2.7 Der metrische Tensor

In der Praxis wird zur einfacheren Umrechnung bei Basistransformationen nicht nur die Transformationsmatrix benutzt.

Betrachten wir den $\mathbb{R}^3$ (da dies in Anwendungen die größte Rolle spielt) mit einer Basis $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Die zugehörige Transformationsmatrix für den Wechsel von diesem Koordinatensystem in das kartesische nennen wir zur Abkürzung einfach M:

$$M = T_E^B = \begin{pmatrix} \vec{a} \; \vec{b} \; \vec{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} .$$

Seien $\vec{v}_B$ und $\vec{w}_B$ die Darstellungen zweier Vektoren bezüglich B, dann erhalten wir die Darstellungen bezüglich E durch

$$\vec{v}_E = M \cdot \vec{v}_B \qquad \text{und} \qquad \vec{w}_E = M \cdot \vec{w}_B .$$

Schauen wir uns nun einmal das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren an. Wie wir in Bemerkung 2.3.4 gesehen haben, ist das Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{w}$ nichts anderes als das Matrixprodukt $\vec{v}^T \cdot \vec{w}$.

Wir haben also unter Verwendung von Satz 2.3.3(2)

$$\vec{v}_E^T \cdot \vec{w}_E = (M\vec{v}_B)^T \cdot M\vec{w}_B = \vec{v}_B^T \cdot M^T M \cdot \vec{w}_B = \vec{v}_B^T \cdot G \cdot \vec{w}_B ,$$

wenn wir $G = M^T M$ abkürzen.

2.7.1 Satz Ist $M = T_E^B$ die Transformationsmatrix zum Basiswechsel von B nach E, dann heißt $G = M^T M$ *metrischer Tensor* und es gilt für das Skalarprodukt

$$\vec{v}_E \cdot \vec{w}_E = \vec{v}_B^T \cdot G \cdot \vec{w}_B .$$

Natürlich kann man G als Produkt $M^T M$ ausrechnen. Es geht aber auch einfacher:

$$\begin{aligned} G = M^T M &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \\ b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 & b_1b_1 + b_2b_2 + b_3b_3 & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 \\ c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 & c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 & c_1c_1 + c_2c_2 + c_3c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

Der metrische Tensor G ist also also die Matrix der Skalarprodukte der Basisvektoren B.

Ist $\alpha = \sphericalangle(\vec{b}, \vec{c})$, $\beta = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{c})$ und $\gamma = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, können wir eine weitere Darstellung des metrischen Tensors finden.

Es ist z.B. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$ (Satz 1.3.5) und nach der Winkeldefinition 1.4.1 ist beispielsweise $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\gamma$. Aus (4) erhalten wir damit

$$G = \begin{pmatrix} \|a\|^2 & \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\gamma & \|\vec{a}\|\|\vec{c}\|\cos\beta \\ \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\gamma & \|b\|^2 & \|\vec{b}\|\|\vec{c}\|\cos\alpha \\ \|\vec{a}\|\|\vec{c}\|\cos\beta & \|\vec{b}\|\|\vec{c}\|\cos\alpha & \|c\|^2 \end{pmatrix}$$

Mit diesen Darstellungen des metrischen Tensors G können wir also das Skalarprodukt zweier Vektoren bezüglich der Basis aus Einheitsvektoren ausrechnen, ohne die Vektoren erst in diese Basis umrechnen zu müssen.

Auch das Volumen V des Spats, der von den drei Basisvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird, kann mittels des metrischen Tensors berechnet werden.

Unter Verwendung der Sarrus-Regel ist

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\
&= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \\
&= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1 \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= \det M \ ,
\end{aligned} \tag{5}$$

also $V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |\det M|$. Daraus folgt

$$\det G = \det\left(M^T M\right) = \det M^T \cdot \det M = (\det M)^2 = V^2 \ ,$$

wir haben also

$$V = \sqrt{\det G} \ .$$

Die Beziehung in (5) erlaubt uns auch eine geometrische Anschauung davon zu bekommen, was die Determinante ist, zumindest im $\mathbb{R}^3$:

Betrachten wir die Spalten einer Matrix als Vektoren, ist die Determinante gerade das Spatprodukt, entspricht also dem Volumen des aufgespannten Spats, wobei sich das Vorzeichen danach richtet, ob es sich um ein Links- oder Rechtssystem handelt.

