Mathematik für Naturwissenschaftler II

Dr. Peter Bauer

Institut für Mathematik
Universität Frankfurt am Main

Sommersemester 2025

Lineare Algebra

1 Der mehrdimensionale Raum

1.1 Vektoren

Im Teil I dieser Vorlesung haben wir uns insbesondere mit Funktionen einer Variablen beschäftigt. Viele naturwissenschaftliche Beobachtungen hängen aber nicht nur von einer Größe, sondern von mehreren Größen ab.

Wir betrachten daher nun statt der (eindimensionalen) Zahlen mehrdimensionale Objekte:

1.1.1 Bezeichnung Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $v_1, v_2, \dots, v_n$ reelle Zahlen. $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ ist ein *n-dimensionaler Vektor*. Die Menge dieser Vektoren ist der *n-dimensionale reelle Raum* $\mathbb{R}^n$. Der Vektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ wird als *Nullvektor* bezeichnet.

Zur Unterscheidung werden reelle oder komplexe Zahlen im Gegensatz zu Vektoren oft als *Skalare* bezeichnet.

1.1.2 Bemerkung In der Literatur wird statt $\vec{v}$ oft $\mathbf{v}$ oder einfach v geschrieben. In letzterem Fall muss dann dem Kontext entnommen werden, ob v ein Vektor oder ein Skalar ist.

1.1.3 Bemerkung Verwenden wir in der obigen Definition komplexe statt reeller Zahlen, erhalten wir ganz analog den *n-dimensionalen komplexen Raum* $\mathbb{C}^n$.

Wir werden uns hier aber fast nur mit dem $\mathbb{R}^n$ befassen, die Behandlung des $\mathbb{C}^n$ ist völlig analog.

Natürlich kann mit Vektoren auch gerechnet werden:

1.1.4 Definition Seien $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ Vektoren des $\mathbb{R}^n$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \lambda\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix} .$$

1.1.5 Beispiele

$$\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \quad , \quad 2\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$$

Für diese Rechenarten gelten die Regeln, die wir z.B. von den reellen Zahlen her kennen:

1.1.6 Satz (Rechenregeln) Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$. Es gilt

(1) $\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$ (Kommutativität der Addition)

(2) $(\vec{v}+\vec{w})+\vec{z}=\vec{v}+(\vec{w}+\vec{z})$ (Assoziativität der Addition)

(3) $\lambda\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\lambda$ (Kommutativität der Multiplikation)

(4) $\lambda(\mu\vec{v})=(\lambda\mu)\vec{v}$ (Assoziativität der Multiplikation)

(5) $\lambda(\vec{v}+\vec{w})=\lambda\vec{v}+\lambda\vec{w}$ und $(\lambda+\mu)\vec{v}=\lambda\vec{v}+\mu\vec{v}$ (Distributivität)

Die Addition von Vektoren und die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar lassen sich auch geometrisch interpretieren: Der Addition zweier Vektoren entspricht das Hintereinanderfügen der Vektoren, die Multiplikation mit einem Skalar streckt (bzw. staucht) den Vektor. Im Fall eines negativen Skalars wird die Orientierung des Vektors umgekehrt.

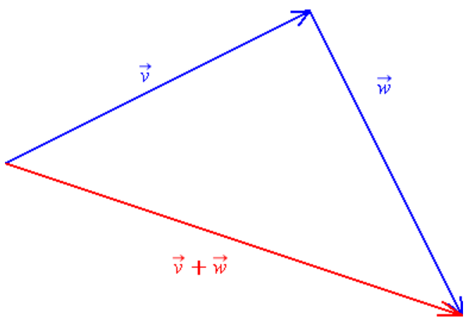

Abbildung 1: Addition von Vektoren.

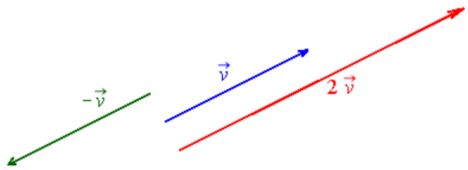

Abbildung 2: Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar.

1.2 Norm

Die „Länge“ eines Vektors kann in einem zweidimensionalen Raum, also einer Ebene, über den Satz des Pythagoras bestimmt werden. Die Länge des Vektors $\binom{a}{b}$ ist damit $\sqrt{a^2+b^2}$.

Dies gilt analog auch in höheren Dimensionen. Statt „Länge“ verwendet man die Bezeichnung „Norm“.

