Einführung in die computerorientierte Mathematik
WS 2009/2010
Prof. Dr. Thorsten Theobald
Dipl.-Math.oec. Cordian Riener

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Blatt 4 — Abgabe: Fr 13.11.09, 10:05 Uhr

Aufgabe 1.
Zu einem Graphen $G = (V, E)$ definieren wir den komplementären Graphen $\bar{G} = (V, \bar{E})$, der die selbe Knotenmenge V hat und für dessen Kantenmenge $\bar{E}$ gilt

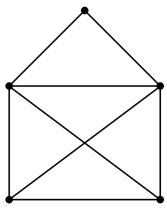
$$\bar{E} = \{\{v_1, v_2\} \mid v_1 \neq v_2 \in V,\ \{v_1, v_2\} \notin E\}\ .$$

Zeigen Sie, dass mindestens einer der Graphen G oder $\bar{G}$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 2.
Sei G ein zusammenhängender Graph der mindestens zwei Knoten enthält. Beweisen Sie, dass es einen Knoten gibt, den man (zusammen mit allen zu ihm inzidenten Kanten) entfernen kann und der verbleibende Graph trotzdem immer noch zusammenhängend ist.

Aufgabe 3.
Zwischen 20 Städten bestehen 172 direkte Flugverbindungen, die jeweils in beide Richtungen benutzbar sind. Keine zwei von ihnen verbinden dieselben beiden Städte. Zeigen Sie, dass man von jeder Stadt in jede andere fliegen kann, ohne dabei mehr als einmal umzusteigen.

Aufgabe 4.
Beim Kinderspiel „Das Haus vom Nikolaus“ wird ein Haus aus acht Strecken gezeichnet. Dabei soll keine Strecke doppelt durchlaufen und der Stift nie abgesetzt werden. In der Abbildung ist der dadurch entstehende Graph dargestellt.



1. Versuchen Sie das Haus vom Nikolaus zu zeichnen und markieren Sie dabei den Anfangs- und Endpunkt Ihres Zeichenweges.
2. Ein zusammenhängender Zug in einem Graphen heißt *Eulerzug*, wenn jede Kante genau einmal benutzt wird. Zeigen Sie: Gibt es einen Eulerzug in einem Graphen G, so existieren höchstens zwei Knoten mit ungeradem Grad.
   Bemerkung: Auch die Rückrichtung dieser Aussage gilt.
3. Ein in sich geschlossener Eulerzug wird *Eulerkreis* genannt. Was muss hier für den Grad der Ecken gelten? (Betrachten Sie beispielsweise das Haus vom Nikolaus. Gibt es hier einen Eulerkreis?)