JOHANN WOLFGANG GOETHE–UNIVERSITÄT FRANKFURT/MAIN

Fachbereich Mathematik **Prof. Dr. J. Baumeister**

Übungen zu „Nichtexpansive Operatoren“ – WiSe 2016/17

Blatt 2 Abgabe und Besprechung: 16. 11. 2016

1.) ★ Sei der Vektorraum $C[0,1]$ versehen mit der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$. Sei

$$C := \{x \in C[0,1] : 0 = x(0) \le x(s) \le x(1) = 1\}$$

und betrachte

$$T : C[0,1] \ni x \longmapsto T(x) \in C[0,1] \text{ mit } T(x)(s) := sx(s), s \in [0,1]\,.$$

Zeige:

(1) T ist eine lineare nichtexpansive Abbildung mit $\|T\| = 1$.

(2) $T(x) \in C$ falls $x \in C$.

(3) C ist eine bechränkte konvexe Menge.

(4) T besitzt einen eindeutig bestimmten Fixpunkt in $C[0,1]\backslash C$.

(5) Es gibt zu jedem $t \in (0,1)$ ein $x_t \in C$ mit $x_t = tu+(1-t)T(x_t)$ wobei $u \in C, u(s) := s$.

(6) $\inf_{x\in C} \|x - T(x)\| = 0$.

(7) $\lim_n \|x^0 - T^n(x^0)\|_\infty = \mathrm{diam}(C)$ für alle $x^0 \in C$.

2.) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und sei $S \subset \mathcal{H}$ nichtleer. S wird eine **Sonne** genannt, falls für alle $x \in \mathcal{H}$ die folgenden Aussage gilt:

$$P_S(x) = P_S(u) \text{ für alle } u \in \{P_S(x) + t(x - P_S(x)) : t \ge 0\}\,.$$

Sei $C \subset \mathcal{H}$ eine nichtlere Tschebyschevmenge. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) C ist konvex.

(b) C ist eine Sonne.

3.) Sei $\mathcal{H}$ der euklidische Raum $\mathbb{R}^2$ und seien $C_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$, $C_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, |y| \le x\}$, $C_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 0, |y| \le |x|\}$ und $C := (C_0 \cap C_1) \cup (C \cap C_2)$. Zeige: $C \subset \mathrm{co}(\{P_C(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash C\})$. (co bedeutet *konvexe Hülle*)

4.) Sei $\mathcal{H}$ der euklidische Raum $\mathbb{R}^2$ und betrachte $U := \mathrm{span}\{(0,1)\}$, $V := \mathrm{span}\{(1,1)\}$.

(a) Berechne $P_U, P_V, T_1 := P_U \circ P_V, T_2 := P_V \circ P_U$.

(b) Sind T_1, T_2 nichtexpansiv?

(c) Zeige: Die Orbits $(T_1^n(x,y))_{n\in\mathbb{N}}, (T_2^n(x,y))_{n\in\mathbb{N}}$ sind konvergent für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(d) Zeige: Es gibt $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\langle T_1(x,y) - T_1(x',y') | (x,y) - (x',y')\rangle < 0\,.$$

(Bedeutung: T_1 ist (ebenso wie auch T_2) nicht *firm nichtexpansiv*.)

Die Aufgabe, die mit einem ★ versehen ist, ist abzugeben und wird korrigiert. Alle anderen Aufgaben werden in der Übungsstunde behandelt.