2.8 Lineare Gleichungssysteme lösen

Wir erinnern uns: eigentlich wollten wir lineare Gleichungssysteme lösen und haben Matrizen als abkürzende Schreibweisen für diese Gleichungssysteme kennen gelernt. Benutzen wir jetzt unsere Kenntnisse über Matrizen, um uns wieder dem ursprünglichen Ziel zu widmen.

Ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= y_m \ .
\end{aligned}$$

mit m Gleichungen und n Unbekannten können wir auch als Matrixprodukt schreiben:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Ist A eine (m, n)-Matrix, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$, dann ist also

$$A\vec{x} = \vec{y}$$

ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten.

2.8.1 Beispiel

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & 2x_1 - x_2 = 1 \\ \text{und} \quad & x_1 + 3x_2 = 2 \end{aligned}$$

2.8.2 Bezeichnungen (1) Ist $m = n$, dann heißt das Gleichungssystem *quadratisch* (A ist dann auch quadratisch).

(2) Ist $\vec{y} = \vec{0}$, also $y_1 = y_2 = \cdots y_m = 0$, nennt man das Gleichungssystem *homogen*, ansonsten *inhomogen*.

2.8.3 Beispiele (1)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 1 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist inhomogen und quadratisch.

Schauen wir uns die erste Gleichung näher an: $x_1 - x_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x_1 - 2x_2 = 0$ und das steht in Widerspruch zur zweiten Gleichung. Das Gleichungssystem kann also *keine Lösung* haben.

(2)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist homogen und quadratisch und hat, wie wir durch Einsetzen leicht nachrechnen können, *mehrere Lösungen*: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ldots$

Tatsächlich ist jeder Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $x_1 = x_2$ eine Lösung des Systems.

Ein lineares Gleichungssystem muss also nicht eindeutig lösbar sein, es kann auch keine oder mehrere Lösungen geben. Bei homogenen Systemen ist eine Lösung aber offensichtlich immer zu finden:

2.8.4 Satz Ein homogenes Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ hat stets die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.
$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ ist also immer (eine) Lösung des Gleichungssystems.

Betrachten wir zuerst quadratische Gleichungssysteme. In diesem Fall können wir die Lösbarkeit, sogar die Eindeutigkeit der Lösung, recht leicht entscheiden:

2.8.5 Satz Sei $A\vec{x} = \vec{y}$ ein quadratisches lineares Gleichungssystem. Das System ist genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$\det A \neq 0 \ .$$

Das Gleichungssystem ist also genau dann eindeutig lösbar, wenn A invertierbar ist. Diese Beobachtung können wir nutzen, um die Lösung auch zu berechnen:

Sei A invertierbar, dann gilt

$$A\vec{x} = \vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad E\vec{x} = A^{-1}\vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = A^{-1}\vec{y}$$

Wir haben also:

2.8.6 Satz Sei A eine quadratische Matrix mit $\det A \neq 0$. Dann ist $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$ die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{y}$.

2.8.7 Beispiel

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ -15x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= -10 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Auf Seite 20 hatten wir diese Matrix bereits invertiert: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Es folgt $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, die (einzige) Lösung des Gleichungssystems ist also

$$x_1 = 1 \ , \quad x_2 = 0 \ \text{ und } \ x_3 = -1 \ .$$

2.8.8 Bemerkung Die Sätze 2.8.4 und 2.8.5 können wir natürlich kombinieren. Betrachten wir ein homogenes quadratisches Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ mit $\det A \neq 0$. Dann ist $\vec{x} = \vec{0}$ die einzige Lösung.

Ist allerdings $\det A = 0$, dann muss es außer $\vec{x} = \vec{0}$ noch weitere Lösungen geben. Da A in diesem Fall aber nicht invertierbar ist, können wir diese Lösungen nicht durch Invertieren berechnen.

2.9 Der Gauß-Algorithmus

Wir haben schon gesehen, dass Dreiecksmatrizen z.B. bei der Berechnung von Determinanten große Vorteile bieten. Das ist auch der Fall, wenn lineare Gleichungssysteme durch Dreiecksmatrizen beschrieben werden.

Bevor wir uns dies genauer anschauen, überlegen wir uns, dass wir jedes lineare Gleichungssystem auf diese Gestalt bringen können.

