Einführung in die computerorientierte Mathematik
WS 2009/2010
Prof. Dr. Thorsten Theobald
Dipl.-Math.oec. Cordian Riener

Blatt 7 Abgabe: Fr 04.12.09, 10:05 Uhr

Aufgabe 1.
Sei a_n die Anzahl der binären Zeichenfolgen (also aus Nullen und Einsen bestehenden Zeichenfolgen) der Länge n, die keine zwei aufeinanderfolgenden Nullen enthalten. Zeigen Sie $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 3$ und ermitteln Sie daraus eine Ausdruck für a_n.

Aufgabe 2.
Die Lukas-Zahlen L_m sind definiert durch $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ sowie

$$L_n \;=\; L_{n-1} + L_{n-2} \quad \text{für } n \geq 3\,.$$

Bestimmen Sie einen expliziten Ausdruck für L_n.

Aufgabe 3.
Sei D_n die früher eingeführte Anzahl der Unordnungen (Derangements) einer n-elementigen endlichen Menge.

1. Zeigen Sie die Rekursionsbeziehung

   $$D_n \;=\; (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \qquad \text{für } n \geq 2\,.$$

   Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle, dass das erste mit einem anderen Element in der Unordnung vertauscht ist bzw. dass dies nicht der Fall ist.

2. Zeigen Sie durch vollständige Induktion

   $$D_n - nD_{n-1} \;=\; (-1)^n \qquad \text{für } n \geq 2\,.$$

   Folgern Sie daraus die bereits früher hergeleitete Formel

   $$D_n \;=\; n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\,.$$

Aufgabe 4.

1. Bestimmen Sie mittels Maple die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen (Derangements) auf 6 Elementen.

2. Schreiben Sie eine Maple-Prozedur, die zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl D_n der Derangements auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$ bestimmt und alle Derangements ausgibt.