Geometrische und algebraische Methoden in der Kombinatorik

5. Übungsblatt — Abgabe 6. Dezember

Übungsblätter sollen in **ZWEIERGRUPPEN** bearbeitet und Dienstags **vor Beginn** der Vorlesung abgegeben werden.

Aufgabe 1. ■ Sei C_2 das Kamm-Poset mit $b_1 \prec a_1 \prec a_2$ und $b_2 \prec a_2$.

i) Bestimme das Ordnungspolynom $\Omega_{C_2}(n)$.

ii) Zeige, dass $\Omega_{C_2}(n)$ genau die Anzahl der Partitionen von $[n+2]$ in n nichtleere und disjunkte Teile bis auf Reihenfolge ist[1].

iii) Optional: Sei C_n das Kamm-Poset auf $2n$ Elementen. Zeige, dass $\Omega_{C_d}(n) = S(n+d,n)$ für alle $n \geq 1$. Hier ist $S(n,k)$ die Stirling-Zahl der zweiten Art.

Aufgabe 2. ■ Sei $\Pi = \{a_1, \dots, a_d\}$ eine Halbordnung so dass $i < j$ wenn $a_i \prec a_j$. Für eine Teilmenge $S \subseteq \Pi$ definiere $\mathbf{1}_S \in \{0,1\}^d$ mit $(\mathbf{1}_S)_i = 1$ wenn $a_i \in S$ und $(\mathbf{1}_S)_i = 0$ sonst.

i) $F \subseteq \Pi$ ist *Filter*, wenn $a \in F$ und $a \prec b$ impliziert, dass $b \in F$. Zeige, dass wenn $p \in \mathcal{O}_\Pi \cap \mathbb{Z}^d$ ein Gitterpunkt ist, dann ist $p = \mathbf{1}_F$ für $F \subseteq \Pi$ ein Filter.

ii) Seien $F_1, \dots, F_m \subseteq \Pi$ Filter. Zeige, dass es ein τ gibt mit $\mathbf{1}_{F_k} \in \Delta_\tau$ für alle $k = 1, \dots, m$ genau dann, wenn $F_i \subseteq F_j$ oder $F_j \subseteq F_i$ für alle $i \neq j$.

Aufgabe 3. Ein *gerichteter Graph* (oder Digraph) ist ein Paar $D = (V, A)$ mit $A \subseteq E \times E$. D heisst *azyklisch*, wenn es keine gerichteten Kreise gibt[2].

i) Sei $G = (V, E)$ ein einfacher ungerichteter Graph und $c : V \to [n]$ eine n-Färbung. Zeige, dass $G_c = (V, A)$ mit $A = \{(u,v) : uv \in E, c(u) < c(v)\}$ einen azyklischen Digraph definiert.

ii) Zeige, dass es für jede azyklische Orientierung D von G eine Färbung c gibt mit $D = G_c$.

iii) Sei $\preceq$ die Menge aller Paare $(u,v) \in V \times V$ so dass es einen gerichteten Weg von u nach v gibt. Zeige, dass $\preceq$ eine Halbordung auf V definiert.

iv) Optional: Zeige, dass $\chi_G(n) = \sum_\Pi \Omega^\circ_\Pi(n)$ wobei die Summe über alle Halbordnungen ist die aus azyklischen Orientierungen von G hervorgehen.

Aufgabe 4. Für $r, s \geq 1$, sei $\Pi_{r,s} := [r] \uplus [s]$ die disjunkte Vereinigung von zwei Ketten. Wir wissen schon, dass $e(\Pi_{r,s}) = \binom{r+s}{r}$. Für $0 \leq k < r+s$, bestimme $A(\Pi, \ell_0, k)$. Also die Anzahl linearer Erweiterungen ℓ so dass $\tau = \ell_0 \circ \ell^{-1}$ genau k Abstiege hat.

---

[1] Also, die Anzahl Möglichkeiten $n+2$ unterscheidbare Bälle auf n nicht-unterscheidbare(!) Boxen aufzuteilen, so dass jede Box mindestens einen Ball bekommt.

[2] Also keine keine Folge $v_0 v_1 \dots v_k$ von Knoten mit $k \geq 1$ und $v_{i-1}v_i \in A$ für $i = 1, \dots, k$ und $v_0 v_k \in A$.