2.3 Transposition

Im Zusammenhang mit Matrizen wird oft eine recht einfache, aber nützliche Operation benutzt:

2.3.1 Definition Sei $A = (a_{ik})$ eine (m, n)-Matrix. Die (n, m)-Matrix

$$A^T = (a_{ki})$$

heißt *transponierte* Matrix. A^T entsteht also durch Vertauschen von Zeilen und Spalten.

2.3.2 Beispiel $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

2.3.3 Satz (Rechenregeln) Seien A, B, C Matrizen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Sofern die folgenden Operationen definiert sind, gilt

(1) $\left(A^T\right)^T = A$

(2) $(\lambda A)^T = \lambda \left(A^T\right)$

(3) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(4) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

2.3.4 Bemerkung Die Transposition erlaubt es, Vektoren wie Matrizen zu behandeln:

Betrachten wir $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$. Jeden Vektor können wir auch als $(n, 1)$-Matrix auffassen. Wir können nun verschiedene Produkte bilden:

(1) $\vec{v} \cdot \vec{w}$ ist als Matrix-Produkt nicht definiert, dies ist also stets als Skalarprodukt zu verstehen.

(2) $\vec{v}^T \cdot \vec{w} = (v_1 \ \dots \ v_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = (v_1 w_1 + \dots + v_n w_n) = \vec{v} \cdot \vec{w}$.

$\vec{v}^T \cdot \vec{w}$ ergibt als Matrixprodukt also gerade das Skalarprodukt.

(3) $\vec{v} \cdot \vec{w}^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot (w_1 \ \dots \ w_n) = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & \cdots & v_1 w_n \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & \cdots & v_2 w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n w_1 & v_n w_2 & \cdots & v_n w_n \end{pmatrix}$

$\vec{v} \cdot \vec{w}^T$ ergibt eine (n, n)-Matrix. Dieses Produkt wird auch als *dyadisches* oder *tensorielles Produkt* bezeichnet.

2.4 Die inverse Matrix

2.4.1 Definition Eine (n, n)-Matrix A ist *invertierbar*, wenn eine Matrix A^{-1} existiert mit

$$A \cdot A^{-1} = E \ .$$

A^{-1} heißt dann *inverse Matrix*.

2.4.2 Bemerkung Ist A invertierbar, dann gilt $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, was wegen der Nicht-Kommutativität des Matrixprodukts ja nicht selbstverständlich ist.

2.4.3 Beispiel Betrachten wir $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E ,$$

also ist A invertierbar und es ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ die Inverse zu A.

2.4.4 Satz Seien A, B invertierbare Matrizen. Es gilt

(1) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

(2) $E^{-1} = E$

(3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (sofern die Produkte definiert sind)

(4) $\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$

Nachzurechnen, ob eine Matrix invers zu einer anderen ist, ist recht leicht. Wie stellt man aber fest, ob eine Matrix überhaupt eine Inverse hat und wie findet man die inverse Matrix, falls sie existiert ?

Wir benötigen hierzu einige Matrixumformungen:

2.4.5 Definition Die folgenden Operationen bilden die *elementaren Zeilenoperationen*:

(1) Multiplikation einer Zeile mit einer Konstanten $\lambda \neq 0$.

(2) Vertauschung zweier Zeilen.

(3) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

2.4.6 Bemerkung Statt der elementaren Zeilenoperationen können jeweils auch entsprechende Spaltenoperationen benutzt werden. Zeilen- und Spaltenoperationen dürfen jedoch nicht „gemischt“ werden.

Mit Hilfe dieser Operationen ist es nun möglich, festzustellen, ob eine Matrix eine Inverse besitzt:

2.4.7 Satz Eine Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn A durch elementare Zeilenoperationen in die Einheitsmatrix übergeführt werden kann.

