J. Wolfart SoSe 2006

Übungsaufgaben zur Mathematik IV = Diskrete Mathematik für alle Lehramtskandidaten

1. Auf einer Party befinden sich 17 Gäste. Warum ist die folgende Aussage falsch? *Jeder Gast unterhält sich mit genau 7 anderen Gästen.*

2. Begründen Sie, dass die in der Vorlesung angegebenen zusammenhängenden Graphen mit vier Eckpunkten tatsächlich paarweise nicht isomorph sind.

3. Man zeige: Aus n vorgegebenen Eckpunkten kann man durch Einfügen von Kanten genau $2^{n(n-1)/2}$ Graphen machen.

4. Können alle Ecken eines Graphen unterschiedlichen Grad besitzen?

5. Beschreiben Sie ein Rezept, wie man einen Eulerschen Kreis im vollständigen Graphen K_7 erzeugt (ohne Hierholzer–Algorithmus).

6. Beweisen Sie, dass jeder vollständige Graph K_n einen Hamiltonkreis besitzt. Oder noch besser (gibt zehn Extrapunkte!): Wenn ein zusammenhängender Graph mit n Eckpunkten in jedem Eckpunkt einen Grad $\geq n/2$ besitzt, ist er hamiltonsch.

7. Wieviele nicht–isomorphe Bäume mit 6 Eckpunkten gibt es? Zeichnen Sie alle!

8. G sei ein planarer Graph mit $e \geq 3$ Eckpunkten und k Kanten; er besitze keine Dreiecke. Zeigen Sie, dass dann $k \leq 2e - 4$ ist.

9. Gibt es im Würfelgraphen einen Eulerschen Kreis? Gibt es darin einen Hamiltonschen Kreis?

10. Charakterisieren Sie alle zusammenhängenden Graphen, deren Ecken maximal den Grad 2 besitzen.

11. Zeigen Sie, dass ein planarer Graph G ohne Ecken der Ordnung 1 oder 2 Kreise einer Länge ≤ 5 besitzt. Kann man sogar die Existenz von Kreisen der Länge ≤ 4 zeigen?

12. Bestimmen Sie die chromatischen Zahlen der fünf platonischen Graphen.

13. Zeigen Sie: Ein Graph ist genau dann bipartit (d.h. mit chromatischer Zahl $\chi(G) \leq 2$), wenn jeder Kreis im Graphen gerade Länge hat.

14. Sie wollen vom Südbahnhof zur Bockenheimer Warte. Betrachten Sie den RMV–Plan der U– und S–Bahnlinien als Netzwerk (Busse, Straßenbahn und Regionalbahnen nicht berücksichtigen!) und versehen Sie jede U–Bahnstrecke zwischen zwei benachbarten Stationen mit dem Gewicht 2, jede solche S–Bahnstrecke mit dem Gewicht 3. Konstruieren Sie vom Südbahnhof ausgehend einen aufspannenden Baum; Sie dürfen den abbrechen, wenn Sie die Bockenheimer Warte erreicht haben.

15. Fortsetzung: Benennen Sie mindestens vier Punkte, in denen die Umsetzung der Theorie *Dijkstra–Algorithmus* in die Praxis *RMV–Strecken–Optimierung* problematisch ist. Lösungsvorschläge?

16. Bestimmen Sie alle Lösungen von $91x \equiv 175 \bmod 217$.

17. Gegeben ein zusammenhängendes Netzwerk, in dem jeder Eckpunkt einen Grad ≤ 5 besitzt. Zeigen Sie, dass man dann für den Dijkstra–Algorithmus eine erheblich bessere Laufzeit erhält als im allgemeinen Fall.

18. Auf welchen Wochentag fällt der 18. Mai 2046 ?

19. Zeigen Sie, dass je zwei aufeinander folgende Glieder der Fibonacci–Folge F_n, F_{n+1} zueinander teilerfremd sind.

20. $p > 2$ sei eine Primzahl. Zeigen Sie, dass die Quadrate in der primen Restklassengruppe $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ eine Untergruppe vom Index 2 bilden. (Sie dürfen dabei verwenden, dass die prime Restklassengruppe zyklisch ist.)

