

Peter Bauer

**Über den Anteil der Nullstellen  
der Riemannsches Zeta-Funktion  
auf der kritischen Geraden**

— Diplomarbeit —



# Über den Anteil der Nullstellen der Riemannschen Zeta-Funktion auf der kritischen Geraden

Diplomarbeit von

Peter Bauer

Johann Wolfgang Goethe-Universität  
Frankfurt am Main

Mai 1992



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
1.1	Historische Entwicklung . . . . .	7
1.2	Aufbau der vorliegenden Arbeit . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Hauptsätze</b>	<b>13</b>
2.1	Bezeichnungen und Definitionen . . . . .	13
2.2	Ergebnisse . . . . .	15
2.3	Beweisidee . . . . .	16
2.4	Einige Hilfssätze . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Der Beweis</b>	<b>21</b>
3.1	Beweisansatz . . . . .	21
3.2	Vereinfachung des Integranden . . . . .	32
3.3	Berechnung des Integrals . . . . .	40
3.4	Berechnung der $S_{N_1, N_2}$ . . . . .	57
3.5	Abschätzung von $\alpha_m$ . . . . .	66
3.6	Numerische Berechnungen I . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Einfache Nullstellen</b>	<b>75</b>
4.1	Eine andere Darstellung von $\xi^{(m)}$ . . . . .	75
4.2	Rückführung . . . . .	77
4.3	Numerische Berechnungen II . . . . .	79
4.4	Beweis der Korollare . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Weitere Resultate, Ausblick</b>	<b>83</b>
5.1	Verlängerung der glättenden Funktion . . . . .	83
5.2	Hypothetische Abschätzungen . . . . .	85
5.3	Ausblick . . . . .	85
<b>A</b>	<b>Hilfssätze</b>	<b>89</b>
A.1	Beweis von Lemma 2.1.1 . . . . .	89
A.2	Beweis von Lemma 3.1.2 . . . . .	94
A.3	Beweis von Lemma 3.3.1 . . . . .	98
A.4	Beweis von Lemma 3.4.1 . . . . .	102
A.5	Beweis von Lemma 3.4.2 . . . . .	108
A.6	Beweis von Lemma 3.4.3 . . . . .	109

A.7 Beweis von Lemma 4.2.1 . . . . .	114
<b>B Das Programm</b>	<b>117</b>
B.1 Programmlisting . . . . .	117
B.2 Programmausgaben . . . . .	124
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>127</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Historische Entwicklung

#### 1.1.1 Die Riemannsche Zetafunktion

Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit stehen die Nullstellen der nach Bernhard Riemann benannten *Riemannschen Zetafunktion*  $\zeta(s)$ . Diese Funktion kann für komplexes  $s$  mit  $\operatorname{Re} s > 1$  durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (1.1.1)$$

dargestellt werden. Für andere Werte von  $s$  ist  $\zeta(s)$  durch die analytische Fortsetzung der Dirichlet-Reihe in (1.1.1) gegeben. Die  $\zeta$ -Funktion ist in der ganzen komplexen Ebene holomorph, mit Ausnahme des Punktes  $s = 1$ , wo sie einen einfachen Pol besitzt.

Diese und weitere Eigenschaften von  $\zeta(s)$  setzen wir in dieser Arbeit als bekannt voraus, näheres findet man beispielsweise in [Tit51] oder [Ivi85].

Bereits Euler betrachtete, beispielsweise in [Eul48, Caput XV], die Summe in (1.1.1), allerdings vor allem für ganzzahlige  $s \geq 2$ . Von ihm stammt die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1},$$

die für alle komplexen  $s$  mit  $\operatorname{Re} s > 1$  gültig ist. Dieser Zusammenhang zwischen der  $\zeta$ -Funktion und den Primzahlen war Ausgangspunkt für Riemanns einzige zahlentheoretische, aber dennoch wegweisende Arbeit *“Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.”* ([Rie59]). In dieser 1859 erschienenen Arbeit erkannte Riemann als erster die Bedeutung der Nullstellen der  $\zeta$ -Funktion für die Verteilung der Primzahlen. Bezüglich dieser Nullstellen sei jetzt nur so viel gesagt, daß  $\zeta(s)$  einfache Nullstellen an den negativen geraden Zahlen  $-2, -4, -6, \dots$  besitzt, und, daß alle weiteren, die sogenannten nicht-trivialen Nullstellen, im *kritischen Streifen*  $0 < \operatorname{Re} s < 1$  liegen.

Diese letzteren — unendlich vielen — Nullstellen sind gerade für den Primzahlsatz, also für die Beziehung

$$\pi(x) \sim \operatorname{li}(x),$$

von besonderer Bedeutung. Dabei bezeichnet  $\pi(x)$  die Anzahl der Primzahlen  $\leq x$  und  $\text{li}(x)$  den Integrallogarithmus

$$\text{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Der Beweis des Primzahlsatzes gelang 1896 erstmals Hadamard ([Had96]) und de la Vallée Poussin ([dlVP96]) unabhängig voneinander. Die Nullstellenfreiheit von  $\zeta(s)$  im Gebiet  $\text{Re } s \geq 1$  war dabei für die Beweise beider Autoren wesentlich.

Eine genauere Beziehung zwischen  $\pi(x)$  und  $\text{li}(x)$  bewies de la Vallée Poussin drei Jahre später ([dlVP00]). Er konnte zeigen, daß

$$\pi(x) = \text{li}(x) + O\left(x e^{-C\sqrt{\log x}}\right).$$

Erforderlich war dafür der Nachweis, daß  $\zeta(s) \neq 0$  im Gebiet  $\sigma \geq 1 - c \log^{-1} |t|$  für  $|t| > t_0$ , wobei  $\sigma$  für den Realteil und  $t$  für den Imaginärteil von  $s$  steht.

Das Restglied des Primzahlsatzes läßt sich um so mehr verbessern, je weiter das nullstellenfreie Gebiet nach links verschoben werden kann. Riemann vermutete in seiner Arbeit [Rie59] bereits, daß *alle* nicht-trivialen Nullstellen der  $\zeta$ -Funktion Realteil  $\frac{1}{2}$  haben. Dies ist die bis heute unbewiesene *Riemannsche Vermutung*. Aus ihr folgt beispielsweise das (optimale) Restglied

$$\pi(x) = \text{li}(x) + O\left(x^{1/2} \log x\right).$$

Mit der Anzahl der Nullstellen, die auf der *kritischen Geraden*  $\text{Re } s = \frac{1}{2}$ , liegen, wollen wir uns in der vorliegenden Arbeit beschäftigen.

### 1.1.2 Die Anzahl der Nullstellen

Das erste wichtige Ergebnis bezüglich der Anzahl der nicht-trivialen Nullstellen von  $\zeta(s)$ , die auf der kritischen Geraden liegen, wurde im Jahr 1914, also erst 55 Jahre nach Riemanns Publikation, von Hardy veröffentlicht. In [Har14] zeigte er, daß unendlich viele Nullstellen auf der kritischen Geraden liegen, also, daß

$$N_*(T) \longrightarrow \infty \quad \text{für } T \rightarrow \infty,$$

wobei  $N_*(T)$  die Anzahl der Nullstellen von  $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$  mit  $t \leq T$  bezeichnet.

Das nächste Resultat war

$$N_*(T) > C \cdot T \tag{1.1.2}$$

mit einer Konstanten  $C > 0$  und wurde 1921 von Hardy und Littlewood bewiesen ([HL21]). Hardy und Littlewood konnten die Konstante  $C$  nicht näher bestimmen, Siegel zeigte 1931 ([Sie32, (97)])

$$C \geq \frac{3}{8\pi} e^{-3/2} \doteq 0.0266 \quad .$$

Die Abschätzung (1.1.2) hat noch nicht die gewünschte Größenordnung. Im gesamten kritischen Streifen liegen nämlich nach einer von Riemann vermuteten und 1895 durch von Mangoldt ([vM95]) bewiesenen Formel

$$\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

Nullstellen mit Imaginärteil kleiner  $T$ . In (1.1.2) fehlt also ein Faktor der Größe  $\log T$ . Erst 1942 bewies Selberg, daß tatsächlich ein positiver, also insbesondere von Null verschiedener Anteil der Nullstellen auf  $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$  liegt, genauer ([Sel42, Thm. B])

$$N_*(T) > \alpha_0 \cdot T \log T \quad (1.1.3)$$

für  $T > T_0$  und ein  $\alpha_0 > 0$ . Den Gewinn eines Faktors  $\log T$  gegenüber Hardy und Littlewood konnte Selberg durch Einführung einer *glättenden Funktion* (“mollifier”) erzielen. Seine Idee war, den Integranden eines für den Beweis wesentlichen Integrals der Form

$$\int |f(t)|^2 dt$$

durch Multiplikation mit einer speziellen Funktion  $\psi$  zu “glätten”, so daß nur vereinzelt auftretende große Werte von  $|f(t)|$  keinen übermäßigen Anteil am Wert des Integrals erhalten (vgl. [Sel46, § III]). In Selbergs Fall war  $f(t) = \zeta(\frac{1}{2} + it)$  und er wählte für  $\psi$  das Quadrat einer Partialsumme der Dirichletreihe von  $(\zeta(s))^{-1/2}$ . Auch wir werden in unseren späteren Berechnungen von dieser Idee der glättenden Funktion Gebrauch machen.

Selberg hat seine Konstante  $\alpha_0$  nicht näher numerisch bestimmt, Min berechnete einen Wert, der allerdings sehr klein war ([Tit51, Sect. 10.9]). Erst 1974 konnte Norman Levinson in [Lev74a] Selbergs Resultat in dieser Richtung verbessern, indem er zeigte, daß

$$\alpha_0 > 0.34 \quad .$$

In seinem Beweis benötigte Levinson, ähnlich zu Selberg, eine glättende Funktion, wie wir sie oben bereits erwähnt haben.

