JOHANN WOLFGANG GOETHE–UNIVERSITÄT FRANKFURT/MAIN

Fachbereich Mathematik **Prof. Dr. J. Baumeister**

Übungen zu „Nichtexpansive Operatoren" – WiSe 2016/17

Blatt 3 Abgabe und Besprechung: 30. 11. 2016

1.) ★ Sei $\mathbb{R}^n$ betrachtet mit der l_2-Norm und sei

$$U := \{x = (x_1, \dots, x_n) : \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i = 0\} .$$

(a) Zeige: U ist ein linearer Teilraum mit $\dim U = n - 1$.

(b) Berechne $P_U(e^i), i = 1, 2, \dots, n$. (Hier sind $e^i = (\delta_{ij})$.)

(c) Berechne $P_U(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

2.) Sei $\mathbb{R}^n$ betrachtet mit der l_2-Norm und sei

$$C := \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n\} .$$

Zeige C ist ein konvexer Kegel und Tschebyscheffmenge und berechne $P_C(e^i)$ für $i = 1, \dots, n$.

3.) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und sei C eine nichtleere abgeschlosse konvexe Teilmenge von $\mathcal{H}$. Sei $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ eine surjektive lineare Isometrie. Dann ist $T(C)$ eine nichtleere abgeschlossene konvexe Teilmenge von $\mathcal{H}$ und $P_{T(C)} = T \circ P_C \circ T^*$. wobei T^* die Adjungierte von U ist.

4.) Sei X ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $[\cdot|\cdot] : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst **semi-inner Produkt** auf X falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $[x + y|z] = [x|z] + [y|z]$ für alle $x, y, z \in X$;

(2) $[ax|y] = a[x|y], [x|ay] = a[x|y]$ für alle $x, y \in X, a \in \mathbb{R}$;

(3) $[x|x] \ge 0$ für alle $x \in X$ und $[x|x] = 0$ impliziert $x = \theta$;

(4) $|[x|y]|^2 \le [x|x][y|y]$ für alle $x, y \in X$.

Sei nun X ein reeller Vektorraum und sei $[\cdot, \cdot]$ ein semi-inner Produkt auf X . Zeige:

(a) Die Abbildung $\nu : X \ni x \longmapsto [x|x]^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}$ ist eine Norm auf X .

(b) Für jedes $y \in X$ ist die Abbildung $\lambda_y : X \ni x \longmapsto [x|y] \in \mathbb{R}$ ist ein stetiges lineares Funktional auf dem normierten Raum (X, ν) mit $\|\lambda_y\| = \nu(y)$.

Die Aufgabe, die mit einem ★ versehen ist, ist abzugeben und wird korrigiert. Alle anderen Aufgaben werden in der Übungsstunde behandelt.