1.2.1 Definition Sei $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$. Die *Norm* von $\vec{v}$ ist

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{v_1^2+\cdots+v_n^2}=\left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right)^{1/2} .$$

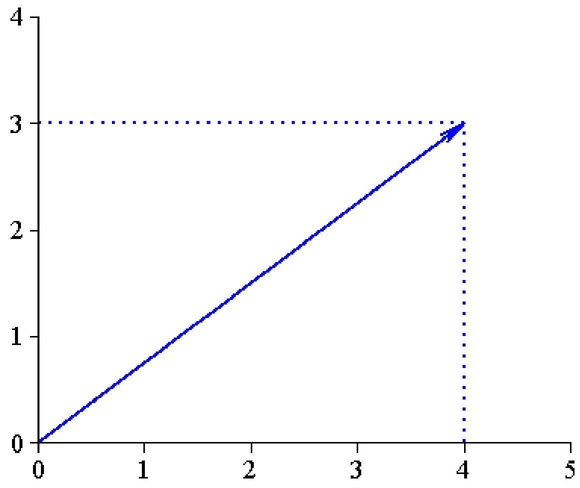

Abbildung 3: $\left\|\binom{4}{3}\right\| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

1.2.2 Beispiel

$$\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\| = \left(1^2+(-1)^2\right)^{1/2} = \sqrt{2}$$

1.2.3 Bemerkung In einem *kartesischen Koordinatensystem*, bei dem die Koordinatenachsen senkrecht aufeinander stehen, entspricht die Norm eines Vektors gerade dem, was wir uns unter seiner Länge vorstellen.

Es gibt aber auch andere Koordinatensysteme, bei denen die Achsen nicht senkrecht aufeinander stehen. Die Norm ist auch dort definiert, sie entspricht jedoch nicht mehr unserer Vorstellung von Länge. Wir werden uns in Abschnitt 2.6 näher mit solchen Koordinatensystemen befassen.

1.2.4 Satz Seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt

(1) $\|\vec{v}\| \geq 0$ und $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

(2) $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$

(3) $\|\vec{v}+\vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ (Dreiecksungleichung)

Die Bezeichnung „Dreiecksungleichung“ erklärt sich, wenn wir uns Abbildung 1 anschauen.

1.3 Skalarprodukt

Während die Addition von Vektoren in naheliegender Weise definiert werden kann, ist das bei der Multiplikation von Vektoren nicht so einfach. Wir kennen bereits die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar. Das ist aber eigentlich eine eher ungewöhnliche Multiplikation, da hier verschiedene Objekte, nämlich Vektoren und Skalare, miteinander verknüpft werden.

Tatsächlich gibt es mehrere Multiplikationen in Zusammenhang mit Vektoren, die alle in der ein oder anderen Hinsicht ungewöhnlich sind.

1.3.1 Definition Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ Vektoren des $\mathbb{R}^n$. Dann heißt die reelle Zahl

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

1.3.2 Beispiele **(1)** $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + (-3)(-1) + 2 \cdot (-2) = 3 + 3 - 4 = 2$

(2) $\vec{0} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \cdots + 0 \cdot a_n = 0,$

also gilt $\vec{0} \cdot \vec{a} = 0$ für alle $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, was wir wohl nicht anders erwartet haben.

(3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = -2 + 2 = 0.$

Es ist also möglich, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren 0 ist, obwohl keiner der beiden Vektoren der Nullvektor ist.

1.3.3 Satz (Rechenregeln) Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (Kommutativität)

(2) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (Distributivität)

(3) $\lambda\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left(\lambda\vec{a}\right) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(\lambda\vec{b}\right)$

Das Skalarprodukt ist nicht nur ungewöhnlich, weil diese Multiplikation zweier Vektoren einen Skalar liefert, auch manche vertraute Rechenregeln gelten nicht. Das Skalarprodukt ist beispielsweise *nicht assoziativ*:

$$\left(\binom{1}{0} \cdot \binom{0}{2}\right) \cdot \binom{1}{1} = 0 \cdot \binom{1}{1} = \binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \cdot \left(\binom{0}{2} \cdot \binom{1}{1}\right) = \binom{1}{0} \cdot 2 = \binom{2}{0}$$

Unter Umständen ist also $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \neq \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$.

1.3.4 Bemerkung Wir unterscheiden in der Schreibweise nicht zwischen den drei verschiedenen Multiplikationen (Multiplikation zweier Skalare, Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar und das Skalarprodukt zweier Vektoren): in allen Fällen schreiben wir einen Punkt „·“, den wir meistens auch einfach weglassen.

Man muss also stets dem Kontext entnehmen, welches Produkt gemeint ist.