2.4.8 Beispiel

$$\begin{array}{c|l}
\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & (-2)\text{-fache 2. Zeile zu 1. Zeile addieren} \\
\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & \text{4-fache 1. Zeile zu 2. Zeile addieren} \\
\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{1. und 2. Zeile vertauschen} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{2. Zeile mit } (-1) \text{ multiplizieren} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & = E
\end{array}$$

Man kann also $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ in die Einheitsmatrix überführen, die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ist demnach invertierbar.

Dieses Verfahren kann auch benutzt werden, um die Inverse zu berechnen: Dazu werden die gleichen elementaren Zeilenoperationen, die zur Einheitsmatrix führen, auf eine Einheitsmatrix angewandt.

2.4.9 Beispiele **(1)** Schauen wir uns die Umformungen aus Beispiel 2.4.8 noch einmal an und wenden die elementaren Zeilenoperationen auch auf eine Einheitsmatrix an:

$$\begin{array}{c|c|l}
\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (-2)\text{-fache 2. Zeile zu 1. Zeile addieren} \\
\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 4\text{-fache 1. Zeile zu 2. Zeile addieren} \\
\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} & \text{1. und 2. Zeile vertauschen} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} & \text{2. Zeile mit } (-1) \text{ multiplizieren} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} &
\end{array}$$

Es ist demnach $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, wie wir zur Sicherheit auch nachrechnen können:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(2) Betrachten wir als zweites Beispiel eine $(3,3)$-Matrix:

$$\begin{array}{c|c|l}
\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 5\text{-fache 1. Zeile zu 2. Zeile addieren} \\
\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & (-2)\text{-fache 1. Zeile zu 3. Zeile addieren} \\
\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 1\text{-fache 2. Zeile zu 1. Zeile addieren} \\
\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 3\text{-fache 3. Zeile zu 1. Zeile addieren} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{3. Zeile mit } (-1) \text{ multiplizieren} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{1. und 3. Zeile vertauschen} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} &
\end{array}$$

Folglich ist $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Falls die Inverse einer Matrix existiert, können wir diese Inverse nun berechnen. Wir haben aber noch keine gute Möglichkeit, festzustellen, ob eine Matrix invertierbar ist. Ein recht einfaches Kriterium ist:

2.4.10 Satz Sei A eine (n, n)-Matrix. A ist genau dann invertierbar, wenn alle n Spaltenvektoren (oder alle n Zeilenvektoren) linear unabhängig sind.

2.4.11 Beispiel Betrachten wir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} .$$

Sind $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ die drei Spaltenvektoren dieser Matrix. Dann ist $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_3$, die drei Vektoren sind also linear abhängig, A folglich nicht invertierbar.

2.5 Determinanten

Das einzige Kriterium, das wir bislang kennen, um zu entscheiden, ob eine Matrix überhaupt invertierbar ist, ist die lineare Unabhängigkeit der Spalten- oder Zeilenvektoren (Satz 2.4.10). Leider haben wir aber noch kein wirklich bequemes Verfahren kennengelernt, lineare Unabhängigkeit nachzuweisen.

Einen Schritt in diese Richtung werden wir nun unternehmen. Die *Determinante* einer Matrix ist eine reelle Zahl, die einer quadratischen Matrix zugeordnet wird und an der wir verschiedene Charakteristika der Matrix (z.B. deren Invertierbarkeit) erkennen können.

Wie berechnen wir diese Determinante?

$(2, 2)$-Matrizen

Sei $A = (a_{ik})$ eine $(2, 2)$-Matrix. Die *Determinante* von A ist

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb .$$

2.5.1 Beispiel

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-2) = 14$$

$(3, 3)$-Matrizen

Sei $A = (a_{ik})$ eine $(3, 3)$-Matrix. Die *Determinante* von A ist

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb .$$

Man kann wohl nicht unbedingt erwarten, dass jemand sich dies merken möchte. Erfreulicherweise gibt es eine „Eselsbrücke“ für diese Formel, die *Sarrus-Regel*:

Danach werden die ersten beiden Spalten rechts der Matrix angefügt. Die drei Diagonalen von links oben nach rechts unten werden multipliziert und addiert, die drei Diagonalen von links unten nach rechts oben werden multipliziert und subtrahiert (Abbildung 11).