### 1.1.3 Der Anteil der Nullstellen auf der kritischen Geraden

Seit Levinsons Veröffentlichung ist die untere Schranke für  $\alpha_0$  wiederholt verbessert worden. Als erster Ansatz zu derartigen Verbesserungen bot sich eine andere Wahl der glättenden Funktion an, die Levinson in [Lev74a] intuitiv gewählt hatte. Levinson selbst war der erste, der diese Idee ausnutzte. Er versuchte in [Lev75a] durch Methoden der Variationsrechnung eine optimale glättende Funktion zu berechnen. Seine ursprüngliche Wahl in [Lev74a] war

$$\psi(s) = \sum_{n \leq y} \frac{b(n)}{n^s}$$

mit

$$b(n) = \frac{\mu(n)}{n^{1/2-a}} \cdot \frac{\log y/n}{\log y},$$

wobei  $0 < a = \frac{1}{2} + O(L^{-1}) < \frac{1}{2}$ ,  $y = T^{1/2} L^{-20}$  und  $L = \log \frac{T}{2\pi}$ . In [Lev75a] gelangte er durch seine Berechnungen zur Wahl der Koeffizienten

$$b(n) = \frac{\mu(n)}{n^{1/2-a}} \cdot \frac{y^{1-2a} - n^{1-2a}}{y^{1-2a} - 1}.$$

Leider mußten bei der Optimierung der glättenden Funktion Abstriche gemacht werden, um die Funktion für die weiteren Berechnungen nicht zu kompliziert ausfallen zu lassen. Daher führten Levinsons Berechnungen nur zu der nicht wesentlich besseren Abschätzung

$$\alpha_0 > 0.3474 \quad .$$

1979 stellte Lou ([Lou79]) eine weitere Verbesserung vor. Er wählte

$$\psi(s) = \psi_1(s) + h_0 \psi_2(s),$$

wobei  $\psi_1$  genau wie die glättende Funktion in [Lev75a] gewählt war,  $h_0$  eine Konstante darstellt und wobei

$$\psi_2(s) = \frac{\chi(s)}{L^2} \sum_{n \leq y} \frac{b'(n)}{n^{s-a-1/2}}$$

mit

$$b'(n) = \sum_{k|n} \frac{\mu^2(n)\mu(k)\tau(k)\log(y/n)}{k^{2s-2a}\log y} .$$

Dabei ist  $\tau$  die Teilerfunktion und  $\chi(s)$  durch  $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$  definiert. Mittels dieser recht komplizierten Funktion gelangte Lou zu

$$\alpha_0 > 0.35 \quad .$$

Durch Levinsons ursprüngliche Wahl motiviert wählte Conrey in [Con83a], einer Arbeit die auf seiner Dissertation [Con80] aufbaut,

$$\psi(s) = \sum_{n \leq y} \frac{b(n)}{n^s}$$

wie Levinson, aber mit den Koeffizienten

$$b(n) = \frac{\mu(n)}{n^{1/2-a}} h\left(\frac{\log(y/n)}{\log y}\right),$$

wobei  $h$  ein reelles Polynom mit  $h(0) = 0$  und  $h(1) = 1$  bezeichnet. Das Ergebnis dieser Wahl war

$$\alpha_0 > 0.3658 \quad .$$

In der vorliegenden Arbeit werden wir unter anderem dieses Resultat herleiten (Kapitel 3). Allein durch eine neue Wahl der glättenden Funktion  $\psi$  ist seitdem keine Verbesserung mehr erzielt worden. Ein anderer Ansatz, die untere Schranke für  $\alpha_0$  zu vergrößern, ist eine "Verlängerung" der Dirichlet-Reihe der glättenden Funktion, also die Wahl eines größeren Wertes für  $y$ . Je "länger" diese Reihe jedoch wird, desto größer werden die technischen Schwierigkeiten, eine asymptotische Formel für das oben angesprochene Integral zu finden, was den wesentlichen Schritt in Levinsons Beweismethode darstellt. Näheres zu diesen Problemen findet man beispielsweise in [BCHB85] oder [DI84]. In den bislang erwähnten Arbeiten (von [Lev74a] bis [Con83a]) wurde stets  $y = T^\theta$  mit  $\theta = \frac{1}{2} - \varepsilon$  verwendet. 1989 gelang es Conrey  $\theta = \frac{4}{7} - \varepsilon$  zu wählen ([Con89]) und er erhielt damit

$$\alpha_0 > 0.4088 \quad .$$

Wir können diese Schranke noch ein wenig vergrößern; in Kapitel 5 berechnen wir unter Verwendung von Conreys Formeln aus [Con89]

$$\alpha_0 > 0.408959 \quad .$$

Dies ist die beste bis heute bekannte Abschätzung von  $\alpha_0$ .

Conreys Verbesserung wurde möglich durch Resultate, die er gemeinsam mit Balasubramanian und Heath-Brown in [BCHB85] veröffentlichte, sowie durch Verwendung der Ergebnisse von Deshouillers und Iwaniec über Kloosterman-Summen ([DI82] und [DI84, § 3]).

#### 1.1.4 Einfache Nullstellen

Die oben aufgezählten Abschätzungen bezogen sich allesamt auf den Anteil allgemeiner Nullstellen auf der kritischen Geraden. Heath-Brown ([HB79]) und Selberg (unveröffentlicht) bemerkten jedoch unabhängig voneinander, daß Levinsons Beweis auch auf *einfache* Nullstellen der  $\zeta$ -Funktion übertragen werden kann.

Die Schranke  $\alpha_0 > 0.34$  gilt somit auch für  $\alpha_0^{(1)}$ , den Anteil der Nullstellen, die auf der Geraden  $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$  liegen und zugleich einfach sind, an den Nullstellen von  $\zeta(s)$ , die im kritischen Streifen liegen:

$$\alpha_0^{(1)} > 0.34 \quad .$$

Heath-Browns und Selbergs Beobachtung ist um so bemerkenswerter, da bis zu Heath-Browns Veröffentlichung noch nicht einmal bekannt war, ob überhaupt unendlich viele einfache nicht-triviale Nullstellen der  $\zeta$ -Funktion existieren.

Auch Conreys Beweisansatz aus [Con83a] läßt sich derart modifizieren, daß nur einfache Nullstellen gezählt werden ([Con83b] oder Kapitel 4 der vorliegenden Arbeit). Damit folgt dann

$$\alpha_0^{(1)} > 0.3485 \quad .$$

Eine Verbesserung gelang Anderson, als er in [And83] Levinsons Ansatz verfeinerte, so daß er

$$\alpha_0^{(1)} > 0.3532$$

zeigen konnte.

In dem oben bereits erwähnten Artikel [Con89] zeigte Conrey mit den gleichen Methoden wie für  $\alpha_0 > 0.4088$  schließlich

$$\alpha_0^{(1)} > 0.4013 \quad .$$

Auch hier können wir diese bislang beste bekannte untere Schranke weiter vergrößern. Wir berechnen in Kapitel 5

$$\alpha_0^{(1)} > 0.402193 \quad .$$

#### 1.1.5 Ableitungen der Riemannsches $\xi$ -Funktion

Neben der Anwendung von Levinsons Methode auf einfache Nullstellen wurden auch die Nullstellen der Ableitungen der Riemannsches Xi-Funktion

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}, \quad \left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

betrachtet, die als Nullstellen genau die nicht-trivialen Nullstellen von  $\zeta(s)$  besitzt. Die obigen Abschätzungen gelten folglich unverändert für die Nullstellen der  $\xi$ -Funktion, ja nach dem Satz von Rolle sogar für ihre Ableitungen, da  $\xi(\frac{1}{2} + it)$  reell ist. Levinson war der erste, der seine Beweismethode in [Lev74b] auf  $\xi'(s)$  anwandte und zeigte, daß mehr als 71.72% der Nullstellen von  $\xi'(s)$  auf der kritischen Geraden liegen.

Weiter ging Conrey, der in der bereits mehrfach erwähnten Arbeit [Con83a] allgemein die Nullstellen von  $\xi^{(m)}(s)$  für  $m \geq 0$  betrachtete und beispielsweise für  $m = 1$  Levinsons Schranke auf 81.37% erhöhte. Numerische Werte gibt er für  $0 \leq m \leq 5$  an. Wir werden in der vorliegenden Arbeit numerische Werte für  $0 \leq m \leq 9$  angeben, die geringfügig besser sind als Conreys, zum Beispiel können wir für den Anteil der Nullstellen von  $\xi'(s)$  auf der kritischen Geraden 81.56% berechnen.

## 1.2 Aufbau der vorliegenden Arbeit

In den folgenden Kapiteln werden wir uns in erster Linie mit den Arbeiten [Con83a] und [Con83b] von Conrey beschäftigen, die auf Levinsons Beweis in [Lev74a] und Heath-Browns beziehungsweise Selbergs Beobachtung aus [HB79] aufbauen.

In Kapitel 2 geben wir die grundlegenden Definitionen an und stellen unsere Ergebnisse sowie einige einfache Hilfssätze zusammen.

Auch wenn wir mit dem dann in Kapitel 3 geführten Beweis nicht zu den besten bis dato bekannten Abschätzungen gelangen, ist dieser Ansatz doch der interessantere, da wir so Levinsons ursprünglichem Weg folgen können, was bei der Herleitung der besseren Werte nicht mehr möglich wäre, da dazu weitere Techniken erforderlich sind. Wir werden hierauf in Kapitel 5 noch kurz zu sprechen kommen.

Levinsons Arbeit [Lev74a] zu folgen, wäre ebenfalls nicht zweckmäßig, da seit ihrer Veröffentlichung eine Reihe technischer Verbesserungen vorgeschlagen wurden, die den ursprünglich sehr aufwendigen Beweis einfacher und so durchsichtiger machen. Derartige Vereinfachungen sind in den hier geführten Beweis eingebaut worden.