Betrachten wir $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

1. Schritt

Wenn $a_{11} = 0$, vertausche zwei Zeilen, so dass anschließend $a_{11} \neq 0$.

Dr. Peter Bauer
SS 25 — 23. Mai 2025
Rev: 14134

2. Schritt

- Addiere die mit $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ multiplizierte 1. Zeile zur zweiten.
- Addiere die mit $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ multiplizierte 1. Zeile zur dritten.
- ...
- Addiere die mit $-\dfrac{a_{n1}}{a_{11}}$ multiplizierte 1. Zeile zur n-ten.

Wir erhalten eine neue Matrix. In der neuen Matrix sieht jedoch die erste Spalte schon so aus, wie wir das von einer (oberen) Dreiecksmatrix erwarten:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

3. Schritt

Wiederhole das Verfahren mit der Untermatrix A_{11} statt A. Die erste Zeile und erste Spalte bleibt unverändert.

Als nächstes bleiben die ersten beiden Spalten und Zeilen unverändert und wir wiederholen das Verfahren für die verbleibende $(n-2, n-2)$-Matrix und so weiter...

Nach genügend Wiederholungen dieser Schritte erhalten wir eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Schauen wir uns zwei Beispiele an:

2.9.1 Beispiele (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} & a_{11} = 1 \neq 0 \\ & \left(-\tfrac{2}{1}\right) \cdot (1,0,2) = (-2,0,-4) \\ & \left(-\tfrac{-3}{1}\right) \cdot (1,0,2) = (3,0,6) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 13 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} & a_{22} = -1 \neq 0 \\ & \left(-\tfrac{2}{-1}\right) \cdot (0,-1,-1) = (0,-2,-2) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a_{11} = 1 \neq 0 \\ \left(-\frac{2}{1}\right) \cdot (1,0,2) = (-2,0,-4)) \\ \left(-\frac{-3}{1}\right) \cdot (1,0,2) = (3,0,6) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 13 \end{pmatrix} \qquad a_{22} = 0, \text{ also 2. und 3. Zeile vertauschen}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.10 Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus

Betrachten wir das Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{y}$$

mit einer (m, n)-Matrix A, also mit n Unbekannten und m Gleichungen. Um das Gleichungssystem zu lösen, fassen wir A und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ zu einer Matrix zusammen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & y_m \end{pmatrix}$$

Als nächstes verwenden wir den Gauß-Algorithmus, um diese Matrix, soweit das natürlich möglich ist, auf „Dreiecksform“ zu bringen. Eventuell entstehen dabei Zeilen, die vollständig gleich 0 sind. Diese Zeilen streichen wir ersatzlos (m wird dann um 1 verringert).

Je nachdem, wie viele Zeilen und Spalten wir haben, erhalten wir Matrizen der Form[2]

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ & & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} & \beta_3 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & \alpha_{nn} & \beta_n \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ & & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} & \beta_3 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & \alpha_{in} & \beta_i \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & \beta_m \end{pmatrix}$$

[2]Einträge, die durch den Gauß-Algorithmus 0 sind, werden aus Gründen der Übersichtlichkeit oft weggelassen.

oder aber

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ & & \alpha_{33} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{3n} & \beta_3 \\ & & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & \alpha_{mm} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{pmatrix}.$$

Die neue Matrix stellt natürlich auch ein lineares Gleichungssystem dar. Die Lösung dieses neuen Systems ist auch eine Lösung des ursprünglichen Gleichungssystems!

Schauen wir uns die drei Fälle näher an:

(1)

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ & & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} & \beta_3 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & \alpha_{nn} & \beta_n \end{pmatrix}$$

Dies entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \cdots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\ \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \cdots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2 \\ &\vdots \\ \alpha_{nn}x_n &= \beta_n \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem ist durch „rückwärts Einsetzen“ recht leicht zu lösen: aus der letzten Zeile ergibt sich

$$x_n = \frac{\beta_n}{\alpha_{nn}}$$

und dies können wir in die vorletzte Zeile einsetzen und so weiter, bis wir alle x_k ausgerechnet haben.

2.10.1 Beispiel

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Notieren wir dies als Matrix und führen den Gauß-Algorithmus durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{also} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ -x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 4x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile folgt $x_3 = 2$. Setzen wir dies in die vorletzte Zeile ein, ergibt sich

$$-x_2 - 4 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -8$$

und in der ersten Zeile erhalten wir

$$x_1 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -4 \,.$$

(2)

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ & & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} & \beta_3 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & \alpha_{nn} & \beta_n \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & \beta_m \end{pmatrix}$$

Schauen wir uns z.B. die letzte Zeile an: Die zugehörige Gleichung lautet $0 = \beta_m$.