21. Ermitteln Sie alle Lösungen der simultanen Kongruenzen

$$x \equiv 5 \bmod 17\ , \quad x \equiv 10 \bmod 16\ , \quad x \equiv 0 \bmod 15\ .$$

22. n sei das Produkt k verschiedener Primzahlen $p_i > 2$. Zeigen Sie, dass die Kongruenz $x^2 \equiv 1 \bmod n$ dann genau 2^k verschiedene Lösungen in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ hat.

23. Ermitteln Sie die Umkehrabbildung der Abbildung

$$(\mathbf{Z}/143\mathbf{Z})^* \to (\mathbf{Z}/143\mathbf{Z})^* \ : \ [a]_{143} \mapsto [a]_{143}^{23}\ .$$

24. Erstellen Sie das Bild des folgenden *gerichteten Graphen* (d.h. in dem die Eckpunkte durch Pfeile verbunden sind): Die Eckpunkte seien die Restklassen $a \bmod 15$, und ein Pfeil führt von $[a]_{15}$ zu $[b]_{15}$, wenn $b \equiv a^2 + 1 \bmod 15$.

25. Zeigen Sie, dass Carmichael–Zahlen quadratfrei sind. (Sie dürfen verwenden, dass die prime Restklassengruppe auch dann zyklisch ist, wenn der Modul eine ungerade Primzahlpotenz ist.)

26. Fortsetzung: Zeigen Sie, dass Carmichael–Zahlen mindestens drei Primteiler besitzen.

27. Ermitteln Sie mit Pollards Rho–Verfahren einen Primteiler von 221.

28. Warum ist es nicht zweckmäßig, in Pollards Rho–Verfahren Funktionen $f : x \mapsto ax$ oder $x \mapsto x + b$ zu wählen?

29. Zeigen Sie, dass der ISBN–Code auch Vertauschungen von zwei Ziffern erkennt, die nicht benachbart sind.

30. Geben Sie einen 2–fehlerkorrigierenden Code an!

31. Man beweise: Jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe ist wieder zyklisch.

32. Wieviele erzeugende Elemente hat eine zyklische Gruppe der Ordnung n?

33. Wieviele Punkte enthält eine Hammingkugel vom Radius 2 im $\mathbf{F}_2^n$ $(n > 2)$?

34. Man kann den Hammingcode H_3 zu einem Code $H_3^* \subset \mathbf{F}_2^8$ erweitern, indem man jedes $(a_1, \ldots, a_7) \in H_3$ ersetzt durch $(a_1, \ldots, a_7, a_1 + \ldots a_7)$. Zeigen Sie, dass H_3^* ein linearer $(8, 4)$–Code mit Minimalgewicht 4 ist.

35. Begründen Sie: Wenn bei der Verwendung eines perfekten 1–fehlerkorrigierenden Codes zwei Bits falsch übermittelt werden, dann ergibt die Fehlerbeseitigung ein falsches Codewort.

36. Geben Sie die Generatormatrizen und die Kontrollmatrizen an für den Verdoppelungscode und den Verfünffachungscode.

37. Organisieren Sie ökonomisch und fair Skatturniere für 4, 5 und 6 Teilnehmer! Oder: Gibt es $2 - (v, 3, 1)$–Blockpläne für $v = 4, 5, 6$?

38. Konstruieren Sie einen $2 - (10, 4, 4)$–Blockplan!

39. Führen Sie den Beweis aus, dass in einer endlichen projektiven Ebene alle Geraden gleichviele Punkte haben.

40. Zeigen Sie, dass jede projektive Ebene mindestens 7 Punkte hat.

41. Geben Sie zwei orthogonale lateinische 3×3–Quadrate an!

1. Klausur zur Mathematik IV =
Diskreten Mathematik für alle Lehramtskandidaten

am 1. Juni 2006, 8.15 bis 10.00 Uhr.

Die richtigen Aussagen sind **fett** hervorgehoben.

