GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

WiSe 2016/17
Prof. Dr. Raman Sanyal

Geometrische und algebraische Methoden in der Kombinatorik

2. Übungsblatt — Abgabe 8. November (**zwei Wochen Bearbeitungszeit**)

Übungsblätter sollen in **Zweiergruppen** bearbeitet und Dienstags **vor Beginn** der Vorlesung abgegeben werden. Jede Aufgabe wird binär mit ‘richtig’ oder ‘falsch’ bewertet. Das Übungsblatt gilt als bestanden, wenn Sie mindestens **zwei** Aufgaben richtig gelöst haben. Die mit ■ markierten Aufgaben dienen zur Vertiefung des Stoffs und können auch als Frage in der Prüfung auftreten.

Aufgabe 1. ■

i) Finde eine explizite rationale Beschreibung der folgenden Zählfunktionen:
   (a) $f(0) = 2,\ f(1) = 3,\ f(n+2) = 3f(n+1) - 2f(n)$ für $n \geq 0$.
   (b) $f(0) = 0,\ f(1) = 2,\ f(n+2) = 4f(n+1) - 4f(n)$ für $n \geq 0$.

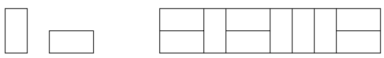
ii) Seien $f(n), g(n)$ zwei rationale Zählfunktionen. Zeige, dass $h(n) := f(n)g(n)$ auch eine rationale Zählfunktion ist.

Aufgabe 2. ■ Zeige, dass eine Zählfunktion $f(n)$ ein Polynom vom Grad $\leq d$ ist, genau dann wenn

$$f(n+d+1) \quad = \quad \sum_{i=0}^{d} \binom{d+1}{i} (-1)^{d-i} f(n+i)$$

für alle $n \geq 0$ gilt.

Aufgabe 3. Sei $f(n)$ die Anzahl der Pflasterungen eines Rechtecks der Größe $2 \times n$ mit Rechtecken der Größe 2×1 und 1×2.



Zeige, dass $F(z) = \sum_{n \geq 0} f(n) z^n$ eine rationale erzeugenden Funktion ist und finde eine rationale Beschreibung von $f(n)$.

Aufgabe 4. Für eine Funktion $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ und $n > 0$, sei $H_f(n) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die Matrix[1] mit $H_f(n)_{ij} = f(i+j-2)$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Zum Beispiel, für $n = 4$ ist

$$H_f(4) \quad = \quad \begin{pmatrix} f(0) & f(1) & f(2) & f(3) \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) \\ f(2) & f(3) & f(4) & f(5) \\ f(3) & f(4) & f(5) & f(6) \end{pmatrix}.$$

i) Zeige, dass wenn f eine lineare Rekurrenz erfüllt, dann gibt es ein n_0, so dass $\det H_f(n) = 0$ für alle $n > n_0$.

ii) Optional: Zeige, dass auch die Umkehrung gilt.

[1] Eine Matrix H mit $H_{ij} = H_{kl}$ für $i + j = k + l$ nennt sich eine *Hankelmatrix*.