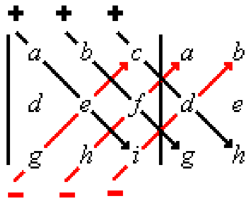

Abbildung 11: Regel von Sarrus

(n,n)-Matrizen

Bei größeren Matrizen gibt es leider keine Merkregel wie die Sarrus-Regel für die Berechnung der Determinanten. Statt dessen verwendet man einen anderen Weg:

Wir führen die Berechnung einer (n,n)-Determinante auf die Berechnung von $(n-1,n-1)$-Determinanten zurück. Diese werden dann auf $(n-2,n-2)$-Determinanten zurückgeführt und so weiter, bis wir bei $(3,3)$- oder $(2,2)$-Determinanten angelangt sind, die wir mit den obigen Formeln ausrechnen können.

Wir benötigen hierzu noch einen Begriff:

2.5.2 Definition Sei A eine (n,n)-Matrix. Die $(n-1,n-1)$-Matrix, die durch Weglassen der i-ten Zeile und der k-ten Spalte entsteht, heißt *Untermatrix* A_{ik}.

2.5.3 Beispiel Sei $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Dann ist $A_{11} = \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix}$, usw.

Die Berechnung der Determinanten erfolgt nun über folgende Entwicklungen:

2.5.4 Satz Sei $A = (a_{ik})$ eine (n,n)-Matrix. Die *Determinante* von A ist mit einem $k \in \{1,\dots,n\}$

$$\begin{aligned} \det A = |A| &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} |A_{ik}| \qquad (\textit{Entwicklung nach der } k\textit{-ten Spalte}) \\ &= (-1)^{1+k} \cdot a_{1k} \cdot |A_{1k}| + (-1)^{2+k} \cdot a_{2k} \cdot |A_{2k}| + \dots + (-1)^{n+k} \cdot a_{nk} \cdot |A_{nk}| \end{aligned}$$

beziehungsweise mit einem $i \in \{1,\dots,n\}$

$$\begin{aligned} \det A = |A| &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} |A_{ik}| \qquad (\textit{Entwicklung nach der } i\textit{-ten Zeile}) \\ &= (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot |A_{i1}| + (-1)^{i+2} \cdot a_{i2} \cdot |A_{i2}| + \dots + (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot |A_{in}| \ . \end{aligned}$$

In der Praxis geht man wie folgt vor:

(1) Wir versehen die Matrix mit einem „Vorzeichenschachbrett“ (links oben mit einem „+“ beginnend):

$$\begin{pmatrix} {}^{+}a_{11} & {}^{-}a_{12} & {}^{+}a_{13} & \cdots \\ {}^{-}a_{21} & {}^{+}a_{22} & {}^{-}a_{23} & \cdots \\ {}^{+}a_{31} & {}^{-}a_{32} & {}^{+}a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

(2) Wir suchen die Zeile oder Spalte mit den meisten Nullen.

(3) Wir entwickeln gem. Satz 2.5.4 nach dieser Zeile/Spalte. Das Vorzeichenschachbrett hilft uns dabei, das richtige Vorzeichen der jeweiligen Summanden zu finden.

(4) Wir wiederholen dieses Verfahren für jede im letzten Schritt aufgetretene (kleinere) Determinante, bis alle Determinanten (z.B. mit der Sarrus-Regel) berechnet werden können.

2.5.5 Beispiel Betrachten wir $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Mit Vorzeichenschachbrett versehen haben wir $\begin{pmatrix} {}^{+}1 & {}^{-}2 & {}^{+}0 & {}^{-}3 \\ {}^{-}-1 & {}^{+}0 & {}^{-}2 & {}^{+}1 \\ {}^{+}3 & {}^{-}2 & {}^{+}0 & {}^{-}2 \\ {}^{-}0 & {}^{+}1 & {}^{-}7 & {}^{+}1 \end{pmatrix}$.