Ein weiterer Vorteil unseres Beweises ist, daß wir mit dem hier benutzten Ansatz auch die Nullstellen der Ableitungen  $\xi^{(m)}(s)$  untersuchen und so Levinsons Satz verallgemeinern können. Wie dieser Ansatz dann so modifiziert werden kann, daß wir den Anteil *einfacher* Nullstellen abschätzen können, werden wir in Kapitel 4 erläutern.

Im abschließenden Kapitel 5 gehen wir auf Conreys oben erwähnte Verbesserungen aus [Con89] und eventuelle Verallgemeinerungsmöglichkeiten ein. Dort berechnen wir auch die Schranken

$$\alpha_0 > 0.408959 \quad \text{und} \quad \alpha_0^{(1)} > 0.402193 \quad .$$

In den beiden Anhängen finden sich zum einen die Beweise einer Reihe von Hilfssätzen, von denen einige auch für sich allein interessant sind, zum anderen eines der FORTRAN-Programme, mit denen die numerischen Werte der Schranken berechnet wurden.

## Danksagungen

Ohne daß es hier möglich ist, jeden einzelnen zu nennen, danke ich all jenen, die mich in meiner Arbeit unterstützten. Nicht unerwähnt lassen möchte ich jedoch Herrn Prof. Dr. W. Schwarz, Herrn Dr. J. Herzog und Herrn R. Tschiersch, denen ich für die Anregung zur Beschäftigung mit diesem Thema und für ihre Betreuung danke.

## Kapitel 2

# Hauptsätze

### 2.1 Bezeichnungen und Definitionen

Wir wollen nun dazu übergehen, die Ideen Levinsons näher darzustellen, indem wir Conreys Berechnungen ([Con83a] und [Con83b]) folgen und so eine Verallgemeinerung und Verbesserung des ursprünglichen Ergebnisses von Levinson ([Lev74a]) beweisen.

Statt der Riemannschen  $\zeta$ -Funktion betrachten wir die  $\xi$ -Funktion, die definiert ist durch

$$\xi(s) = H(s)\zeta(s) ,$$

wobei

$$H(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2} , \left(\frac{s}{2}\right). \quad (2.1.1)$$

Im Folgenden werden wir stets mit  $\sigma$  den Realteil und mit  $t$  den Imaginärteil der komplexen Variable  $s$  bezeichnen.

Einige Eigenschaften der  $\xi$ -Funktion werden hier als bekannt vorausgesetzt: Sie ist ganz, hat die gleichen Nullstellen wie die  $\zeta$ -Funktion im kritischen Streifen  $0 < \sigma < 1$  und erfüllt die Funktionalgleichung

$$\xi(s) = \xi(1-s) .$$

Außerhalb des Streifens  $0 < \sigma < 1$  ist  $\xi(s)$  nullstellenfrei. Des weiteren ist  $\xi(1/2 + it)$  reell. Beweise dieser und anderer Eigenschaften findet man beispielsweise in [Tit51] oder [Ivi85].

Aufgrund der technisch angenehmeren Eigenschaften der  $\xi$ -Funktion werden wir uns im folgenden mit dieser Funktion statt mit  $\zeta(s)$  befassen. Da die Nullstellen von  $\xi$  mit den nicht-trivialen Nullstellen von  $\zeta$  übereinstimmen, gelten unsere Ergebnisse bezüglich  $\xi(s)$  ebenso für  $\zeta(s)$ . Für die Ableitungen gilt dies leider nicht mehr. Wie wir in Korollar 2.2.6 sehen werden, erlaubt uns die Betrachtung der Nullstellen von  $\xi^{(m)}(s)$  aber eine Aussage über die Vielfachheiten der Nullstellen von  $\zeta(s)$ .

Sei von nun an  $N^{(m)}(T)$  die Anzahl der Nullstellen von  $\xi^{(m)}(s)$  im kritischen Streifen mit Imaginärteil zwischen 0 und  $T$ , also

$$N^{(m)}(T) := \#\{s : \xi^{(m)}(s) = 0 ; 0 < \sigma < 1 ; 0 \leq t \leq T\}$$

und sei  $N_*^{(m)}(T)$  die Anzahl dieser Nullstellen, die genau auf der kritischen Geraden liegen, also

$$N_*^{(m)}(T) := \#\{s : \xi^{(m)}(s) = 0 ; \sigma = 1/2 ; 0 \leq t \leq T\}.$$

Wesentlich ist für unsere Zwecke die Gültigkeit einer Verallgemeinerung der Riemann - von Mangoldt - Formel :

**Lemma 2.1.1** *Sämtliche Nullstellen von  $\xi^{(m)}(s)$  liegen im kritischen Streifen  $0 < \sigma < 1$ . Sie liegen symmetrisch zu  $\sigma = \frac{1}{2}$  und symmetrisch zu  $t = 0$ . Für  $m \geq 0$  gilt*

$$N^{(m)}(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O_m(\log T).$$

Ein von Conrey ([Con80]) stammender Beweis befindet sich in Anhang A.

Da die  $\xi$ -Funktion und ihre Ableitungen auf der kritischen Geraden reell sind, folgt nach dem Satz von Rolle, daß zwischen zwei Nullstellen von  $\xi^{(m)}(1/2+it)$  jeweils mindestens eine Nullstelle von  $\xi^{(m+1)}(1/2+it)$  liegen muß. Es gilt also für alle  $m \geq 0$  und alle  $T > 0$

$$N_*^{(m)}(T) \leq N_*^{(m+1)}(T) + 1. \quad (2.1.2)$$

Dies und Lemma 2.1.1 ermöglichen uns, auch bezüglich der Ableitungen von  $\xi(s)$  sinnvoll von einem "Anteil" der Nullstellen auf der kritischen Geraden zu sprechen, der nach (2.1.2) und Selbergs Ergebnis (1.1.3) positiv sein muß. Diesen Anteil definieren wir durch

$$\alpha_m := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_*^{(m)}(T+U) - N_*^{(m)}(T)}{N^{(m)}(T+U) - N^{(m)}(T)}, \quad (2.1.3)$$

wobei

$$U = \frac{T}{L^{10}} \quad \text{und} \quad L = \log \frac{T}{2\pi}.$$

In der vorliegenden Arbeit wird  $T$  stets als hinreichend groß angenommen. Aufgrund der Symmetrie der Nullstellen zur reellen Achse brauchen wir durchweg nur positive Imaginärteile betrachten. Daß wir hier im Intervall  $[T, T+U]$  statt beispielsweise in  $[0, T]$  arbeiten, hat technische Gründe, zum Beispiel können wir damit stets davon ausgehen, daß ein  $t \in [T, T+U]$  hinreichend groß ist.

Da wir später auch einfache Nullstellen untersuchen wollen, definieren wir hier ebenfalls den Anteil der Nullstellen, die nicht nur auf  $\sigma = 1/2$  liegen, sondern die zusätzlich einfache Nullstellen sind

$$\alpha_m^{(1)} := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\#\{s : \xi^{(m)}(s) = 0 ; \xi^{(m+1)}(s) \neq 0 ; \sigma = 1/2 ; T \leq t \leq T+U\}}{N^{(m)}(T+U) - N^{(m)}(T)}. \quad (2.1.4)$$

In unserer Notation lautet die Riemannsche Vermutung nun  $N_*^{(0)}(T) = N^{(0)}(T)$  für alle  $T$ , woraus nach dem Satz von Rolle und Lemma 2.1.1 folgt

$$N_*^{(m)}(T) = N^{(m)}(T) \quad \text{für alle } m \geq 0, T > 0,$$

also

$$\alpha_m = 1 \quad \text{für alle } m \geq 0.$$

Selbstverständlich ist dies wesentlich schwächer als Riemanns Hypothese, denn  $\alpha_m = 1$  sagt nur, daß "fast alle" Nullstellen Realteil  $\frac{1}{2}$  haben, sogar unendlich viele Ausnahmen sind möglich.

## 2.2 Ergebnisse

Leider sind wir bei weitem nicht in der Lage, auch nur  $\alpha_m = 1$  zu zeigen. Wir werden statt dessen beweisen:

**Satz 2.2.1** *Sei  $R > 0$  eine reelle Konstante und  $\phi$  eine stetig differenzierbare reellwertige Funktion mit  $\phi(0) = 1$  und  $\phi'(x) = \phi'(1-x)$ . Sei weiter*

$$\begin{aligned}\phi_m(x) &= \phi(x)(1-2x)^m \quad \text{für } m \geq 0, \\ \Psi &= \int_0^1 e^{2Rx} \phi_m^2(x) dx, \\ \Psi' &= \int_0^1 e^{2Rx} \phi_m'^2(x) dx \quad \text{und} \\ \Lambda &= \left( \frac{\Psi' + R(e^{2R}\phi^2(1) - 1) - R^2\Psi}{4\Psi} \right)^{1/2}\end{aligned}$$

und sei schließlich

$$F_m(\phi, R) = \frac{1}{2}(e^{2R}\phi^2(1) + 1) + 2\Psi\Lambda \coth \Lambda.$$

Dann gilt

$$\alpha_m \geq 1 - \frac{\log F_m(\phi, R)}{R}.$$

Dieser Satz läßt die Größe der  $\alpha_m$  nur schwer erkennen. Numerische Berechnungen zeigen

**Korollar 2.2.2** *Es gilt*

$$\begin{aligned}\alpha_0 &> 0.365815 \quad , \quad \alpha_5 > 0.997543 \quad , \\ \alpha_1 &> 0.815682 \quad , \quad \alpha_6 > 0.998458 \quad , \\ \alpha_2 &> 0.960142 \quad , \quad \alpha_7 > 0.999020 \quad , \\ \alpha_3 &> 0.988216 \quad , \quad \alpha_8 > 0.999310 \quad , \\ \alpha_4 &> 0.995226 \quad , \quad \alpha_9 > 0.999523 \quad .\end{aligned}$$

