(2) Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wie in (1).

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} (-4) \cdot 3 - 6 \cdot 2 \\ 6 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 - (-4) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Es gilt hier also $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$, das Vektorprodukt ist folglich *nicht kommutativ* !

Es gilt aber:

1.5.3 Satz (Rechenregeln) Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (Antikommutativität)

(2) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

(3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ und $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ (Distributivität)

1.5.4 Bemerkung Da das Vektorprodukt ein Produkt ist, müssen nach der „Punkt vor Strich"-Regel die Produkte auf der rechten Seite der Gleichungen in (3) nicht in Klammern stehen.

Die Definition des Vektorprodukts ist recht abstrakt. Tatsächlich ist das Vektorprodukt aber eine Verknüpfung, die man sich sehr gut geometrisch vorstellen kann.

Betrachten wir die folgende Kombination von Vektor- und Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ &= a_2b_3a_1 - a_3b_2a_1 + a_3b_1a_2 - a_1b_3a_2 + a_1b_2a_3 - a_2b_1a_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ganz analog ist

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0 \ .$$

Das heißt, der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$.

Stellen wir uns zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im dreidimensionalen Raum vor, so sehen wir, dass es gerade zwei Richtungen gibt, die senkrecht auf diesen beiden Vektoren stehen. Die Orientierung des Produkts $\vec{a} \times \vec{b}$ lässt sich mit der *Rechte-Hand-Regel* (Abbildung 6) ermitteln: Zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung $\vec{a}$, der Zeigefinger in Richtung $\vec{b}$, dann deutet der Mittelfinger der rechten Hand in Richtung $\vec{a} \times \vec{b}$.

Wir haben damit eine Anschauung, in welche Richtung das Vektorprodukt zweier Vektoren zeigt. Auch für die Länge des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ gibt es eine einfache geometrische Interpretation: es handelt sich gerade um die Fläche des Parallelogramms, das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Bezeichnet F diese Fläche, ist also

$$F = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \ . \tag{2}$$

Die Fläche eines Parallelogramms ist das Produkt der Länge der Grundseite und der Höhe h, also

$$F = \|\vec{a}\| \cdot h \ .$$

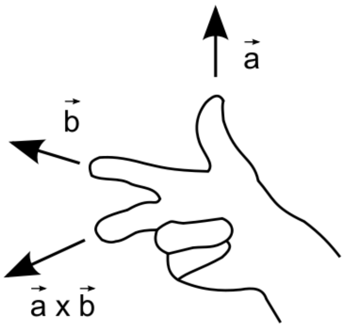

Abbildung 6: Rechte-Hand-Regel und Vektorprodukt

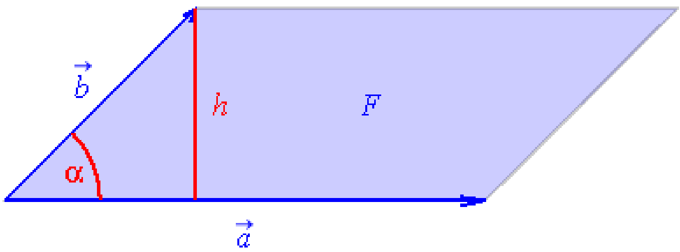

Abbildung 7: $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ entspricht der Fläche des aufgespannten Parallelogramms

Sei $\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Dann gilt

$$\sin\alpha = \frac{h}{\|\vec{b}\|} \qquad \Rightarrow \qquad h = \|\vec{b}\| \cdot \sin\alpha$$

und somit insgesamt

$$F = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\alpha \ .$$

Zusammen mit (2) haben wir also

1.5.5 Satz Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \ .$$

1.5.6 Bemerkung Es gilt also

$$\sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \ ,$$

aber dies ist zur Berechnung des Winkels weniger geeignet als Definition 1.4.1, da z.B. $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{3\pi}{4}$. Der Winkel lässt sich aus dem Sinus also auch durch Beschränkung auf das Intervall $[0, \pi]$ nicht eindeutig bestimmen.

