (9.28) folgt, $d\tau(p_0)|_H = 0$ und aus (9.27)(I) die Behauptung. Also hat $d\pi_0(0)$ nur Eigenwerte vom Betrag < 1 .

Behauptung: Man findet eine Norm $|\cdot|_*$ auf H , so dass

$$\|d\pi_0(0)\|_* = \sup_{|x|_*=1} \|d\pi_0(0)x\|_* < 1.$$

Beweis der Behauptung:

Sei $H_{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung von H und V_1, \dots, V_{n-1} eine Basis von $H_{\mathbb{C}}$, bezüglich der $d\pi_0(0)$ durch eine Matrix $D + N$ dargestellt wird, wobei D eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ als Einträge und N nilpotente Matrix mit Einträgen nur in der oberen Nebendiagonalen ist.

$$\delta := \frac{1}{2}(1 - \max_{1 \leq i \leq n-1} |\lambda_i|), A_i := \delta^i i; 1 \leq i \leq n-1.$$

Die a_i bilden eine Basis von $H_{\mathbb{C}}$ und für

$$x = \sum_{i=1}^{n-1} x_i a_i; a_i \in H$$

läßt sich definieren: $|x|_* := \max_{1 \leq i \leq n-1} |x_i|$. Falls $|x|_* \leq 1$ folgt

$$\begin{aligned} \|d\pi_0(0)x\|_* &= \|(D + N)\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i a_i\right)\|_* \leq \left|\sum_{i=1}^{n-1} x_i \delta^i D v_i\right|_* + \left|\sum_{i=1}^{n-1} x_i \delta^i N v_i\right|_* \\ &\leq \left|\sum_{i=1}^{n-1} x_i \lambda_i a_i\right|_* + \left|\sum_{i=2}^{n-1} x_i \delta a_{i-1}\right|_* \leq \max_{1 \leq i \leq n-1} |\lambda_i| + \delta < 1. \end{aligned}$$

O.E. sei W_0 bereits so verkleinert, dass $\|d\pi_0(y)\|_* \leq \beta$ für ein $\beta < 1$ richtig und W_0 konvex ist.

Für $x \in W = p_0 + W_0$ folgt dann:

$$|\pi(x) - p_0|_* = |\pi_0(x - p_0) - \pi_0(0)|_* \leq \beta |x - p_0|_* \tag{9.29}$$

Es gilt also: $\pi(x) \in W$, falls $x \in W$ und $\pi^k(x) \rightarrow p_0$ für $k \rightarrow \infty$.

Zu 3). Wir zeigen zunächst die Stabilität von γ . Sei $U \in \mathcal{A}(\gamma)$

O.E. sei W bereits so verkleinert, dass gilt:

$$\tau(x) \in [0, 2T] \text{ o.u. } x \in W, \phi(t, x) \in U \forall (t, x) \in [0, 2T] \times W.$$

Aus (9.29) folgt dann: $\phi(t, x) \in \mathcal{A} \forall (t, x) \in [l, \infty) \times W$.

Definiere: $V := \cup_{(t,x) \in [0, \infty) \times W} \{\phi(t, x)\}$

Nach obigem ist $V \subset U$ und wegen $\phi(t', \phi(t, x)) = \phi(t' + t, x), t, t' \in [0, \infty), x \in W$, ist V auch positiv invariant. V ist auch Umgebung von γ , denn sonst gäbe es $\tilde{p} \in \gamma, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \setminus V$ mit $y_n \rightarrow \tilde{p}$. Eine ähnliche Argumentation wie die bei der Konstruktion der Poincaréabbildung liefert eine Umgebung $\tilde{U} \in \mathcal{U}(\tilde{p})$ und ein $\tilde{\tau} \in C^1(\tilde{U}, [-2\tilde{t}, 0])$, wobei $\phi(-\tilde{t}, \tilde{p}) = p_0$ und $\phi(\tilde{\tau}(y), y) \in W \forall y \in \tilde{U}$. Dies wäre ein Widerspruch zu $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \setminus V$. Also ist p orbital-stabil.

Anstatt der asymptotischen Stabilität von γ genügt es, die Verschärfung in (9.28) zu

beweisen.

Wir wählen V wie oben. Sei $x \in V$ (o.E. $x_0 \in W$ wegen Definition von V) O.E. sei W so verkleinert, dass

$$|\tau(x) - \tau(x')| \leq |x - x'| \text{ für alle } x, x' \in W$$

gilt (beachte: $d\tau(p_0)|_H = 0$). Wir definieren eine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ induktiv durch

$$t_0 := 0 \quad t_{k+1} := t_k + T - \tau(\pi^k(x_0)), k \in \mathbb{N}.$$

Man zeigt mit vollständiger Induktion

$$\phi(kT, x_0) = \phi(t_k, \pi^k(x_0)) \forall k \in \mathbb{N} \quad (9.30)$$

Wegen $T = \tau(p_0)$ und (??) erhält man die Abschätzung

$$|t_{k+1} - t_k| = |\tau(\pi^k(x_0)) - \tau(p_0)| \leq |\pi^k(x_0) - p_0|_* \leq \beta^k |x_0 - p_0|_* \forall k \in \mathbb{N}$$

Also für beliebige $k \in \mathbb{N}$

$$|t_{k+m} - t_k| \leq \sum_{j=0}^{m-1} |t_{k+j+1} - t_{k+j}| \leq \sum_{j=0}^{m-1} \beta^{k+j} |x_0 - p_0|_* \leq \beta^k \frac{1}{1 - \beta} |x_0 - p_0|_*.$$

