

Übungen zu „Nichtexpansive Operatoren“ – WiSe 2016/17

Blatt 1

Abgabe und Besprechung: 2. 11. 2016

- 1.) ★ Sei X ein Banachraum, sei V eine kompakte Teilmenge von X und sei $F : V \rightarrow V$ kontraktiv, d. h. :

$$\forall x, y \in V, x \neq y, (\|F(x) - F(y)\| < \|x - y\|).$$

Zeige:

- (a) F besitzt genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in V$.
(b) Für jedes $x \in V$ konvergiert die Iteration $x^{n+1} := F(x^n)$, $x^0 = x$, gegen \bar{x} .

Hinweis zu (b): Man kann zeigen, dass die Funktion $x \mapsto \|x - F(x)\|$ entlang der Iteration monoton fallend ist.

- 2.) Sei \mathcal{X} ein Banachraum und sei C eine nichtleere Teilmenge von \mathcal{X} . Zeige für

$$\hat{C} := \{x \in \mathcal{X} : \|x\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|\} :$$

- (a) $C \cap \hat{C} = \emptyset$ oder $C \cap \hat{C} = \{\theta\}$.
(b) \hat{C} ist abgeschlossen.

- 3.) Betrachte das folgende System nichtlinearer Gleichungen:

$$2x_1^2 - x_2^2 - 8x_1 = 0, \quad x_1^2 + x_1x_2 - 4x_2 + 1 = 0$$

Finde eine Umformulierung als Fixpunktgleichung in \mathbb{R}^2 und weise (mit dem Fixpunktsatz von Brouwer) Lösbarkeit nach.

- 4.) Sei X ein kompakter metrischer Raum. Zeige: X ist separabel. (X ist heißt separabel, falls es eine abzählbare Teilmenge A von X gibt mit $\overline{A} = X$.)
-

Die Aufgabe, die mit einem ★ versehen ist, ist abzugeben und wird korrigiert. Alle anderen Aufgaben werden in der Übungsstunde behandelt.