Diese Werte sind für  $m \geq 1$  marginal besser als bislang veröffentlichte (vergl. [Con83a]), für  $m = 0$  wird in [Con89]  $\alpha_0 > 0.4088$  gezeigt, wir berechnen in Kapitel 5

$$\alpha_0 > 0.408959 \quad .$$

Ein ähnliches Ergebnis werden wir auch bezüglich der einfachen Nullstellen erhalten. Es wird sich herausstellen, daß im Spezialfall  $\phi(x) = 1 - x$  des obigen Satzes nicht nur allgemein Nullstellen, sondern gerade die einfachen Nullstellen gezählt werden. Es gilt demnach

**Satz 2.2.3** *Mit den Bezeichnungen von Satz 2.2.1 gilt speziell für  $\phi(x) = 1 - x$*

$$\alpha_m^{(1)} \geq 1 - \frac{\log F_m(\phi, R)}{R}.$$

Entsprechend zu Satz 2.2.1 sind auch hier numerische Berechnungen für quantitative Aussagen erforderlich:

**Korollar 2.2.4** *Es gilt*

$$\begin{aligned} \alpha_0^{(1)} &> 0.348567 & , & \alpha_5^{(1)} > 0.986469 & , \\ \alpha_1^{(1)} &> 0.786967 & , & \alpha_6^{(1)} > 0.990222 & , \\ \alpha_2^{(1)} &> 0.931622 & , & \alpha_7^{(1)} > 0.992595 & , \\ \alpha_3^{(1)} &> 0.966700 & , & \alpha_8^{(1)} > 0.994195 & , \\ \alpha_4^{(1)} &> 0.979945 & , & \alpha_9^{(1)} > 0.995326 & . \end{aligned}$$

Für  $m = 0$  sind auch hier bessere Schranken bekannt. In [Con89] wird  $\alpha_0^{(1)} > 0.4013$  und in Kapitel 5

$$\alpha_0^{(1)} > 0.402193$$

berechnet. Weitere Werte für  $m > 9$  sind in Tabelle 4.1 angegeben.

Man beobachtet, daß die numerischen Werte mit  $m$  steigen, daß sie tatsächlich gegen 1 konvergieren, läßt sich ebenfalls aus unseren Sätzen folgern, es gilt sogar

**Korollar 2.2.5** *Für  $m \rightarrow \infty$  gilt*

$$1 \geq \alpha_m \geq \alpha_m^{(1)} = 1 + O(m^{-2}) .$$

Dieses Korollar zeigt in einem gewissen Sinn, daß für große  $m$  “fast alle” Nullstellen von  $\xi^{(m)}(s)$  auf der kritischen Geraden liegen und zudem einfach sind.

Bezüglich der Vielfachheit der Nullstellen der  $\zeta$ -Funktion — nicht nur der  $\xi$ -Funktion — läßt sich damit ein weiteres interessantes Resultat erhalten.

**Korollar 2.2.6** *Sei  $\beta_m$  der Anteil der Nullstellen von  $\zeta(s)$  mit Vielfachheit größer oder gleich  $m$ , genauer*

$$\beta_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\#\{s : \zeta(s) = \dots = \zeta^{(m-1)}(s) = 0 ; \sigma = \frac{1}{2} ; T \leq t \leq T + U\}}{N^{(m)}(T + U) - N^{(m)}(T)} ,$$

wobei  $L = \log \frac{T}{2\pi}$  und  $U = TL^{-10}$ .

Dann gilt

$$\beta_m = O(m^{-2}) .$$

Diese Ergebnisse sind selbstverständlich noch weit von Riemanns Hypothese entfernt. Man kann aber sagen, daß sie in die Richtung dieser Hypothese und die der stärkeren Vermutung, die Nullstellen seien zudem auch einfach, deuten.

Es ist vermutlich nicht zu erwarten, mit Levinsons Methoden  $\alpha_0 = 1$  zeigen zu können; von einem Beweis einer der angesprochenen Vermutungen kann gar nicht erst die Rede sein. Wir werden auf dieses Thema in Kapitel 5 noch kurz zu sprechen kommen.

## 2.3 Beweisidee

Levinson beginnt in [Lev74a] mit der Herleitung einer Darstellung der  $\zeta$ -Funktion als Summe komplex konjugierter Terme. Aus der Funktionalgleichung leitet er dazu die Gleichung

$$h\zeta(s) = -\frac{h\zeta'(s) + h\zeta'(1-s)}{\log \frac{t}{2\pi} + O(1/t)}$$

her, wobei  $h(s) = \pi^{-s/2}, (s/2)$ . Für  $s = 1/2 + it$  gilt nun  $h\zeta'(s) = \overline{h\zeta'(1-s)}$ . Nullstellen der  $\zeta$ -Funktion auf der kritischen Geraden liegen also dann vor, wenn

$$\arg h\zeta'(1/2 + it) \equiv \pi/2 \pmod{\pi}.$$

Auch wir werden mit einer Herleitung einer derartigen Darstellung beginnen, natürlich für  $\xi^{(m)}(s)$ , wofür wir die Riemann-Siegel-Formel (Lemma 3.1.1) verwenden. Damit können wir dann zeigen, daß Nullstellen von  $\xi^{(m)}$  auf  $\sigma = \frac{1}{2}$  vorliegen, wenn

$$\arg H(s)V(s) \equiv \frac{m+1}{2} \pi \pmod{\pi} \quad \text{für } \sigma = \frac{1}{2},$$

mit der bereits in (2.1.1) eingeführten Funktion  $H$  und einer weiteren Funktion  $V$ . Es zeigt sich, daß  $\arg H(1/2 + it)$  im Wesentlichen der Anzahl aller Nullstellen von  $\xi^{(m)}$  im kritischen Streifen entspricht, wir werden daher

$$\Delta \arg V(1/2 + it) \Big|_T^{T+U} := \arg V(1/2 + i(T+U)) - \arg V(1/2 + iT)$$

abzuschätzen haben. Das Argumentprinzip liefert uns den Zusammenhang mit der Anzahl der Nullstellen von  $V(s)$  in einem Rechteck mit  $\sigma \geq \frac{1}{2}$  und  $T \leq t \leq T+U$ , deren Abschätzung wir mittels des Lemmas von Littlewood (Lemma 3.1.4) auf die Abschätzung des Integrals

$$I = \int_T^{T+U} |(2/L)^m \psi V(a+it)| dt \quad \text{mit } a = \frac{1}{2} + O(L^{-1})$$

zurückführen können. Die hier auftretende Funktion  $\psi$ , die als Dirichlet-Polynom gewählt wird, hat die Aufgabe die Schwankungen von  $V$  zu glätten, um so die weiteren Abschätzungen schärfer zu machen.

Die Berechnung des Integrals  $I$  wird den weitaus größten Teil des Beweises in Kapitel 3 ausmachen — hierin liegt der technisch komplizierteste Teil der Rechnungen. Letztendlich erhalten wir

$$I \sim U \cdot F_m(\phi, R),$$

wobei  $F_m(\phi, R)$  in Satz 2.2.1 definiert wurde.

Levinson erhält bei seinen Rechnungen in [Lev74a] ein ähnliches Integral, für welches er zeigt, daß es asymptotisch zu  $U \cdot F(R)$  ist, wobei

$$F(R) = e^{2R} \left( \frac{1}{2R^3} + \frac{1}{24R} \right) - \frac{1}{2R^3} - \frac{1}{R^2} - \frac{25}{24R} + \frac{7}{12} - \frac{R}{12}.$$

Dies entspricht unserer Funktion  $F_m(\phi, R)$ , gilt jedoch nur für  $m = 0$  und führt lediglich zu  $\alpha_0 \geq 0.34$ .

## 2.4 Einige Hilfssätze

Bevor wir uns dem detaillierten Beweis von Satz 2.2.1 zuwenden, formulieren wir noch einige Hilfssätze, die die Funktion  $H(s)$  betreffen und im wesentlichen auf den Eigenschaften der  $\zeta$ -Funktion aufbauen. Bezüglich der Eigenschaften von  $\zeta(s)$  vergleiche man beispielsweise die entsprechenden Anhänge in [Ivi85] oder [Pra78].

Betrachten wir das Gebiet  $\{s : \sigma \geq 0\} \setminus [0, 1]$ .  $H(s)$  ist dort holomorph und nullstellenfrei, wodurch sich das Argument der  $H$ -Funktion in diesem Bereich definieren läßt, indem wir  $\arg H$  ausgehend von  $\arg H(3) = 0$  auf einem Pfad, der das angesprochene Gebiet nicht verläßt, stetig fortsetzt. Diese Definition wird hier und im folgenden stets vorausgesetzt. Es gilt

**Lemma 2.4.1** Sei  $H(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}, (s/2)$ . Dann gilt für  $|t| > 0$

$$\arg H(1/2 + it) = \frac{t}{2} \log \frac{|t|}{2\pi} - \frac{t}{2} + O(1).$$

**Beweis:** Da  $\arg H(s) = \text{Im} \log H(s)$ , folgt mit Stirlings Formel für den Logarithmus der  $\gamma$ -Funktion ([Ivi85, (A.33)])

$$\begin{aligned} \arg H(1/2 + it) &= -\frac{t}{2} \log \pi + \text{Im} \log \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) + O(1) \\ &= -\frac{t}{2} \log \pi + \frac{t}{2} \log \frac{|t|}{2} - \frac{t}{2} + O(1). \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

In ähnlicher Art und Weise ergibt sich unschwer aus [Ivi85, (A.33)] für die logarithmischen Ableitungen von  $H$

**Lemma 2.4.2** Sei  $F(s) = \frac{H'(s)}{H(s)}$ . Dann gilt für  $|t| > 0$

$$F(s) = \frac{1}{2} \log \frac{s}{2\pi} + O(|t|^{-1})$$

und allgemein für  $k \geq 1$

$$F^{(k)}(s) = O(|t|^{-k}).$$

Damit können wir nun auch eine asymptotische Formel für die Ableitungen von  $H$  herleiten :

**Lemma 2.4.3** Sei  $0 \leq \sigma \leq C \log L, T \leq t \leq T + U$ . Dann gilt gleichmäßig für  $k \leq k_0$

$$H^{(k)}(s) = H(s) \left( F(s)^k + O_{k_0} \left( t^{-1} (\log t)^{k-2} \right) \right),$$

wobei  $F(s) = \frac{H'(s)}{H(s)}$ .