1. Der Würfelgraph enthält

weder einen Hamiltonkreis noch einen Eulerkreis ☐
einen Hamiltonkreis, aber keinen Eulerkreis ☐
keinen Hamiltonkreis, aber einen Eulerkreis ☐
einen Hamiltonkreis und einen Eulerkreis. ☐

2. Der Würfelgraph besitzt die chromatische Zahl $\big(\,\mathbf{2}\,\big)$.
(Hier war eine Zahl zwischen 1 und 8 einzutragen.)

3. Der vollständige Graph K_5

wird planar, wenn man eine beliebige Kante aus ihm entfernt ☐
ist schon selbst planar ☐
wird erst planar, wenn man mindestens zwei Kanten aus ihm entfernt ☐
wird planar, wenn man eine zusätzliche Kante einfügt. ☐

4. Zwischen zwei beliebigen Eckpunkten eines Graphen G gibt es einen *eindeutig bestimmten* Weg, wenn G

ein platonischer Graph ist ☐
ein vollständiger Graph ist ☐
ein Baum ist ☐
bipartit ist ☐
unzusammenhängend ist ☐
nicht planar ist. ☐

5. Die Kongruenz $46x \equiv 1 \bmod 91$ besitzt die Lösung $x = \big(\,\mathbf{2}\,\big)$.
(Hier war eine Zahl zwischen 0 und 90 einzutragen.)

6. In jedem planaren Graphen mit e Ecken, k Kanten und f Zellen gilt:
$e - f + k = 3$ ☐
$e = k + 1$ ☐
$k \leq 2e - 4$ ☐
Es gibt eine Ecke vom Grad 6 ☐
Es gibt eine Ecke vom Grad $\leq$ 5 ☐

7. G sei ein planarer Graph ohne Ecken vom Grad 1 oder 2, $\hat{G}$ der dazu duale Graph. Dann gilt:
G und $\hat{G}$ besitzen die gleiche chromatische Zahl ☐
$\hat{G}$ ist isomorph zu G ☐
G **und** $\hat{G}$ **haben gleichviele Kanten** ☐
G und $\hat{G}$ haben gleichviele Ecken ☐
$\hat{G}$ ist ein Baum. ☐

8. Die Kongruenz $x^2 \equiv 1 \bmod 24$ hat in $\mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$ genau $(\mathbf{8})$ verschiedene Lösungen. (Hier war eine Zahl zwischen 0 und 24 einzutragen.)

9. Für die beiden Kongruenzen $x \equiv 7 \bmod 18$ und $x \equiv 3 \bmod 10$ gibt es unter den ganzen Zahlen x, $1 \leq x \leq 180$,
keine gemeinsame Lösung ☐
genau eine gemeinsame Lösung ☐
genau zwei gemeinsame Lösungen ☐
genau vier gemeinsame Lösungen. ☐

10. Sei $n > 1$. Die Kongruenz $ax + b \equiv c \bmod n$ besitzt eine ganzzahlige Lösung x immer dann, wenn die ganzen Zahlen a, b, c, n folgende Bedingung erfüllen:
$a > 0$ ☐
n ist Primzahl ☐
$c - b$ und n sind teilerfremd ☐
a **und** n **sind teilerfremd.** ☐

11. Eine zyklische Gruppe der Ordnung 12 hat
keine Untergruppe ☐
genau zwei Untergruppen ☐
je eine Untergruppe der Ordnung 1, 2, 3, 4, 6, 12 ☐
vier verschiedene Untergruppen der Ordnung 3. ☐

12. Es ist bis heute nicht gelungen, einen Polynomzeitalgorithmus zu finden, um
zu entscheiden, ob in einem Graphen ein Hamiltonkreis existiert ☐
zu entscheiden, ob in einem Graphen ein Eulerkreis existiert ☐
einen kürzesten Weg in einem Netzwerk zu finden ☐
einen Graphen zu färben ☐
den größten gemeinsamen Teiler zweier natürlicher Zahlen zu berechnen ☐
simultane Kongruenzen zu lösen. ☐

2. Klausur zur Mathematik IV =
Diskreten Mathematik für alle Lehramtskandidaten

am 18. Juli 2006, 8.15 bis 10.00 Uhr.