Da die dritte Spalte zwei Nullen enthält, entwickeln wir nach dieser Spalte und erhalten (die Vorzeichen entnehmen wir dem Schachbrett)

$$\begin{aligned}
\det A &= +0 \cdot |A_{13}| - 2 \cdot |A_{23}| + 0 \cdot |A_{33}| - 7 \cdot |A_{43}| \\
&= -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -2\,(2 + 0 + 9 - 0 - 2 - 6) - 7\,(0 + 6 + (-6) - 0 - 2 - (-4)) \\
&= -2 \cdot 3 - 7 \cdot 2 \\
&= -20 \ .
\end{aligned}$$

Wir könnten natürlich auch nach einer anderen Spalte oder Zeile entwicklen, dann würden aber weniger Summanden wegfallen und wir hätten mehr Arbeit. So brauchen wir nur zwei Determinanten mit der Sarrus-Regel berechnen.

2.5.6 Satz Seien A, B quadratische Matrizen und E eine Einheitsmatrix. Dann gilt:

(1) $\det(A^T) = \det A$

(2) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

(3) $\det E = 1$

(4) Ist A invertierbar, dann ist $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

(5) Ist eine gesamte Zeile oder Spalte in A gleich Null, dann ist $\det A = 0$.

2.5.7 Bemerkung Im allgemeinen gilt *nicht* $\det(A + B) = \det A + \det B$.

Wir waren auf der Suche nach einer Technik, entscheiden zu können, ob eine Matrix invertierbar ist oder nicht. Tatsächlich erlauben Determinanten diese Unterscheidung:

2.5.8 Satz Eine quadratische Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$.

Eine Folgerung aus diesem Ergebnis ist wegen Satz 2.4.10:

2.5.9 Satz Die Zeilenvektoren bzw. Spaltenvektoren einer Matrix A sind genau dann linear unabhängig, wenn $\det A \neq 0$.

Damit haben wir auch ein recht bequemes Verfahren gefunden, Vektoren auf ihre lineare Unabhängigkeit zu prüfen.

Bei einigen speziellen Matrizen lässt sich die Determinante sehr leicht und ohne Entwicklung berechnen:

2.5.10 Definition Eine quadratische Matrix $A = (a_{ik})$ ist eine …

(1) *untere Dreiecksmatrix*, wenn $a_{ik} = 0$ für $i < k$,

(2) *obere Dreiecksmatrix*, wenn $a_{ik} = 0$ für $i > k$ und

(3) *Diagonalmatrix*, wenn $a_{ik} = 0$ für $i \neq k$.

2.5.11 Beispiele $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine obere Dreiecksmatrix,

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine Diagonalmatrix (und damit auch eine obere und eine untere Dreiecksmatrix).

2.5.12 Satz Sei $A = (a_{ik})$ eine (n, n)-Dreiecksmatrix. Dann gilt

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \ .$$

Damit können wir nun Determinanten berechnen:

2.5.13 Beispiel

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot (-1) = -18$$

2.6 Basistransformation

Wie wir nach Definition 1.7.8 wissen, können Vektoren bezüglich verschiedener Basen dargestellt werden. Normalerweise verwenden wir die Basis aus Einheitsvektoren, die einem kartesischen Koordinatensystem entspricht. Dort entspricht die z.B. Norm eines Vektors auch dem, was wir uns unter seiner Länge vorstellen (vgl. Bemerkung 1.2.3).

In manchen Situationen ist es aber sinnvoll, auch andere Basen zu betrachten. Kristallgitter sind beispielsweise oft nicht rechtwinklig ausgerichtet. Hier ist dann ein entsprechendes schiefwinkliges Koordinatensystem zweckmäßiger.

Natürlich benötigen wir eine möglichst einfache Technik, zwischen den verschiedenen Basen zu wechseln, d.h. die Darstellung eines Vektors bezüglich einer Basis in die Darstellung bezüglich einer anderen Basis umzurechnen. Dies wird *Basistransformation* oder *Basiswechsel* genannt.

