JOHANN WOLFGANG GOETHE–UNIVERSITÄT FRANKFURT/MAIN
Fachbereich Mathematik **Prof. Dr. J. Baumeister**

Übungen zu „Nichtexpansive Operatoren" – WiSe 2016/17

Blatt 5 Abgabe und Besprechung: 11. 1. 2017

1.) ⋆ Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und seien U_1, U_2 abgeschlossene lineare Teilräume; $U := U_1 \cap U_2$. Der Friedrichs-Winkel ist definiert durch

$$c(U_1, U_2) := \sup\{\langle u|v\rangle : u \in U_1 \cap U^\perp \cap \overline{B}_1, v \in U_2 \cap U^\perp \cap \overline{B}_1\}\,.$$

Zeige die Äquivalenz der folgenden Bedingungen:

(a) $P_{U_1^\perp}(U_2) := \{P_{U_1^\perp}(v) : v \in U_2\}$ ist abgeschlossen.

(b) $U_1 + U_2$ ist abgeschlossen.

(c) $P_{U_2^\perp}(U_1) := \{P_{U_2^\perp}(v) : v \in U_1\}$ ist abgeschlossen.

2.) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und seien U, V lineare Teilräume mit $\mathcal{H} = U \oplus V$. In (U, V) gilt eine verschärfte Cauchy-Schwarzsche Ungleichung falls

$$\langle u|v\rangle \le \gamma\|u\|\|v\|\,,\ u \in U, v \in V,$$

mit $0 \le \gamma < 1$ gilt. Zeige:
Ist $\dim \mathcal{H} < \infty$, so gilt eine verschärfte Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

3.) Sei $\mathcal{X}$ ein Hilbertraum und seien C_1, C_2 abgeschlossene konvexe Teilmengen mit $C := C_1 \cap C_2 \ne \emptyset$. Sei die Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$x^{n+1} := \begin{cases} P_{C_1}(x^n) & \text{falls } n \text{ gerade} \\ P_{C_2}(x^n) & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}\,,$$

wobei x^0 ein gegebener Startpunkt ist. Zeige:

(a) $\|x^{n+1} - u\| \le \|x^n - u\|$ for all $u \in C, n \in \mathbb{N}$.

(b) $\max(\mathrm{dist}(x^n, C_1)^2, \mathrm{dist}(x^n, C_2)^2) \le \mathrm{dist}(x^n, C)^2 - \mathrm{dist}(x^{n+1}, C)^2\,,\ n \in \mathbb{N}$.

4.) Betrachte den Hilbertraum l_2 mit den Standardbasisvektoren $e^k, k \in \mathbb{N}$. Seien Folgen $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}, (u^n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_2$ definiert durch

$$x^n := 1/n\, e^n, u^n := (1 + 1/n)e^n\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Ferner sei $w := e^1$. Setze $C := \{w\} \cup \{u^n : n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Zeige: $P_C(x^n) = u^n\,,\ n \in \mathbb{N}, n \ge 2$.

(b) Ist P_C stetig in $\theta \in l_2$?

(c) Ist C abgeschlossen, konvex?

Die Aufgabe, die mit einem ⋆ versehen ist, ist abzugeben und wird korrigiert. Alle anderen Aufgaben werden in der Übungsstunde behandelt.