2. Formelblatt

2.1 Sei E die Basis aus Einheitsvektoren und B eine Basis aus $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ mit $\vec{b}_k = (b_{1k}, \ldots, b_{nk})^T$. Die Matrix $T_E^B = (b_{ik})$ mit den B-Basisvektoren als Spalten ist die *Transformationsmatrix* zum *Basiswechsel* von B nach E. Seien $\vec{v}_B$ und $\vec{v}_E$ die Koordinatendarstellungen eines Vektors zur Basis B bzw. E. Dann ist $\vec{v}_E = T_E^B \cdot \vec{v}_B$. T_E^B ist invertierbar und die Transformationsmatrix zum Basiswechsel von E nach B ist $T_B^E = \left(T_E^B\right)^{-1}$.

2.2 Sei $A = (a_{ik})$ eine (n,n)-Matrix. Die $(n-1, n-1)$-Matrix, die durch Wegnahme der i-ten Zeile und der k-ten Spalte entsteht, ist die *Untermatrix* A_{ik}. Die *Determinante* $\det A = |a_{ik}|$ ist ...

(a) bei einer $(2,2)$-Matrix: $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

(b) bei einer $(3,3)$-Matrix (vgl. auch die *Sarrus-Regel*):
$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$,

(c) bei einer (n,n)-Matrix: Entwicklung nach der k-ten Spalte: $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$
bzw. Entwicklung nach der i-ten Zeile: $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$,

(d) bei einer *Dreiecksmatrix*: $\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

2.3 Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie **(a)** durch elementare Zeilen-/Spaltenoperationen (Multiplikation einer Zeile/Spalte mit einer Konstanten $\neq 0$; Vertauschung zweier Zeilen/Spalten; Addition eines Vielfachen einer Zeile/Spalte zu einer anderen Zeile/Spalte) in die Einheitsmatrix überführt werden kann, **(b)** alle Spalten-/Zeilenvektoren linear unabhängig sind, oder **(c)** $\det A \neq 0$ gilt.

2.4 Sei A eine (m,n)-Matrix, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$. Dann ist $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$ ein *lineares Gleichungssystem* mit n Unbekannten und m Gleichungen. Ist $\vec{y} = \vec{0}$, ist das System *homogen* und $\vec{x} = \vec{0}$ ist eine Lösung.

2.5 Ist A eine quadratische Matrix, so ist das System $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$ genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det A \neq 0$. In diesem Fall ist die Lösung gegeben durch $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y}$.

2.6 Gaußscher Algorithmus:

(a) Wenn $a_{11} = 0$, dann vertausche zwei Zeilen, so dass $a_{11} \neq 0$.

(b) Addiere die mit $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ multiplizierte 1. Zeile zur 2. Zeile,
addiere die mit $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ multiplizierte 1. Zeile zur 3. Zeile,
...
addiere die mit $-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ multiplizierte 1. Zeile zur n-ten Zeile.

(c) Wiederhole das Verfahren mit der Untermatrix A_{11} bis eine Dreiecksmatrix entsteht.

Durch “rückwärts Einsetzen” kann das zugehörige lineare Gleichungssystem gelöst werden.

2.7 Ist A eine (n,n)-Matrix, dann ist die Zahl λ, zu der ein *Eigenvektor* $\vec{x} \neq \vec{0}$ mit $A \cdot \vec{x} = \lambda\vec{x}$ existiert, ein *Eigenwert* von A. Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des *charakteristischen Polynoms* $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.
Die Eigenwerte von Diagonalmatrizen sind gerade die Werte a_{ii} auf der Diagonalen.