J. Wolfart SoSe 2006

Inhaltsverzeichnis Riemannsche Flächen I

Vorlesung

Die Vorlesung wird in etwa dem Buch von Rick Miranda *Algebraic Curves and Riemann Surfaces* (AMS 1995), Kap. I, II und III.1, 3, 4 folgen. Das Buch ist in der Bibliothek verfügbar und für das Sommersemester gesperrt. Meine eigenen handschriflichen (sehr knappen) Notizen stehen in einem Skriptenordner im Kopierraum der Bibliothek.

1. Definition und einfache Eigenschaften
   Was ist das natürliche Definitionsgebiet einer holomorphen Funktion? Oder: warum Riemannsche Flächen? Karten, Verträglichkeit, Atlanten, Riemannsche Flächen; reelle 2–Mannigfaltigkeiten. Die Riemannsche Zahlenkugel. Orientierbarkeit, Geschlecht.

2. Beispiele: Algebraische Kurven
   Die projektive Gerade. Glatte affine algebraische Kurven. Projektive Ebene, projektiver Raum, und projektive algebraische Kurven. Graphen holomorpher Funktionen.

3. Funktionen auf Riemannschen Flächen
   Holomorphe und meromorphe Funktionen, $\mathcal{C}^\infty$–Funktionen, harmonische Funktionen. Reihenentwicklungen. Was kann man aus der Funktionentheorie in $\mathbf{C}$ auf Riemannsche Flächen übertragen?

4. Rationale Funktionen auf algebraischen Kurven
   Beispiele: Welche Funktionen sind auf der ganzen Riemannschen Zahlenkugel meromorph? Meromorphe Funktionen auf algebraischen Kurven.

5. Holomorphe Abbildungen Riemannscher Flächen
   Definition, Beispiele. Isomorphismen, Automorphismen. „Open mapping Theorem”, Identitätssatz, die besonderen Eigenschaften holomorpher Abbildungen kompakter Riemannscher Flächen.

6. Globale Eigenschaften holomorpher Abbildungen
   Multiplizität und Verzweigung. Der schöne Sonderfall kompakter Riemannscher Flächen: Eulercharakteristik, Riemann–Hurwitz–Formel und ihre Anwendungen. Holomorphe Abbildungen und Funktionenkörper–Erweiterungen

7. Hyperelliptische Kurven
   als affine algebraische Kurven; Kompaktifizierung, Geschlecht, Funktionenkörper. Tori und elliptische Kurven. Unverzweigte holomorphe Abbildungen von Tori. Automorphismen

8. Automorphismengruppen. Quotienten Riemannscher Flächen
   Fixpunkte von Automorphismen, lokale Beschreibung von Automorphismen. Wann werden Bahnenräume wieder Riemannsche Flächen? Endliche Automorphismengruppen von Kugel, Torus und Riemannschen Flächen höheren Geschlechts. Der Satz von Hurwitz, oder: warum die Zahl 42 nicht nur bei Douglas Adams so wichtig ist

9. Fundamentalgruppe, Überlagerungen, Monodromie
   (Vielleicht erst in Teil II im WS) Einige grundlegende Definitionen aus der Topologie. Wie kann man Riemannsche Flächen als Quotienten einfach zusammenhängender Riemannscher Flächen beschreiben? Gruppentheorie und Topologie holomorpher Abbildungen.

Seminar: Das Seminar behandelt eine verhältnismäßig einfache, aber besonders wichtige Klasse von Beispielen kompakter Riemannscher Flächen, nämlich Tori = elliptische Kurven, und zwar vor allem nach dem Kapitel 3 des Buchs *Complex Functions, an algebraic and geometric viewpoint* (Cambridge UP, 1987) von Gareth A. Jones und David Singerman. Das Buch ist in der Bibliothek verfügbar und für das Sommersemester gesperrt. Die letzten drei Vorträge basieren auf dem Buch von Freitag und Busam über Funktionentheorie.
Themen der Vorträge (in Klammern jeweils Abschnitte und Seitenzahlen der Vorlage, Daten und Vortragende):

1. Perioden; topologische Gruppen (3.1/3.2, S. 56–62, 25.04., Rempel)
2. Periodische Funktionen; Fundamentalbereiche (3.3/3.4, S. 62–70, 2.5. Mühlbauer)
3. Funktionentheorie elliptischer Funktionen (3.6, S. 72–78, 09.05., Fr. Rukavina)
4. Konvergenzfragen I (16.05., Bingmer)
5. Konvergenzfragen II (3.7/3.8, S. 78–89, 23.05., Schöbel)
6. Die $\wp$–Funktion (3.9, S. 90–95, 30.05., Katit)
7. Der Körper der elliptischen Funktionen (3.10/3.11, S. 95–101, 06.06., Bär)
8. ζ– und σ–Funktion (3.12–3.14, S. 101–106, 13.06., Dionysiadis)
9. Elliptische Funktionen als konforme Abbildungen (3.15/3.16, S. 106–115, 20.06., Bürger)
10. Das Additionstheorem (3.17, S.115–120, 27.06., Marek)
11. Die elliptische Modulgruppe (FB S. 305–309, 04.07., Fr. Abd el Baki)
12. Die elliptische Modulfunktion I (11.07., Fr. Ryvkina)
13. Die elliptische Modulfunktion II (FB S. 310–319, 18.07., Messer)