Wie wir wissen, ist das Skalarprodukt zweier Vektoren genau dann Null, wenn die Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Stellen wir uns die analoge Frage: Wann ergibt das Vektorprodukt zweier Vektoren den Nullvektor $\vec{0}$?

Es ist

$$\vec{0} = \vec{a} \times \vec{b} \ \Leftrightarrow \ 0 = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

und dies ist der Fall, wenn $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$ oder $\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ und dies gilt wiederum für

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \text{ oder } \ = \pi \ ,$$

wenn also $\vec{a}$ und $\vec{b}$ „in einer Linie liegen“. Man bezeichnet solche Vektoren als *kollinear.*

Wir haben also:

1.5.7 Satz Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Dann sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genau dann kollinear, wenn $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

1.6 Spatprodukt

Das Spatprodukt ist ein Produkt von drei(!) Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Es handelt sich um eine Kombination von Skalar- und Vektorprodukt:

1.6.1 Definition Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Dann ist die reelle Zahl

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

das *Spatprodukt* von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

Die wesentlichen Eigenschaften des Spatprodukts beschreibt der folgende Satz:

1.6.2 Satz Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$.

(1) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ („zyklische Vertauschung“)

(2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ gilt genau dann, wenn $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *komplanar* sind, d.h. wenn diese Vektoren „in einer Ebene liegen“.

(3) $\left|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})\right|$ ist das Volumen des Spats, der von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannt wird (Abbildung 8).

(4) Ist V das Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spats, dann gilt

$$V = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}) \ .$$

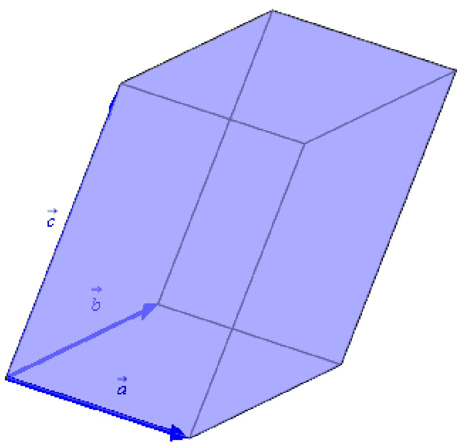

Abbildung 8: $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ entspricht dem Volumen des aufgespannten Spats

Der Betrag des Spatprodukts gibt also das Volumen des aufgespannten Spats an. Auch das Vorzeichen hat eine Interpretation:

1.6.3 Bezeichnung Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ bilden ein ...

(1) *Rechtssystem*, wenn $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) > 0$,

(2) *Linkssystem*, wenn $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) < 0$.

Offensichtlich ist hier die Reihenfolge der drei Vektoren entscheidend.

Übrigens bilden Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten (linken) Hand ein Rechtssystem (Linkssystem).

1.7 Lineare Unabhängigkeit

Betrachten wir eine Menge von Vektoren im $\mathbb{R}^n$, beispielsweise drei Vektoren im $\mathbb{R}^2$, wie wir sie in Abbildung 9 sehen.

Es ist möglich, einen der Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren darzustellen, in Abbildung 9 ist zum Beispiel