Für n Treffer (= richtig gesetzte oder weggelassene Kreuze, hier schwarze und weiße Kästchen) gibt es $8 \cdot (n-20)$ Punkte, die Klausur ist also mit 28 Treffern bestanden.

Lösungen

Die Abbildung $(\mathbf{Z}/35\mathbf{Z})^* \to (\mathbf{Z}/35\mathbf{Z})^* : a \mapsto a^5$ besitzt

□ keine Umkehrabbildung, weil sie nicht injektiv ist
■ die Umkehrabbildung $b \mapsto b^5$
■ die Umkehrabbildung $b \mapsto b^{29}$
□ die Umkehrabbildung $b \mapsto b^{30}$
□ die Umkehrabbildung $b \mapsto b^{-5}$.

Sei $p > 10^{100}$ eine Primzahl und $f : \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} : x \mapsto x + 28$, die Folge x_n sei in $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ definiert durch $x_0 := 37$ und $x_{n+1} := f(x_n)$. Dann gilt:

□ Die Folge wird nicht periodisch
□ Die Folge wird periodisch mit Periode $p-1$
■ Die Folge wird periodisch mit Periode p
□ Mit Wahrscheinlichkeit > 0.8 hat die Folge eine Periode $< 4\sqrt{p}$

Die natürliche Zahl n besitze mindestens drei Primfaktoren. Dann ist bzw. sind

■ mindestens ein Primfaktor $\leq \sqrt[3]{n}$
□ alle Primfaktoren $\leq \sqrt[3]{n}$
■ mindestens ein Primfaktor $\leq \sqrt{n}$.

$n \in \mathbf{N}$ (ungerade) sei eine Carmichaelzahl. Dann gilt:

■ Wenn $(a, n) = 1$, gilt $a^n \equiv a \bmod n$, obwohl n keine Primzahl ist
■ n hat mindestens drei Primfaktoren
■ n ist „quadratfrei", d.h. außer 1 gibt es keinen Teiler m^2, $m \in \mathbf{N}$, von n .

$C := \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0)\} \subset \mathbf{F}_2^3$
☐ ist ein linearer Code
☐ ist 2–fehlererkennend
☐ ist 1–fehlerkorrigierend.

Welche Aussagen stimmen hier?
☐ Die Generatormatrix des Hammingcodes H_3 hat drei Zeilen
■ Die Kontrollmatrix des Hammingcodes H_3 hat drei Spalten
■ Die Informationsrate des Hammingcodes H_3 ist 4/7
☐ Die Informationsrate des Hammingcodes H_5 ist 29/31
■ Die Generatormatrix des Verdoppelungscodes ist $(1,1)$
■ Die Kontrollmatrix des Paritätscodes besteht aus einer Spalte aus lauter Einsen
☐ Ein binärer linearer $(9,5)$–Code besteht aus 64 Codewörtern
☐ Ein 2–fehlerkorrigierender Code ist 5–fehlererkennend
■ Der Paritätscode ist ein $(n, n-1)$–Code.

In einer zyklischen Gruppe der Ordnung n besitzt
■ die Gleichung $x^3 = 1$ drei Lösungen, wenn n durch 3 teilbar ist
☐ die Gleichung $x^2 = 1$ immer zwei Lösungen
■ die Gleichung $x^n = 1$ immer n Lösungen
☐ die Gleichung $x = x^{-1}$ keine Lösung.

Es gibt einen
☐ $2-(4,3,1)$–Blockplan
☐ $2-(5,3,1)$–Blockplan
☐ $2-(6,3,1)$–Blockplan
■ $2-(7,3,1)$–Blockplan
■ $2-(9,3,1)$–Blockplan.

Ist das so richtig?
■ In einer projektiven Ebene haben je zwei verschiedene Geraden genau einen Schnittpunkt
☐ Für jedes $n > 4$ gibt es eine projektive Ebene mit n Punkten
■ Eine affine Ebene der Ordnung n liefert einen $2-(n^2, n, 1)$–Blockplan
■ Für jedes $n > 1$ gibt es ein lateinisches $n \times n$–Quadrat
☐ Für jedes $n > 1$ gibt es n orthogonale lateinische $n \times n$–Quadrate.