**Beweis:** Der hier geführte Beweis ist einfacher als der in ([Con80, L.1.3.2]) und unser  $O$ -Term ist um einen Faktor  $\log t$  kleiner als Conreys (vgl. auch [Con83a, L.1(c)]). Aus der Definition von  $F$  folgt  $H'(s) = H(s)F(s)$ . Wiederholte Differentiation liefert uns

$$H^{(k)}(s) = H(s) \left( F(s)^k + R_k \right), \tag{2.4.1}$$

wobei  $R_k$  rekursiv definiert ist durch

$$\begin{aligned} R_1 &= 0, \\ R_{k+1} &= F(s)R_k + kF(s)^{k-1}F'(s) + \frac{d}{ds}R_k \quad \text{für } k \geq 1. \end{aligned}$$

Die Gleichung (2.4.1) und die Rekursionsformel lassen sich leicht durch vollständige Induktion nach  $k$  beweisen: Für  $k = 1$  gilt die Gleichung wegen der Definition von  $F$  (s.o.). Ist (2.4.1) bereits für  $k$  gezeigt, so folgt wegen  $H' = HF$

$$\begin{aligned} H^{(k+1)}(s) &= H'(s)(F(s)^k + R_k) + H(s)(kF(s)^{k-1}F'(s) + \frac{d}{ds}R_k) \\ &= H(s)(F(s)^{k+1} + F(s)R_k + kF(s)^{k-1}F'(s) + \frac{d}{ds}R_k) \\ &= H(s)(F(s)^{k+1} + R_{k+1}). \end{aligned}$$

Um nun die Behauptung des Lemmas zu zeigen, ist  $R_k$  abzuschätzen. Da  $R_2 = F'(s)$ , hat  $R_k$  die Form

$$R_k = \sum_{1 \leq i \leq k} c_i F(s)^{\nu_i} \left( F^{(\lambda_i)}(s) \right)^{\mu_i},$$

mit geeigneten, von  $k$  abhängigen Konstanten

$$\begin{aligned} 1 &\leq \lambda_i, \mu_i \leq k-1, \\ 0 &\leq \nu_i \leq k-2, \\ 0 &\leq c_i \leq (k-1)!. \end{aligned}$$

Es gilt nach Lemma 2.4.2 und wegen der vorausgesetzten Grenzen für  $\sigma$  und  $t$

$$\begin{aligned} F(s)^{\nu_i} &= \left( \frac{1}{2} \log \frac{s}{2\pi} + O(t^{-1}) \right)^{\nu_i} \ll_{k_0} (\log t)^{k-2}, \\ \left( F^{(\lambda_i)}(s) \right)^{\mu_i} &\ll t^{-\lambda_i \mu_i} \ll t^{-1}, \end{aligned}$$

also  $R_k \ll_{k_0} t^{-1} (\log t)^{k-2}$  und somit folgt die Behauptung. □

Schließlich zitieren wir noch [Ivi85, (1.25)] oder [Tit51, (4.12.3)]:

**Lemma 2.4.4** Sei  $\chi(s) = \frac{H(1-s)}{H(s)}$ . Dann gilt für  $t > t_0 > 0$

$$\chi(s) = \left( \frac{2\pi}{t} \right)^{s-1/2} \exp \left( it + \frac{\pi i}{4} \right) \left( 1 + O(t^{-1}) \right),$$

und folglich

$$|\chi(s)| = \left( \frac{t}{2\pi} \right)^{1/2-\sigma} \left( 1 + O(t^{-1}) \right).$$



# Kapitel 3

## Der Beweis

### 3.1 Beweisansatz

#### 3.1.1 Eine Darstellung von $\xi^{(m)}$

In dieser Arbeit wird durchweg

$$L = \log \frac{T}{2\pi} \quad \text{und} \quad U = TL^{-10}$$

gesetzt. Des weiteren wird  $T$  stets als hinreichend groß und  $m$  als konstant angenommen. Implizite  $O$ -Konstanten können von  $m$ , der unten eingeführten Funktion  $\phi$  und von  $R$  (s. (3.1.17)) abhängen.

Wie bereits erwähnt, beginnt Levinsons Beweis ([Lev74a]) mit der Herleitung einer Darstellung von  $\xi(s)$ , die diese Funktion als Summe komplex konjugierter Terme ausdrückt. Ähnlich beginnen wir, Conrey ([Con83a]) folgend, mit der Herleitung einer derartigen Darstellung von  $\xi^{(m)}(s)$ .

Es ist naheliegend, dazu folgendes Lemma zu verwenden:

**Lemma 3.1.1 (Riemann-Siegel-Formel)** *Bezeichne  $0 \not\sim 1$  einen Integrationsweg längs einer Parallelen zur Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten, die die reelle Achse zwischen 0 und 1 schneidet und der in Richtung von  $\infty + i\infty$  nach  $-\infty - i\infty$  durchlaufen wird.  $0 \searrow 1$  bezeichne den dazu komplex konjugierten Pfad, der von  $-\infty + i\infty$  nach  $\infty - i\infty$  durchlaufen wird.*

Sei

$$f_1(s, z) = \frac{z^{-s} e^{\pi iz^2}}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}}, \quad f_2(s, z) = \frac{z^{s-1} e^{-\pi iz^2}}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}}$$

und, wie üblich,

$$H(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2}, \quad \left(\frac{s}{2}\right).$$

Dann gilt

$$\xi(s) = H(s) \int_{0 \not\sim 1} f_1(s, z) dz + H(1-s) \int_{0 \searrow 1} f_2(s, z) dz.$$

Einen Beweis dieses bekannten Satzes findet man z.B. in [Sie32, pp. 64–65]. Man beachte, daß gilt

$$\overline{\int_{0 \setminus 1} f_1(1 - \bar{s}, z) dz} = \int_{0 \setminus 1} f_2(s, z) dz \quad \text{und} \quad \overline{\int_{0 \setminus 1} f_2(1 - \bar{s}, z) dz} = \int_{0 \setminus 1} f_1(s, z) dz,$$

so daß die Behauptung des Lemmas wegen  $H(\bar{s}) = \overline{H(s)}$  auch in der Form

$$\xi(s) = H(s) \int_{0 \setminus 1} f_1(s, z) dz + \overline{H(1 - \bar{s}) \int_{0 \setminus 1} f_1(1 - \bar{s}, z) dz}$$

darstellbar ist.

Sei  $\phi(z)$  stets ein reelles Polynom mit  $\phi(0) = 1$  und  $\phi(z) + \phi(1 - z) = K$  mit einer Konstanten  $K \neq 0$ . Sei weiter

$$c(z) = \phi(L^{-1} \log z) \quad \text{und} \quad d(z) = \phi(1 - L^{-1} \log z),$$

so daß  $K = c(z) + d(z)$ . Damit haben wir nun

$$\begin{aligned} K \xi(s) &= H(s) \int_{0 \setminus 1} f_1(s, z) c(z) dz + H(1 - s) \int_{0 \setminus 1} f_2(s, z) d(z) dz \\ &\quad + H(1 - s) \int_{0 \setminus 1} f_2(s, z) c(z) dz + H(s) \int_{0 \setminus 1} f_1(s, z) d(z) dz. \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck können wir  $m$ -fach differenzieren und erhalten

$$\begin{aligned} K \xi^{(m)}(s) &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} H^{(k)}(s) \int_{0 \setminus 1} f_1(s, z) (-\log z)^{m-k} c(z) dz \\ &\quad + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k H^{(k)}(1 - s) \int_{0 \setminus 1} f_2(s, z) (\log z)^{m-k} d(z) dz \\ &\quad + (-1)^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} H^{(k)}(1 - s) \int_{0 \setminus 1} f_2(s, z) (-\log z)^{m-k} c(z) dz \\ &\quad + (-1)^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k H^{(k)}(s) \int_{0 \setminus 1} f_1(s, z) (\log z)^{m-k} d(z) dz. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} Q_m(s) &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} H^{(k)}(s) \int_{0 \setminus 1} f_1(s, z) (-\log z)^{m-k} c(z) dz \\ &\quad + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k H^{(k)}(1 - s) \int_{0 \setminus 1} f_2(s, z) (\log z)^{m-k} d(z) dz \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

und erhalten die gewünschte Darstellung :

$$K \xi^{(m)}(s) = Q_m(s) + (-1)^m \overline{Q_m(1 - \bar{s})}.$$

Für  $s = \frac{1}{2} + it$  ist  $1 - \bar{s} = s$  und somit können wir  $\xi^{(m)}(s)$  auf  $\sigma = \frac{1}{2}$  als Summe ( $m$  gerade) oder Differenz ( $m$  ungerade) komplex konjugierter Ausdrücke darstellen :

$$\xi^{(m)}\left(\frac{1}{2} + it\right) = K^{-1} \left( Q_m\left(\frac{1}{2} + it\right) + (-1)^m \overline{Q_m\left(\frac{1}{2} + it\right)} \right). \quad (3.1.2)$$

Allgemein gilt offensichtlich  $z = w + \bar{w}$  genau dann, wenn entweder  $w = 0$  oder  $\arg w \equiv \pi/2 \pmod{\pi}$  ist, beziehungsweise  $z = w - \bar{w}$  genau dann, wenn entweder  $w = 0$  oder  $\arg w \equiv 0 \pmod{\pi}$  gilt.