2.6.1 Definition Sei $E = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ die Basis des $\mathbb{R}^n$ aus Einheitsvektoren und sei $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ eine weitere Basis des $\mathbb{R}^n$.

Sei $\vec{b}_k = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$ für $k = 1, \dots, n$, dann ist

$$T_E^B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

die *Transformationsmatrix* zum Basiswechsel von B nach E.

2.6.2 Bemerkung T_E^B ist die Matrix, deren Spalten gerade die B-Basisvektoren bilden:

$$T_E^B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \; \vec{b}_2 \; \dots \; \vec{b}_n \end{pmatrix}$$

2.6.3 Beispiel Die folgenden beiden Vektoren sind linear unabhängig und bilden also eine Basis des $\mathbb{R}^2$: $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ mit $\vec{b}_1 = \binom{-1}{0}$ und $\vec{b}_2 = \binom{-1}{1}$ Die Transformationsmatrix zum Wechsel von B nach E ist demnach

$$T_E^B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Eine solche Transformationsmatrix wird ihrem Namen tatsächlich gerecht:

2.6.4 Satz Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_B$ die Koordinatendarstellung von $\vec{v}$ bezüglich einer Basis B und sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ die Darstellung dieses Vektor bezüglich der Basis aus Einheitsvektoren. Dann ist

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = T_E^B \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} .$$

2.6.5 Beispiel Betrachten wir wieder die Basis B aus Beispiel 2.6.3. Nehmen wir an, der Vektor $\vec{v}$ hat die Darstellung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B$ bezüglich dieser Basis. Die Transformationsmatrix T_E^B haben wir bereits in Beispiel 2.6.3 berechnet. Damit hat $\vec{v}$ bezüglich der Matrix aus Einheitsvektoren die Darstellung

$$\vec{v} = T_E^B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Kennen wir die Darstellung eines Vektors bezüglich einer Basis, ist es also sehr einfach, die Darstellung bezüglich der Basis aus Einheitsvektoren zu berechnen. Wie wechseln wir aber umgekehrt von der Basis aus Einheitsvektoren zu einer anderen Basis?

2.6.6 Satz Sei E die Basis des $\mathbb{R}^n$ aus Einheitsvektoren und sei B eine weitere Basis. Dann ist die Transformationsmatrix T_E^B invertierbar und die Transformationsmatrix zum Basiswechsel von E nach B ist

$$T_B^E = \left(T_E^B\right)^{-1} .$$

2.6.7 Beispiel Betrachten wir den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis E und die Basis B aus den obigen Beispielen. Wir berechnen T_B^E durch Invertieren von $T_E^B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{c|c|l}
\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{1-fache 2. Zeile zu 1. Zeile addieren} \\
\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{1. Zeile mit } (-1) \text{ multiplizieren} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &
\end{array}$$

Also ist $T_B^E = \left(T_E^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (die Matrix ist also zu sich selbst invers), wir können also die Darstellung von $\vec{v}$ bezüglich B bestimmen:

$$\vec{v} = \left(T_E^B\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B .$$

Natürlich können wir nicht nur von B zu E oder von E nach B wechseln, auch Transformationen zwischen zwei schiefwinkligen Koordinatensystemen sind möglich: Wollen wir beispielsweise von einer Basis B zu einer Basis C wechseln, so wechseln wir zuerst von B nach E und anschließend von E nach C. Die entsprechende Transformationsmatrix erhalten wir durch Multiplikation:

$$T_C^B = T_C^E \cdot T_E^B = \left(T_E^C\right)^{-1} \cdot T_E^B .$$

2.6.8 Beispiel Betrachten wir die Basen $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ und $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$ mit

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Wir haben also

$$T_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \qquad T_C^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \cdots = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(rechnen Sie das zur Übung einmal nach). Damit ist dann

$$T_C^B = \left(T_E^C\right)^{-1} \cdot T_E^B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} .$$

Ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_B$ bezüglich B, dann ist bezüglich C

$$\vec{v} = T_C^B \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_C .$$