

Übungen zu „Nichtexpansive Operatoren“ – WiSe 2016/17

Blatt 6

Abgabe und Besprechung: 25.1. 2017

- 1.) ★ Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum und seien $f, g \in \Gamma_0(\mathcal{H})$.
Betrachte die Funktion $F : \mathcal{H}^2 \ni (u, v) \mapsto f(u) + g(v) \in \mathbb{R}$ und zeige für $s > 0$

$$\text{prox}_{sF}(u, v) = (\text{prox}_{sf}(u), \text{prox}_{sg}(v)), u, v \in \mathcal{H}.$$

- 2.) Finde eine stetige Lösung von

$$-x' \in \text{sign}(x), x(0) = 1$$

- 3.) Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum, sei $C \subset \mathcal{H}$ nichtleer, abgeschlossen und konvex, und sei $F : C \rightarrow C$ nichtexpansiv. Zeige, dass $A := I - F$ ein monotoner Operator ist. Wann ist A maximal monoton?
- 4.) Sei \mathcal{H} der euklidische Raum \mathbb{R}^n . Betrachte auf \mathcal{H} die Funktionen f, g , definiert durch

$$f((x_1, \dots, x_n)) := \sum_{i=1}^n |x_i|, g((x_1, \dots, x_n)) := \sum_{i=1}^{n-1} |x_i - x_{i+1}|.$$

Zeige $\text{prox}_{f+g} = \text{prox}_f \circ \text{prox}_g$.

Zur Erinnerung:

$$\text{prox}_{sf} : \mathcal{X} \ni x \mapsto \text{argmin}_{u \in \mathcal{X}} (f(u) + \frac{1}{2s} \|u - x\|^2) \in \mathcal{X} \quad (1)$$

Die Aufgabe, die mit einem ★ versehen ist, ist abzugeben und wird korrigiert. Alle anderen Aufgaben werden in der Übungsstunde behandelt.