$$\vec{v}_1 = \frac{5}{3}\vec{v}_2 + \frac{7}{3}\vec{v}_3 \ .$$

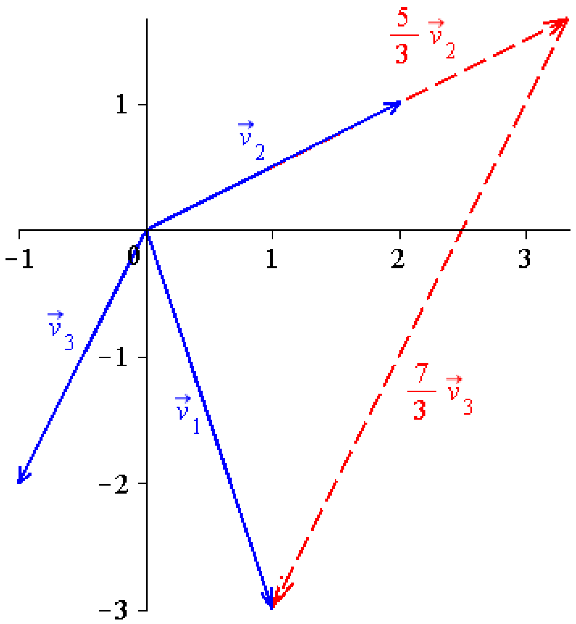

Abbildung 9: $\vec{v}_1 = \frac{5}{3}\vec{v}_2 + \frac{7}{3}\vec{v}_3$

1.7.1 Bezeichnung Kann in einer Menge von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ ein Vektor als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden, nennt man diese Vektoren *linear abhängig*.

Ist dies nicht möglich, nennt man diese Vektoren *linear unabhängig*.

1.7.2 Beispiel Die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in \mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig.

Anschaulich kann man sich dies im $\mathbb{R}^3$ (oder auch $\mathbb{R}^2$) klarmachen:

Betrachten wir nur zwei der drei Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$, dann liegen diese beiden in einer Ebene. Jede Linearkombination der beiden Vektoren wird ebenfalls in dieser Ebene liegen.

Der dritte Einheitsvektor steht aber senkrecht auf der Ebene, kann also keine Linearkombination der anderen sein.

Eine Methode, auszurechnen, wann eine Menge von Vektoren linear unabhängig ist oder nicht, werden wir noch kennenlernen. Bis dahin können wir aber bereits einige allgemeine Gesetze notieren:

Haben wir z.B. Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$, dann gilt stets $0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 = \vec{0}$. Der Nullvektor kann also immer als Linearkombination anderer Vektoren dargestellt werden:

1.7.3 Satz Vektoren sind stets linear abhängig, wenn einer der Vektoren der Nullvektor ist.

Auch, wenn die Zahl der Vektoren größer ist, als die Dimension des Raumes, können wir immer eine Linearkombination finden:

1.7.4 Satz Seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Ist $k > n$, dann sind die Vektoren linear abhängig.

Im $\mathbb{R}^n$ können also höchstens n Vektoren linear unabhängig sein und unter diesen darf nicht der Nullvektor vorkommen. Dieser Fall hat eine besondere Bedeutung:

1.7.5 Definition Seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ linear unabhängige Vektoren. Dann heißt die Menge $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ *Basis* des $\mathbb{R}^n$.

1.7.6 Beispiel Die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in \mathbb{R}^n$ sind (s.o.) linear unabhängig und bilden, da es sich um n Vektoren handelt, eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

Die Bedeutung von Basen zeigt folgender Satz:

1.7.7 Satz Sei $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Dann ist jeder Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ in eindeutiger Weise als Linearkombination der Basisvektoren $\vec{b}_i \in B$ darstellbar:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{b}_i \qquad \text{mit } \mu_i \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Für die Basis aus Einheitsvektoren hatten wir dieses Ergebnis bereits in Satz 1.4.8. Dort konnten wir sogar die Koeffizienten μ_i angeben: Es handelte sich um die Komponenten v_i des Vektors

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} .$$

1.7.8 Definition Sei $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Die Koeffizienten der Linearkombination (3) sind die *Koordinaten* des Vektors $\vec{v}$ bezüglich dieser Basis:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_B .$$

Bezüglich der Basis E aus Einheitsvektoren erhalten wir die gewohnte Darstellung

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} .$$

1.7.9 Bemerkung Die Basis E aus Einheitsvektoren liefert also die Darstellung von Vektoren bezüglich des *kartesischen Koordinatensystems*. Andere Basen definieren andere, evtl. *schiefwinklige* Koordinatensysteme.

1.7.10 Beispiel Betrachten wir $\vec{v} = \binom{2}{1}$. Es ist offensichtlich $\vec{v} = 2\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2$.