Nachklausur zur Mathematik IV =
Diskreten Mathematik für alle Lehramtskandidaten

am 16. Oktober 2006, 8.15 bis 10.00 Uhr. Bitte schreiben Sie auf den Aufgabenzettel leserlich Ihren Namen, Vornamen, Ihre Matrikelnummer und den Namen Ihres Tutors. Der Aufgabenzettel ist mit abzugeben! Bei den Aufgaben 2, 3 und 12 genügt „ja" oder „nein", bei den Aufgaben 1, 6, 7 und 9 die Angabe der Lösung (kann einfach auf dem Aufgabenzettel notiert werden). Die Lösungen der anderen Aufgaben bitte auf andere Blätter, aber alle mit Ihrem Namen versehen! Sie können insgesamt 24 Punkte erreichen, die Klausur ist bestanden mit 9 Punkten.

1. Geben Sie die chromatische Zahl des Würfelgraphen an. (1 Punkt)
2. Besitzt der Oktaedergraph einen Eulerkreis? (1 Punkt)
3. Besitzt der Oktaedergraph einen Hamiltonkreis? (1 Punkt)
4. Man beweise: Ein zusammenhängender Graph G mit mehr als einem Eckpunkt ist bipartit genau dann, wenn alle Kreise in G gerade Länge haben. (3 Punkte)
5. Zeichnen Sie möglichst viele nicht–isomorphe (zusammenhängende) Bäume mit 5 Eckpunkten. Geben Sie ein kurzes Argument, warum die von Ihnen gezeichneten Bäume nicht isomorph sind und warum Ihre Liste vollständig ist. (3 Punkte)
6. Lösen Sie die Kongruenz $19 \cdot x \equiv 1 \bmod 63$ (2 Punkte)
7. Geben Sie vier verschiedene Lösungen $x \in \mathbf{Z}/35\mathbf{Z}$ von $x^2 \equiv 1 \bmod 35$ an. (2 Punkte)
8. φ bezeichne die Eulersche Phi–Funktion. Begründen Sie: Es gilt $\varphi(n) = n - 1$ genau dann, wenn n eine Primzahl ist. (2 Punkte)
9. Geben Sie die Generatormatrix und die Kontrollmatrix des (binären) Verdoppelungscodes an. (2 Punkte)
10. Geben Sie ein Beispiel einer endlichen affinen Ebene an! Wieviele Punkte, wieviele Geraden enthält Ihre Ebene? Wieviele Geraden enhält eine Parallelenschar? (3 Punkte)
11. Zeigen Sie, dass eine projektive Ebene mindestens 7 Punkte besitzt. (3 Punkte)
12. Gibt es eine projektive Ebene mit genau 7 Punkten? (1 Punkt)

Klausurergebnisse

Zur Ermittlung der Punktezahl in der 1. Klausur ist die Anzahl der richtigen Antworten mit $13\frac{1}{3}$ zu multiplizieren. Mit fünf Richtigen ist die Klausur bestanden.
In der 2. Klausur ist bei einer Anzahl $n = 0, \dots, 41$ von Treffern die Punktezahl durch $8 \cdot (n - 20)$ gegeben. Bestanden ist sie mit 28 Treffern.

Ergebnisübersicht 1. Klausur

Richtige Antworten	0–3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anzahlen	0	1	6	10	28	41	40	44	16	5

Ergebnisübersicht 2. Klausur

Treffer	0–24	25–27	28–30	31–33	34–36	37–41
Anzahlen	4	12	40	75	41	17

Ergebnisse Nachklausur Diskrete Mathematik für L1235

s = Schein (≥ 9 Punkte)   n = Nicht Schein (< 9 Punkte)

Matrikelnr.	Punkte	s/n
1935653	10	s
2065409	9	s
2269205	12	s
2277213	9	s
2285179	7,5	n
2464055	20	s
2503453	10	s
2701750	4	n
2762498	8	n
2831426	14	s
2832179	7	n
2858166	8	n
2872236	7	n
2942328	7	n
2961406	9	s
2962159	16	s