Dies ist unabhängig von der Definition des Arguments. Wir nehmen hier an, daß  $Q_m(\frac{1}{2} + iT) \neq 0$  und setzen  $\arg Q_m(\frac{1}{2} + it)$  für  $T \leq t \leq T + U$  entlang der Line  $\sigma = 1/2$  ausgehend vom Wert von  $\arg Q_m(\frac{1}{2} + iT)$  stetig fort. Ist  $\frac{1}{2} + it_0$  eine Nullstelle von  $Q_m$  mit Vielfachheit  $n$ , so definieren wir

$$\arg Q_m\left(\frac{1}{2} + it_0^+\right) = \arg Q_m\left(\frac{1}{2} + it_0^-\right) + n\pi.$$

Insgesamt ist  $\xi^{(m)}(\frac{1}{2} + it) = 0$  genau dann, wenn

$$\text{entweder} \quad \arg Q_m\left(\frac{1}{2} + it\right) \equiv \begin{cases} 0 & \pmod{\pi} & ; & m \text{ ungerade} \\ \pi/2 & \pmod{\pi} & ; & m \text{ gerade} \end{cases} \quad (3.1.3)$$

$$\text{oder} \quad Q_m\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0. \quad (3.1.4)$$

Ist  $\frac{1}{2} + it_0$  eine Nullstelle von  $Q_m$  mit Vielfachheit  $n$ , so ist nach (3.1.2)  $\frac{1}{2} + it_0$  eine Nullstelle von  $\xi^{(m)}$  mit Vielfachheit  $\geq n$ . Unsere Darstellung (3.1.2) ist eine andere als Levinsons ([Lev74a, (1.8)]), Heath-Browns Beobachtung [HB79], daß Levinson nur einfache Nullstellen zählte, trifft auf diesen Ansatz nicht zu. In Kapitel 4 werden wir das Argument von Heath-Brown auf eine andere Darstellung für  $\xi^{(m)}(s)$  anwenden.

Wir berücksichtigen hier nun nur noch die durch (3.1.3) erfaßten Nullstellen, (3.1.4) wird quasi "verschenkt".

Von nun an sollen Nullstellen stets mit ihrer Vielfachheit gezählt werden.

Ändert sich  $\arg Q_m(\frac{1}{2} + it)$  um den Wert  $\pi$ , so ist die Kongruenz (3.1.3) mindestens einmal erfüllt und es handelt sich um eine Nullstelle von  $\xi^{(m)}(\frac{1}{2} + it)$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} N_*^{(m)}(T + U) - N_*^{(m)}(T) &= \#\{t \in ]T, T + U] : \xi^{(m)}\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0\} \\ &\geq \frac{1}{\pi} \Delta \arg Q_m\left(\frac{1}{2} + it\right) \Big|_T^{T+U}. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Nach Lemma 2.1.1 und Lemma 2.4.1 gilt nun andererseits

$$\begin{aligned} N^{(m)}(t) &= \frac{t}{2\pi} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} + O_m(\log t) \\ &= \frac{1}{\pi} \arg H\left(\frac{1}{2} + it\right) + O_m(\log t). \end{aligned}$$

Da  $O(\log(T + U) + \log T) = O(\log T)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} N^{(m)}(T + U) - N^{(m)}(T) &= \#\{t \in ]T, T + U] : \xi^{(m)}(\sigma + it) = 0 ; 0 < \sigma < 1\} \\ &= \frac{1}{\pi} \Delta \arg H\left(\frac{1}{2} + it\right) \Big|_T^{T+U} + O_m(\log T). \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Die Abschätzungen (3.1.5) und (3.1.6) lassen sich auch folgendermaßen ausdrücken:

$\pi^{-1}\Delta \arg H(\frac{1}{2} + it)$  liefert im wesentlichen die Zahl aller Nullstellen im kritischen Streifen und  $\pi^{-1}\Delta \arg Q_m(\frac{1}{2} + it)$  eine Abschätzung für die Anzahl der Nullstellen auf der kritischen Geraden.

Wir haben also die Aufgabe, eine obere Schranke für die Differenz beider Werte zu finden. Dazu definieren wir

$$V(s) = \frac{Q_m(s)}{H(s)}.$$

Damit gilt also  $\Delta \arg V(s) = \Delta \arg Q_m(s) - \Delta \arg H(s)$  und mit (3.1.5) und (3.1.6) haben wir

$$N_*^{(m)}(T+U) - N_*^{(m)}(T) \geq N^{(m)}(T+U) - N^{(m)}(T) + O_m(\log T) + \frac{1}{\pi} \Delta \arg V(\frac{1}{2} + it) \Big|_T^{T+U}. \quad (3.1.7)$$

### 3.1.2 Vereinfachung von $V(s)$

Nach (3.1.7) müssen wir also  $\Delta \arg V(\frac{1}{2} + it)$  abschätzen. Dabei wird  $\arg V(\frac{1}{2} + it)$  wie das Argument von  $Q_m(\frac{1}{2} + it)$  bestimmt (vgl. Seite 23). Dazu ist es zweckmäßig, zunächst die Funktion  $V(s)$  zu vereinfachen. Um die Integrale in der Definition von  $Q_m(s)$ , (3.1.1), durch Dirichlet-Reihen ersetzen zu können, verwenden wir

**Lemma 3.1.2** *Sei  $h(z)$  analytisch in der entlang der negativen reellen Achse geschlitzten Ebene mit*

$$h(z) \ll |\log z|^j \quad \text{für } |z| > 10 \text{ und geeignetes } j > 0.$$

*Sei weiter  $|\sigma| \leq C \log L$ ,  $T \leq t \leq T+U$  und  $\eta = \sqrt{t/(2\pi)}$ .*

*Dann gilt für alle  $\varepsilon > 0$*

$$\int_{0 \setminus 1} \frac{z^{-s} e^{\pi i z^2}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} h(z) dz = \sum_{n \leq \eta} h(n) n^{-s} + O_\varepsilon(T^{\varepsilon - \sigma/2})$$

und

$$\int_{0 \setminus 1} \frac{z^{s-1} e^{-\pi i z^2}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} h(z) dz = \sum_{n \leq \eta} h(n) n^{s-1} + O_\varepsilon(T^{\varepsilon + (\sigma-1)/2}).$$

Um unsere Überlegungen an dieser Stelle nicht zu unterbrechen, werden wir dieses Lemma erst in Anhang A beweisen.

Die Voraussetzungen dieses Lemmas sind nach den Definitionen von  $c(z)$  und  $d(z)$  erfüllt, wir erhalten damit aus (3.1.1) für  $0 \leq \sigma \ll \log L$ ,  $T \leq t \leq T+U$  und  $\eta = \sqrt{t/(2\pi)}$

$$\begin{aligned} Q_m(s) &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} H^{(k)}(s) \left( \sum_{n \leq \eta} (-\log n)^{m-k} c(n) n^{-s} + O_\varepsilon(T^{\varepsilon - \sigma/2}) \right) \\ &\quad + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k H^{(k)}(1-s) \left( \sum_{n \leq \eta} (\log n)^{m-k} d(n) n^{s-1} + O_\varepsilon(T^{\varepsilon + (\sigma-1)/2}) \right). \end{aligned}$$

Schätzen wir  $H^{(k)}(s)$  nach Lemma 2.4.3 ab, so erhalten wir mit  $\chi(s) = H(1-s)/H(s)$  und  $F(s) = H'(s)/H(s)$

$$\begin{aligned}
V(s) &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left( F(s)^k + O(t^{-1} \log^{k-2} t) \right) \left( \sum_{n \leq \eta} (-\log n)^{m-k} c(n) n^{-s} + O(T^{\varepsilon-\sigma/2}) \right) \\
&\quad + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k \chi(s) \left( F(1-s)^k + O(t^{-1} \log^{k-2} t) \right) \times \\
&\quad \quad \times \left( \sum_{n \leq \eta} (\log n)^{m-k} d(n) n^{s-1} + O(T^{\varepsilon+(\sigma-1)/2}) \right) \\
&= C(s) + \chi(s)D(s) + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5 + \Sigma_6 \quad ,
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
C(s) &= \sum_{n \leq \eta} c(n) n^{-s} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} F(s)^k (-\log n)^{m-k} \\
&= \sum_{n \leq \eta} c(n) n^{-s} (F(s) - \log n)^m, \tag{3.1.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(s) &= \sum_{n \leq \eta} d(n) n^{s-1} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-F(1-s))^k \log^{m-k} n \\
&= \sum_{n \leq \eta} d(n) n^{s-1} (\log n - F(1-s))^m, \tag{3.1.9}
\end{aligned}$$

und unter Verwendung von Lemma 2.4.2 und Lemma 2.4.4,

$$\begin{aligned}
|\Sigma_1| &\leq \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} O(t^{-1} \log^{k-2} t) \sum_{n \leq \eta} c(n) n^{-\sigma} \log^{m-k} n \\
&\ll T^{-1} (\log(T+U))^{m-1} (T^{\varepsilon+1/2-\sigma/2} + T^\varepsilon) \\
&\ll T^{\varepsilon-1/2-\sigma/2} + T^{\varepsilon-1}, \\
|\Sigma_2| &\leq |\chi(s)| \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} O(t^{-1} \log^{k-2} t) \sum_{n \leq \eta} d(n) n^{\sigma-1} \log^{m-k} n \ll T^{\varepsilon-1/2-\sigma/2}, \\
|\Sigma_3| &\leq \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} |F(s)|^k O(T^{\varepsilon-\sigma/2}) \ll T^{\varepsilon-\sigma/2}, \\
|\Sigma_4| &\leq |\chi(s)| \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} |F(1-s)|^k O(T^{\varepsilon+(\sigma-1)/2}) \ll T^{\varepsilon-\sigma/2}, \\
|\Sigma_5| &\leq \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} O(t^{-1} (\log t)^{k-2} T^{\varepsilon-\sigma/2}) \ll T^{\varepsilon-1-\sigma/2}, \\
|\Sigma_6| &\leq |\chi(s)| \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} O(t^{-1} (\log t)^{k-2} T^{\varepsilon+(\sigma-1)/2}) \ll T^{\varepsilon-1-\sigma/2}.
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich mit (3.1.8) und (3.1.9)

$$V(s) = C(s) + \chi(s)D(s) + O(T^{\varepsilon - \sigma/2}). \quad (3.1.10)$$

### 3.1.3 Das Argument von $V(s)$

Nachdem wir in (3.1.10) nun eine einfachere Darstellung von  $V(s)$  gefunden haben, wollen wir (vgl. (3.1.7))  $\Delta \arg V(s)$  auf der kritischen Geraden  $\sigma = 1/2$  abschätzen.