Die Vektoren $\vec{b}_1 = \binom{-1}{0}$ und $\vec{b}_2 = \binom{-1}{1}$ sind linear unabhängig, bilden also eine Basis $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ des $\mathbb{R}^2$. Wegen

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3\vec{b}_1 + 1\vec{b}_2$$

folgt

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

bezüglich der Basis B.

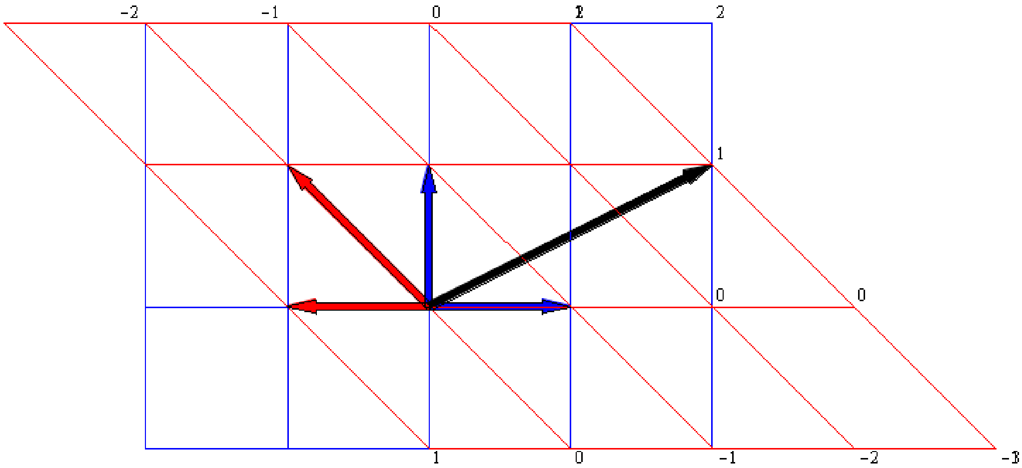

Abbildung 10: Der Vektor $\vec{v}$ (schwarz) bezüglich der Basis E (blau) und bezüglich der Basis B (rot). Es gilt $\vec{v} = \binom{2}{1}_E$ bzw. $\vec{v} = \binom{-3}{1}_B$.

Eine Frage bleibt: Wie findet man möglichst leicht die Darstellung eines Vektors bezüglich einer anderen Basis. Wir stellen diese Frage nun zurück, da sie in Abschnitt 2.6 viel leichter zu beantworten sein wird als mit unseren jetzigen Mitteln.

2 Lineare Gleichungssysteme

2.1 Matrizen

Gleichungen wie $3x = 4$ oder $x^2 - 2x + 1 = 0$ zu lösen, d.h. x zu bestimmen, ist eine der häufigsten Aufgaben, die sich uns stellen. Oftmals ist es sogar erforderlich, *Systeme* solcher Gleichungen zu lösen, d.h. mehrere Variablen aus mehreren Gleichungen zu bestimmen.

Im Allgemeinen ist es leider gar nicht möglich, eine solche Lösung zu finden. Handelt es sich aber um lineare Gleichungen, gibt es ein recht einfaches Verfahren, mit dem die Lösung(en) bestimmt werden können.

Ein *lineares Gleichungssystem* mit m Gleichungen und n *Unbekannten* $x_1, x_2, \dots, x_n$ ist das System

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= y_m \ . \end{aligned}$$

Gesucht sind die Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$, wenn die *Koeffizienten* $a_{11}, \dots, a_{mn}$ und die Konstanten $y_1, \dots, y_m$ gegeben sind.

2.1.1 Beispiel

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Der folgende Begriff dient zunächst der Vereinfachung der Schreibweise z.B. solcher Systeme:

2.1.2 Definition Das Koeffizientenschema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik}) \qquad \text{mit } i = 1, \dots, m \text{ und } k = 1, \dots, n$$

heißt *Matrix* mit m Zeilen und n Spalten oder (m, n)*-Matrix* oder $m \times n$*-Matrix.*

2.1.3 Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & -7 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

2.1.4 Bezeichnungen **(1)** Ist $m = n$, hat die Matrix also gleich viele Zeilen und Spalten, dann heißt die Matrix *quadratisch.*

(2) Die i-te Zeile $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ bildet einen *Zeilenvektor* des $\mathbb{R}^n$, die k-te Spalte $\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$ einen *Spaltenvektor* des $\mathbb{R}^m$.