Da aber Zeilen, die nur aus Nullen bestehen, gestrichen wurden, muss $\beta_m \neq 0$ sein. Wir haben also einen Widerspruch; das lineare Gleichungssystem hat *keine Lösung*.

2.10.2 Beispiel

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Der Gauß-Algorithmus ergibt hier

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 6 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 23 & -29 & 1 \\ 0 & 0 & 23 & -29 & -1 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 23 & -29 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die letzte Zeile besagt $0 = -2$, das Gleichungssystem ist also nicht lösbar.

(3)

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ & & \alpha_{33} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{3n} & \beta_3 \\ & & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & \alpha_{mm} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{pmatrix}$$

mit dem zugehörigen linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\ \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2 \\ &\vdots \\ \alpha_{mm}x_m + \alpha_{m,m+1}x_{m+1} \cdots + \alpha_{mn}x_n &= \beta_m \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist äquivalent zu

$$x_m = \beta_m - \frac{\alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + \alpha_{mn}x_n}{\alpha_{mm}} \ .$$

Dieses System hat also keine eindeutige Lösung, sondern mehrere:

Für jede Wahl von $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, können wir x_m und dann durch „rückwärts Einsetzen“ $x_{m-1}, \ldots, x_1$ berechnen.

2.10.3 Beispiel

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 &= -3 \end{aligned}$$

Das Gauß-Verfahren liefert

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow &\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow &\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow &\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ -x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \end{aligned} \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile folgt für beliebige $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$

$$x_2 = x_3 + x_4 - 5$$

und daraus und aus der ersten Zeile

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\ &= 2 + 2(x_3 + x_4 - 5) - x_3 + x_4 \\ &= x_3 + 3x_4 - 8 \ . \end{aligned}$$

Wir haben hier also unendlich viele Lösungen, nämlich jeweils eine für jede beliebige Wahl von x_3 und x_4. Beispielsweise erhalten wir für $x_3 = x_4 = 0$ die Lösung

$$x_1 = -8\ ,\ x_2 = -5\ ,\ x_3 = 0\ ,\ x_4 = 0$$

und für $x_3 = 1$ und $x_4 = 0$ erhalten wir

$$x_1 = -7\ ,\ x_2 = -4\ ,\ x_3 = 1\ ,\ x_4 = 0\ .$$

2.11 Eigenwerte und Eigenvektoren

Bei vielen naturwissenschaftlichen Effekten, z.B. bei der Untersuchung von Resonanzfrequenzen, in der Quantenphysik oder der Biologie tritt folgendes Problem auf:

Sei A eine quadratische Matrix. Für welchen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \tag{6}$$

für einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$?

Natürlich gilt (6) immer für $\vec{x} = \vec{0}$ (die sog. *triviale Lösung*). Da das zu einfach ist, interessieren wir uns nur für Lösungen $\vec{x} \neq \vec{0}$:

2.11.1 Definition Sei A eine (n, n)-Matrix. Eine reelle Zahl λ, zu der ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ mit

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

existiert, heißt *Eigenwert* von A. $\vec{x}$ nennt man dann den zugehörigen *Eigenvektor*.

2.11.2 Beispiel Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}\ .$$

$\lambda = 3$ ist also Eigenwert zu A und $\binom{1}{4}$ der zu A und dem Eigenwert 3 gehörige Eigenvektor.

Es ist aber auch

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix}\ .$$

Folglich ist auch $\binom{2}{8}$ Eigenvektor zum Eigenwert 3.

Wir sehen, dass zu einem Eigenwert einer Matrix mehrere Eigenvektoren existieren können. Tatsächlich gilt:

2.11.3 Satz Ist $\vec{x}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ einer quadratischen Matrix A, dann sind auch alle Vielfachen $a\vec{x}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ Eigenvektoren zum Eigenwert λ.

Natürlich benötigen wir einen Weg, Eigenwerte und -vektoren zu finden. Es gilt

2.11.4 Satz Sei A eine quadratische Matrix. Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des *charakteristischen Polynoms*

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E)\ .$$