Sei dazu  $\gamma_0$  das Rechteck mit den Ecken  $1/2 + iT$ ,  $\sigma_0 + iT$ ,  $\sigma_0 + i(T + U)$  und  $1/2 + i(T + U)$ , wobei  $\sigma_0 \geq 3$  und  $\sigma_0 = \sigma_0(m)$  (vgl. Abb. 3.1) und sei  $N$  die Zahl der Nullstellen von  $V(s)$  innerhalb von  $\gamma_0$ .

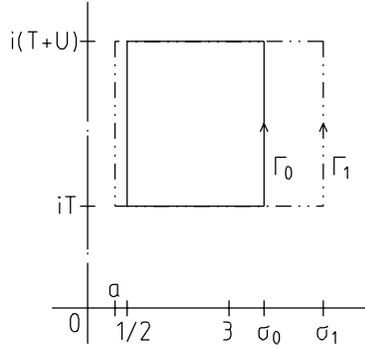


Abbildung 3.1: Integrationswege  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$

$V(s)$  ist per definitionem holomorph für  $s \neq 0, 1$ , wir können also das Argumentprinzip auf  $V(s)$  und das Rechteck  $\gamma_0$  anwenden, um eine Abschätzung für  $\Delta \arg V$  zu erhalten:

$$N = (2\pi)^{-1} \Delta \arg V(s)|_{\Gamma_0}.$$

Auf der rechten Seite und auf den horizontalen Seiten von  $\gamma_0$  können wir  $\Delta \arg V(s)$  abschätzen. Dazu überlegen wir uns zuerst, daß für  $0 \leq \sigma \leq \sigma_0 \ll_m 1$  und  $T \leq t \leq T + U$

$$\begin{aligned} \log \frac{s}{2\pi} &= \log \left| \frac{s}{2\pi} \right| + i \arg \frac{s}{2\pi} \\ &= \log \frac{t}{2\pi} + \log \left| 1 + i \frac{\sigma}{t} \right| + i \arctan \frac{t}{\sigma} \\ &= \log \frac{t}{2\pi} + O(T^{-2}) + \frac{\pi i}{2} + O(T^{-1}) \\ &= O(L) \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

und analog

$$\log \frac{1-s}{2\pi} = O(L).$$

Daraus folgt, daß für  $n \leq \eta$  nach Lemma 2.4.2

$$F(s) - \log n \ll L \quad \text{und} \quad \log n - F(1-s) \ll L.$$

Weiter ist für  $\sigma > 1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-\sigma} \leq 2^{-\sigma} + \int_2^{\infty} x^{-\sigma} dx = 2^{-\sigma} + \frac{1}{\sigma-1} 2^{1-\sigma} = \frac{\sigma+1}{\sigma-1} 2^{-\sigma}. \quad (3.1.12)$$

Insgesamt folgt mit (3.1.11), mit den Lemmata 2.4.4 und 2.4.2 und wegen  $c(1) = 1$  sowie  $c(n), d(n) \ll 1$  für  $1 \leq n \leq T$  auf der rechten Seite von ,<sub>0</sub>

$$\begin{aligned} V(s) &= C(s) + \chi(s)D(s) + O(T^{\varepsilon-\sigma_0/2}) \\ &= F(s)^m + O\left(L^m \sum_{2 \leq n \leq \eta} n^{-\sigma_0}\right) + O\left(\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1/2-\sigma_0} \cdot L^m \sum_{n \leq \eta} n^{\sigma_0-1} + T^{\varepsilon-\sigma_0/2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \log \frac{t}{2\pi} + \frac{\pi i}{4} + O(T^{-1})\right)^m + O(L^m 2^{-\sigma_0} + L^m \eta^{-2}) \\ &= \left(\frac{1}{2} \log \frac{t}{2\pi}\right)^m + O(L^m 2^{-\sigma_0}) \quad \text{für } s = \sigma_0 + it, T \leq t \leq T + U, \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

das heißt, es ist

$$\left|V(s) - \left(\frac{1}{2} \log \frac{t}{2\pi}\right)^m\right| \ll 2^{-\sigma_0} L^m.$$

Wird  $\sigma_0 = \sigma_0(m)$  hinreichend groß gewählt, so folgt hieraus wegen  $\log \frac{t}{2\pi} \geq L$ , daß auf der rechten Seite von ,<sub>0</sub> gilt:

$$\left|\Delta \arg V(\sigma_0 + it)\Big|_T^{T+U}\right| < \pi. \quad (3.1.14)$$

Auf den waagerechten Teilpfaden von ,<sub>0</sub> verwenden wir die Formel von Jensen:

**Lemma 3.1.3 (Formel von Jensen)** *Sei  $f(s)$  eine Funktion in  $s = re^{i\theta}$  ( $r, \theta$  reell) mit  $f(0) \neq 0$ , die in  $|s| \leq R$  holomorph und auf  $|s| = R$  nullstellenfrei ist.*

Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta = \int_0^R r^{-1} n(r) dr + \log |f(0)|,$$

wobei  $n(r)$  die Anzahl der Nullstellen von  $f(s)$  mit  $|s| \leq r$  bezeichnet.

Einen Beweis findet man zum Beispiel in [Ivi85, Lemma 1.1].

Zur Abschätzung von  $\Delta \arg V(\sigma + iT)\Big|_{1/2}^{\sigma_0}$  (analog  $\Delta \arg V(\sigma + i(T+U))\Big|_{1/2}^{\sigma_0}$ ) zerteilen wir das Intervall  $[\frac{1}{2} + iT, \sigma_0 + iT]$  an den Nullstellen von  $\operatorname{Re} V(\sigma + iT)$  in Teilintervalle.

Zur Abkürzung definieren wir :

$$\begin{aligned} g(z) &= \operatorname{Re} V(z + \sigma_0 + iT), \\ \text{und } q &= \#\{\sigma \in [1/2, \sigma_0] : \operatorname{Re} V(\sigma + iT) = 0\} \\ &= \#\{\sigma \in [1/2 - \sigma_0, 0] : g(\sigma) = 0\}. \end{aligned}$$

In jedem der  $q + 1$  Teilintervalle ändert sich das Vorzeichen von  $\operatorname{Re} V(\sigma + iT)$  nicht, also ist in jedem der Teilintervalle  $|\Delta \arg V(\sigma + iT)| \leq \pi$  und somit insgesamt

$$\left|\Delta \arg V(\sigma + iT)\Big|_{1/2}^{\sigma_0}\right| \leq (q + 1)\pi. \quad (3.1.15)$$

Sei  $n(r) = \#\{z : g(z) = 0, |z| < r\}$  die Anzahl der Nullstellen von  $g(z)$  im Kreis um 0 mit Radius  $r$  ( $0 \leq r \leq \sigma_0$ ). Es folgt nun einerseits  $q \leq n(\sigma_0 - 1/2)$  und daher

$$\int_0^{\sigma_0} \frac{n(r)}{r} dr \geq \int_{\sigma_0-1/2}^{\sigma_0} \frac{n(r)}{r} dr \geq n(\sigma_0 - 1/2) \int_{\sigma_0-1/2}^{\sigma_0} \frac{dr}{r} \geq q \log \left| \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - 1/2} \right|.$$

Andererseits ist Lemma 3.1.3 anwendbar, denn  $\sigma_0$  kann derart gewählt werden, daß  $g(z) \neq 0$  für  $|z| = \sigma_0$  und  $g(0) \neq 0$ . Damit ist

$$\begin{aligned} \int_0^{\sigma_0} \frac{n(r)}{r} dr &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(\sigma_0 e^{i\theta})| d\theta - \log |g(0)| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\operatorname{Re} V(\sigma_0 + iT + \sigma_0 e^{i\theta})| d\theta - \log |\operatorname{Re} V(\sigma_0 + iT)|. \end{aligned}$$

Eine grobe Abschätzung (ähnlich zu (3.1.13)) ergibt  $|\operatorname{Re} V(\sigma_0 + iT + \sigma_0 e^{i\theta})| \ll T$  für  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  und somit ist

$$\int_0^{\sigma_0} \frac{n(r)}{r} dr \leq \log(O(T)) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 d\theta + O(\log T) = O(L).$$

Insgesamt ist jetzt

$$q \cdot \log \left| \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - 1/2} \right| \leq \int_0^{\sigma_0} \frac{n(r)}{r} dr = O(L),$$

also  $q = O(L)$  und folglich wegen (3.1.15)

$$\left| \Delta \arg V(\sigma + iT) \Big|_{1/2}^{\sigma_0} \right| \leq (q+1)\pi = O(L).$$

Analog folgt

$$\left| \Delta \arg V(\sigma + i(T+U)) \Big|_{1/2}^{\sigma_0} \right| = O(L).$$

Damit und mit (3.1.14) folgt demnach

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2\pi} \Delta \arg V(s) \Big|_{\Gamma_0} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left( \Delta \arg V(1/2 + it) \Big|_T^{T+U} + \Delta \arg V(\sigma + i(T+U)) \Big|_{1/2}^{\sigma_0} \right. \\ &\quad \left. - \Delta \arg V(\sigma_0 + it) \Big|_T^{T+U} - \Delta \arg V(\sigma + iT) \Big|_{1/2}^{\sigma_0} \right), \end{aligned}$$

somit insgesamt

$$\Delta \arg V(1/2 + it) \Big|_T^{T+U} = -2\pi N + O(L). \quad (3.1.16)$$

Die linke Seite dieser Gleichung wollten wir nach oben abschätzen. Für  $N$  eine entsprechende Schranke zu finden, wird daher unsere nächste Aufgabe sein.