Es gibt einen oft recht nützlichen Zusammenhang zwischen dem Skalarprodukt und der Norm:

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \|\vec{a}\|^2 \ .$$

Wir haben also

1.3.5 Satz Für $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ gilt $\vec{a}\cdot\vec{a} = \|\vec{a}\|^2$.

1.4 Winkel

In der Ebene gilt der *Cosinussatz*: Sind a, b, c die Längen der Seiten eines Dreiecks und liegt der Winkel γ der Seite c gegenüber, dann gilt

$$a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma = c^2 \ .$$

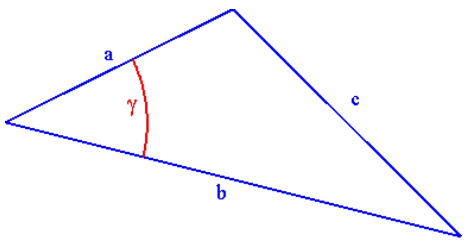

Abbildung 4: $a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma = c^2$ (Cosinussatz)

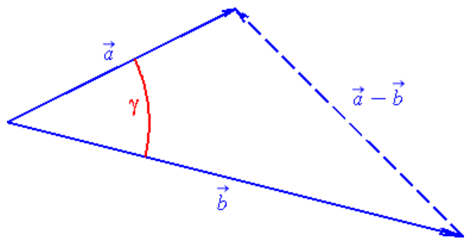

Abbildung 5: Winkeldefinition

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren des $\mathbb{R}^n$, die den Winkel γ einschließen, dann bilden $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}-\vec{b}$ ein Dreieck und der Cosinussatz ergibt

$$\begin{aligned} \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\gamma &= \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 \\ &= \left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right) \\ &= \vec{a}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right) - \vec{b}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right) \\ &= \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} \\ &= \|\vec{a}\|^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2 \\ \Rightarrow \qquad \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\gamma &= \vec{a}\cdot\vec{b} \end{aligned}$$

Dies können wir zur Definition des Winkels zwischen zwei Vektoren nutzen:

1.4.1 Definition Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$. Bezeichnet $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ den *Winkel* zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$, dann ist

$$\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} \ .$$

1.4.2 Bemerkung Wie schon bei der Norm entspricht der so definierte Winkel nur in kartesischen Koordinatensystemen unserer Vorstellung. Aber auch in nicht-kartesischen Koordinatensystemen kann der Winkel gemäß Definition 1.4.1 definiert werden.

1.4.3 Beispiele **(1)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Es gilt

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\binom{0}{1} \cdot \binom{1}{1}}{\left\| \binom{0}{1} \right\| \left\| \binom{1}{1} \right\|} = \frac{0+1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und damit ist $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Natürlich ist auch $\cos \frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, wir wollen aber stets den kleineren Winkel zwischen den beiden Vektoren betrachten, also

$$0 \leq \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi \ .$$

In diesem Intervall ist der Winkel auch eindeutig durch seinen Cosinus bestimmt.

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vektoren im $\mathbb{R}^4$ können wir uns zwar nicht vorstellen, den Winkel zwischen ihnen können wir aber leicht berechnen:

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{6}{\sqrt{4+4+0+0} \cdot \sqrt{0+9+9+0}} = \frac{6}{\sqrt{144}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \ ,$$

also ist $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

(3) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1+2-3}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} = 0 \ ,$$

also ist $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\pi}{2}$, die beiden Vektoren stehen also senkrecht aufeinander.

Das letzte Beispiel zeigt:

1.4.4 Satz Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, beide Vektoren seien $\neq \vec{0}$. Es gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ genau dann, wenn $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, wenn die Vektoren also senkrecht aufeinander stehen. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen dann *orthogonal* zueinander.

1.4.5 Beispiel Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind jeweils paarweise orthogonal zueinander.

Die Vektoren des letzten Beispiels haben außerdem alle die Norm 1. Daher rührt folgende Bezeichnung:

1.4.6 Definition Die Vektoren des $\mathbb{R}^n$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} , \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} , \ \dots , \ \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

heißen *Einheitsvektoren.*

Alle Einheitsvektoren sind jeweils paarweise orthogonal zueinander und haben die Norm 1.

Verwenden wir noch eine weitere Bezeichnung:

1.4.7 Bezeichnung Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, dann heißt ein Ausdruck der Form

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k \vec{v}_k$$

Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$[1]

Damit gilt dann:

1.4.8 Satz Jeder Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ist in eindeutiger Weise als Linearkombination der Einheitsvektoren $\vec{e}_i \in \mathbb{R}^n$ darstellbar:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i \ . \tag{1}$$

Die Komponenten v_i von $\vec{v}$ sind also gerade die Koeffizienten der Linearkombination (1).

1.5 Vektorprodukt

Wir kennen nun eine Multiplikation von Vektoren, nämlich das Skalarprodukt. Dieses Produkt hat als Ergebnis aber keinen Vektor, sondern einen Skalar. Man kennt auch eine Multiplikation von Vektoren, die als Ergebnis einen Vektor ergibt. Dieses Produkt gibt es allerdings *nur im dreidimesionalen Raum*:

1.5.1 Definition Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Dann ist das *Vektorprodukt* von $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \ .$$

1.5.2 Beispiele **(1)** Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-4) \\ 3 \cdot 0 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot (-4) - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

[1] Wenn keine Quadrate oder höheren Potenzen, keine trigonometrischen Funktionen o.a. auftreten, spricht man von *linear.*