Folglich ist $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und konvergent gegen ein $s \in \mathbb{R}$. Mit (9.30) folgt

$$\lim_k \phi(kT, x_0) = \lim_k \phi(t_k, \pi^k(x_0)) = \phi(s, p_0) =: p_1 \in \gamma$$

Wir haben

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi(t, x_0) - \phi(t, p_0)| = 0,$$

denn: Da ϕ auf der kompakten Menge $[0, T] \times \overline{\{\phi(KT, x_0) \mid K \in \mathbb{N}\}}$ gleichmäßig Lipschitzstetig ist, folgt für $t \in [kT, (k+1)T]$, $K \in \mathbb{N}$, mit einem $L > 0$.

$$\begin{aligned} |\phi(t, x_0) - \phi(t, p_0)| &= |\phi(t - kT, \phi(kT, x_0) - \phi(kT, p_0))| \\ &\leq L |\phi(kT, x_0) - p_1| \end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

Eine einfache Anwendung der Dreiecksungleichung zeigt die Eindeutigkeit von p_0 . ■

Beispiel 9.27 Betrachte:

$$\begin{aligned} x_1' &= +x_2 + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} (1 - x_1^2 - x_2^2) =: v_1(x_1, x_2) \\ x_2' &= -x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} (1 - x_1^2 - x_2^2) =: v_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Eine periodische Lösung ist (Polarkoordinaten!)

$$\bar{x} : \mathbb{R} \ni t \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$$

Die Spur $\sigma(t)$ der Matrix

$$A(t) := \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\bar{x}(t)) \right)$$

ist gegeben durch

$$\sigma(t) := -2 \cos^2 t - 2 \sin^2 t = -2$$

Also folgt mit Lemma 2.21 für die charakteristischen Multiplikatoren v_1, v_2 vom A :

$$v_1 v_2 = \exp\left(\int_0^{2\pi} \sigma(s) ds\right) = \exp(-4\pi)$$

Für die charakteristischen Exponenten λ_1, λ_2 mit

$$e^{\lambda_i \cdot 2\pi} = \mu_i, i = 1, 2,$$

bedeutet dies bei geeigneter Numerierung:

$$\operatorname{Re}\lambda_1 = 0, \operatorname{Re}\lambda_2 = \frac{1}{2\pi}(-4\pi) = -2.$$

Also ist \bar{x} asymptotisch orbital stabil.

Liegt in (9.21) ein Hamiltonsches System vor, so gilt $\nabla \dot{v} = 0$. Haben wir dann eine T -periodische Lösung \bar{x} , so gilt für die charakteristischen Exponenten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{tr}(\nabla v(\bar{x}(t))) dt = 0$$

$n=2$: Wir erhalten: $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 = 0$ Es liegt orbitale Stabilität vor!

$n \geq 2$: Mindestens für ein λ_j gilt: $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$. Also liegt orbitale Instabilität vor!

□

Beispiel 9.28 Betrachte:

$$\begin{aligned} x_2' &= x_2 + x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 \\ x_1' &= x_1 + x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

In Polarkoordinaten (r, ϑ) :

$$r' = r(r^2 - 1)^2, \vartheta' = 1. \quad (9.31)$$

Wir haben die 2π -periodische Lösung \bar{x} mit

$$\bar{x}_1(t)^2 + \bar{x}_2(t)^2 = 1, t \in [0, \infty).$$

Für die charakteristischen Exponenten λ_1, λ_2 erhalten wir nach Rechnung:

$$\operatorname{Re}\lambda_1 + \operatorname{Re}\lambda_2 = 0, d.h. \operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 = 0.$$

Keine Auskunft über Stabilität! Aber aus (9.31) erhalten wir, dass \bar{x} instabil ist. Der Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$ ist natürlich asymptotisch instabil! □

Literaturverzeichnis

- [1] AMANN, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. De Gruyter, 1983
- [2] ARGYRIS, J.; FAUST, G.; HAASE, M.: Die Erforschung des Chaos. Vieweg-Verlag, 1993
- [3] ARNOLD, V.I.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1991
- [4] AULBACH, B.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Spektrum, 1997
- [5] BRAUN, M.: Differential Equations and Applications. Springer, 1996
- [6] CANTY, M.,J.: Chaos und Systeme. Vieweg-Verlag, 1993
- [7] EICKELBERG, M.: Einführung in die Arbeit mit MAPLE V. Fachbuchverlag Leipzig, 1998
- [8] ERWE, F.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. BI-Taschenbuch, 1991
- [9] HEAL, K.M.; HANSEN, M.L; RICKARD, K.M.: MAPLE V Learning Guide. Springer, 1998
- [10] HIRSCH, M.; SMALE, S.: Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra. Academic Press, 1974
- [11] IRWIN, M.L.: Smooth Dynamical Systems. Academic Press, 1990
- [12] JESCHKE, G.: Mathematik der Selbstorganisation, Vieweg-Verlag, 1989
- [13] KNOBLOCH, H.W.; KAPPEL, F.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Teubner, 1989
- [14] KOFLER, M.: MAPLE V. Addison-Wesley, 1996
- [15] LEVEN, M.; KOCH, B.-P.; POMPE, B.: Chaos in dissipativen Systemen. Vieweg-Verlag, 1989
- [16] MONAGAN, M.B.; et al.: MAPLE V Programming Guide. Springer, 1996
- [17] OEVEL, W.: Computeralgebra und Anwendungen. Vorlesungsskript, Universität Frankfurt/M., 1997
- [18] SCHÄFKE, F.W.; SCHMIDT, D.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Springer, 1973

- [19] VERHULST, F.: Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems. Springer, 1990
- [20] WALTER, W.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Springer, 1972