JOHANN WOLFGANG GOETHE–UNIVERSITÄT FRANKFURT/MAIN
Fachbereich Mathematik **Prof. Dr. J. Baumeister**

Übungen zu „Nichtexpansive Operatoren" – WiSe 2016/17

Blatt 4 Abgabe und Besprechung: 14. 12. 2016

1.) ⋆ Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, sei $U \subset \mathcal{H}$ ein linearer abgeschlossener Teilraum und sei $C \subset U$ nichtleer. Dann gilt:

(a) $P_C \circ P_U = P_C = P_U \circ P_C$.

(b) $\operatorname{dist}(x, C)^2 = \operatorname{dist}(x, U)^2 + \operatorname{dist}(P_U(x), C)^2$ für alle $x \in \mathcal{H}$.

2.) Sei $\mathbb{R}^2$ betrachtet mit der l_2-Norm und sei

$$C := S_{\frac{1}{2}} := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}} = 1\} .$$

(Einheitssphäre im metrischen Raum $\mathbb{R}^2$ mit der Metrik

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := |x_1 - y_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2 - y_2|^{\frac{1}{2}}) .$$

Berechne für $(u, v) \in A := [0, 1] \times [0, 1]$ die beste Approximation $P_C(u, v)$.

3.) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und sei C eine nichtleere abgeschlosse konvexe Teilmenge von $\mathcal{H}$. Sei P_C die metrische Projektion von C und seien $x, y \in \mathcal{H}$. Zeige:

$$\|P_C(x) - P_C(y)\| < \|x - y\| \text{ oder } P_C(x) - P_C(y) = x - y .$$

4.) Sei $\mathcal{X}$ ein Banachraum und seien U, V abgeschlossene Teilräume von $\mathcal{X}$.

(a) Ist U ein endlichdimensionaler Teilraum, dann ist $U + V$ abgeschlossen.

(b) Nun sei $\mathcal{X}$ der Raum c_0 der reellen Nullfolgen versehen mit der Supremumsnorm. Sei

$$\begin{aligned} U &:= \{(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 : x^n = nx^{n-1}, n \text{ gerade}\} , \\ V &:= \{(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 : x^n = 0, n \text{ ungerade}\} . \end{aligned}$$

Zeige: $U + V$ ist dicht in c_0, aber nicht abgeschlossen.

Die Aufgabe, die mit einem ⋆ versehen ist, ist abzugeben und wird korrigiert. Alle anderen Aufgaben werden in der Übungsstunde behandelt.