(3) Die (m,n)-Matrix (a_{ik}) mit $a_{ik}=0$ für alle i,k, also

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (0) = O$$

heißt *Nullmatrix.*

(4) Die (n,n)-Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ik}) = E \qquad \text{mit } \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k \end{cases}$$

heißt *Einheitsmatrix.*

2.2 Matrixoperationen

Auch wenn Matrizen zunächst als abkürzende Schreibweisen gedacht sind, ist auch möglich, mit ihnen zu rechnen:

2.2.1 Definition Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und seien $A=(a_{ik})$ und $B=(b_{ik})$ (m,n)-Matrizen, also

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} .$$

Dann ist

(1) $A+B=(a_{ik}+b_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$

(2) $\lambda A = (\lambda a_{ik}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

(3) $-A = (-1)\cdot A$

2.2.2 Beispiel

$$2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Bemerkung Die Addition von Matrizen, die unterschiedliche Zeilen- oder Spaltenzahl haben, ist nicht definiert.

Welche Rechenregeln haben ihre Gültigkeit ?

Die Definitionen der Addition und der Multiplikation mit einem Skalar ähneln den entsprechenden Operationen, die wir von Vektoren bereits kennen. Es ist also nicht überraschend, wenn auch die gleichen Gesetze gelten:

2.2.4 Satz (Rechenregeln „+“) Seien A, B, C (m,n)-Matrizen und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Es gilt:

(1) $A + B = B + A$ (Kommutativität)

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Assoziativität)

(3) $A + O = A$ und $A - A = O$

(4) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ und $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (Distributivität)

(5) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A)$ (Assoziativität)

Wie bei Vektoren ist auch bei Matrizen Multiplizieren deutlich komplizierter als z.B. die Addition:

2.2.5 Definition Sei $A = (a_{ij})$ eine (m,n)-Matrix und $B = (b_{jk})$ eine (n,p)-Matrix. Dann ist die (m,p)-Matrix $C = (c_{ik})$ mit

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \qquad \text{für } i = 1, \ldots, m \text{ und } k = 1, \ldots, p$$

das *Produkt* von A und B:

$$C = A \cdot B \ .$$

2.2.6 Beispiel $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

2.2.7 Bemerkung Die Einträge c_{ik} von $C = A \cdot B$ sind das Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors von A und des k-ten Spaltenvektors von B.

Offenbar kann man nicht jede Matrix mit jeder anderen Matrix multiplizieren: wie aus der Definition hervorgeht, muss die Spaltenzahl des ersten Faktors der Zeilenzahl des zweiten Faktors entsprechen:

$$(m,n)\text{-Matrix} \cdot (n,p)\text{-Matrix} = (m,p)\text{-Matrix}$$

Dies bedeutet auch, dass das Matrixprodukt *nicht kommutativ* ist, d.h. im Allgemeinen gilt *nicht* $A \cdot B = B \cdot A$. Beispielsweise ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix} \ .$$

Vergleichen wir dies mit Beispiel 2.2.6, sehen wir, dass hier $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Bei der Multiplikation ist die Sache also nicht so einfach. Einige bekannte Rechenregeln haben aber auch beim Matrixprodukt ihre Gültigkeit:

2.2.8 Satz (Rechenregeln „·“) Seien A, B, C Matrizen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Sofern die Produkte definiert sind, gilt

(1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (Assoziativität)

(2) $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$

(3) $O \cdot A = O = A \cdot O$

(4) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ und $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (Distributivität)

(5) Ist A quadratisch und E die Einheitsmatrix gleicher Größe, dann gilt $A \cdot E = A = E \cdot A$.

Dr. Peter Bauer
SS 25 — 7. Mai 2025
Rev: 14114