### 3.1.4 Die Anzahl der Nullstellen

Zur Abschätzung von  $N$ , der Anzahl der Nullstellen von  $V(s)$  im Inneren des Rechtecks  $\mathcal{R}_{\sigma_1, \sigma_2, t_1, t_2}$  (s. Seite 26), verwenden wir

**Lemma 3.1.4 (Littlewoods Lemma)** *Sei  $f(s)$  in  $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$  eindeutig und bis auf Pole holomorph mit  $f(s) \neq 0, \infty$  für  $\sigma = \sigma_2$ . Bezeichne  $\nu(\alpha)$  den Überschuß der Anzahl der Nullstellen über die Anzahl der Pole von  $f(s)$  im Rechteck  $\alpha < \sigma < \sigma_2$ ,  $t_1 < t < t_2$ , wobei  $\sigma_1 \leq \alpha < \sigma_2$  sei.*

Dann gilt

$$2\pi \int_{\alpha}^{\sigma_2} \nu(\sigma) d\sigma = \int_{t_1}^{t_2} (\log |f(\alpha + it)| - \log |f(\sigma_2 + it)|) dt + \int_{\alpha}^{\sigma_2} (\arg f(\sigma + it_2) - \arg f(\sigma - it_1)) d\sigma.$$

Einen Beweis findet man in [Tit51] oder [Pra78].

Wir werden dieses Lemma nun allerdings nicht auf  $\mathcal{R}_{\sigma_1, \sigma_2, t_1, t_2}$  und  $V(s)$  anwenden, sondern auf das Rechteck  $\mathcal{R}_{\sigma_1, \sigma_2, T, T+U}$  (Abb. 3.1) mit den Ecken  $a + iT$ ,  $\sigma_1 + iT$ ,  $\sigma_1 + i(T+U)$  und  $a + i(T+U)$ , wobei  $\sigma_1 = \log L$  und

$$a = \frac{1}{2} - \frac{R}{L} \quad \text{mit einer Konstanten } R > 0, \quad (3.1.17)$$

und auf die Funktion  $(2/L)^m \psi(s)V(s)$ , wobei

$$\psi(s) = \sum_{k \leq y} b(k)k^{-s} \quad (3.1.18)$$

mit den Koeffizienten  $b(1) = 1$ ,  $b(k) \ll 1$  und mit  $y = T^{1/2}L^{-20}$  die bereits in Kapitel 1 angesprochene glättende Funktion darstellt.

Sei jetzt  $\nu(\sigma)$  wie in Lemma 3.1.4. Da  $(2/L)^m \psi(s)V(s)$  im betrachteten Gebiet keine Pole besitzt, ist

$$\int_a^{\sigma_1} \nu(\sigma) d\sigma = \sum^*(\beta - a),$$

dabei bezeichnet  $\sum^*$  die Summe über alle Nullstellen  $\beta + i\gamma$  von  $\psi(s)V(s)$  im Inneren von  $\mathcal{R}_{\sigma_1, \sigma_2, T, T+U}$ , zu denen auch die Nullstellen von  $V(s)$  im Inneren von  $\mathcal{R}_{\sigma_1, \sigma_2, 0, T}$  gehören. Liegt außerdem  $\beta + i\gamma$  im Inneren von  $\mathcal{R}_{\sigma_1, \sigma_2, 0, T}$ , dann ist  $\beta \geq 1/2$ , und somit gilt wegen (3.1.17)

$$\sum^*(\beta - a) \geq \left(\frac{1}{2} - a\right) N = \frac{R}{L} N. \quad (3.1.19)$$

Die Anwendung von Lemma 3.1.4 liefert damit

$$\begin{aligned}
N \leq \frac{L}{2\pi R} & \left( \int_T^{T+U} \log |(2/L)^m \psi V(a+it)| dt \right. \\
& - \int_T^{T+U} \log |(2/L)^m \psi V(\sigma_1+it)| dt \\
& + \int_a^{\sigma_1} \arg((2/L)^m \psi V(\sigma+i(T+U))) d\sigma \\
& \left. - \int_a^{\sigma_1} \arg((2/L)^m \psi V(\sigma+iT)) d\sigma \right). \tag{3.1.20}
\end{aligned}$$

Für  $0 \leq \sigma \leq \sigma_1 = \log L$  und  $T \leq t \leq T+U$  ist nun, vgl. (3.1.11),

$$\log \frac{s}{2\pi} = \log \frac{t}{2\pi} + O(T^{-2} \log L) + \frac{\pi i}{2} + O(T^{-1} \log L) = O(L)$$

und analog zu den obigen Überlegungen (vgl. (3.1.13)) erhalten wir

$$\begin{aligned}
V(\sigma_1+it) &= \left( \frac{1}{2} \log \frac{t}{2\pi} \right)^m + O(L^{m-1}) \\
&= (L/2)^m \left( \left( L^{-1} \log \frac{t}{2\pi} \right)^m + O(L^{-1}) \right) \\
&= (L/2)^m \left( \left( 1 + L^{-1} \log \frac{t}{T} \right)^m + O(L^{-1}) \right) \\
&= (L/2)^m \left( 1 + O(L^{-1}) \right),
\end{aligned}$$

also für  $T \leq t \leq T+U$

$$(2/L)^m V(\sigma_1+it) = 1 + O(L^{-1}).$$

Vergleicht man diese Rechnungen mit (3.1.13), so stellt man fest, daß wir hier das Restglied  $O(L^{m-1})$  statt  $O(L^m 2^{-\sigma_0}) = O(L^m)$  haben, der Realteil  $\sigma_1$  statt  $\sigma_0$  bringt uns hier also einen Gewinn in der Größenordnung von  $L$ . Hieran und an (3.1.19) sieht man den (technischen) Grund für die Verwendung von  $\sigma_1$  statt  $\sigma_0$ .

Für  $s = \sigma_1 + it$  gilt nach (3.1.18) weiter

$$\begin{aligned}
\psi(s) &= 1 + \sum_{2 \leq k \leq y} b(k) k^{-s} \\
&= 1 + O \left( \sum_{2 \leq k \leq y} k^{-\sigma_1} \right) \\
&= 1 + O(L^{-1}).
\end{aligned}$$

Das zweite Integral aus (3.1.20) können wir nun leicht abschätzen :

$$\begin{aligned}
& \int_T^{T+U} \log |(2/L)^m \psi V(\sigma_1+it)| dt \\
&= \int_T^{T+U} \log |(2/L)^m V(\sigma_1+it)| dt + \int_T^{T+U} \log |\psi(\sigma_1+it)| dt \\
&= O(UL^{-1}).
\end{aligned}$$

Analog zu der obigen Anwendung von Lemma 3.1.3 sind die Integrale über horizontale Wege  $\ll L \log L$ , die Beiträge des zweiten, dritten und vierten Integrals aus (3.1.20) sind also insgesamt  $\ll UL^{-1}$ .

Wir haben folglich nach (3.1.20)

$$N \leq \frac{L}{2\pi R} \int_T^{T+U} \log |(2/L)^m \psi V(a+it)| dt + O(U). \quad (3.1.21)$$

Um dieses Integral besser handhaben zu können, entfernen wir den Logarithmus aus dem Integranden. Da der Logarithmus konkav ist, gilt allgemein nach Jensens Ungleichung (z.B. [Rud87, Thm. 3.3])

$$\int_T^{T+U} \log f(t) dt \leq U \log \left( \frac{1}{U} \cdot \int_T^{T+U} f(t) dt \right)$$

und angewandt auf unser Integral

$$\int_T^{T+U} \log |(2/L)^m \psi V(a+it)| dt \leq U \log \left( \frac{I}{U} \right),$$

wobei

$$I = \int_T^{T+U} |(2/L)^m \psi V(a+it)| dt. \quad (3.1.22)$$

An dieser Stelle kommt nun auch die Funktion  $\psi$  ins Spiel. Sie hat die Aufgabe — bei geeigneter Wahl der Koeffizienten  $b(k)$  — die Schwankungen von  $V(s)$  zu dämpfen. Je glatter  $\psi V(s)$  ist, desto schärfer wird die letzte Abschätzung. Da die Gestalt der Koeffizienten aber für die nächsten Berechnungen nicht wichtig ist, wollen wir ihre Wahl noch etwas aufschieben (s. Seite 58).

Mit (3.1.21) folgt jetzt

$$N \leq \frac{UL}{2\pi R} \log(I/U) + O(U). \quad (3.1.23)$$

Zusammenfassend können wir nach (2.1.3), (3.1.7), Lemma 2.1.1, (3.1.16) und (3.1.23) folgern

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{\varliminf_{T \rightarrow \infty} N_*^{(m)}(T+U) - N_*^{(m)}(T)}{N^{(m)}(T+U) - N^{(m)}(T)} \\ &\geq 1 + \frac{\varliminf_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi^{-1} \Delta \arg V(1/2+it)|_T^{T+U}}{\frac{U}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi}} + O(U^{-1}) \right)}{N^{(m)}(T+U) - N^{(m)}(T)} \\ &\geq 1 - \frac{\varliminf_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{2\pi \cdot 2N}{UL} + O(L^{-1}) \right)}{N^{(m)}(T+U) - N^{(m)}(T)} \\ &\geq 1 - \frac{\varliminf_{T \rightarrow \infty} 2}{R} \log \frac{I}{U}. \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

Nun haben wir, wie gewünscht, eine Abschätzung für den Anteil der Nullstellen von  $\xi^{(m)}(s)$  auf der kritischen Geraden hergeleitet.

Unser nächstes Problem wird die Vereinfachung des Integrals  $I$  sein.

## 3.2 Vereinfachung des Integranden

### 3.2.1 Zielsetzung

Unser Ziel ist es nun, das Integral  $I$  aus (3.1.22) zu vereinfachen. Die Idee ist, die Abhängigkeit des Integranden von der Integrationsvariable  $t$  nach Möglichkeit zu reduzieren. Dazu werden wir die Variable  $t$  sowohl in den Summationsbedingungen der Dirichletpolynome  $C(s)$  und  $D(s)$  als auch in ihren Koeffizienten durch die Konstante  $T$  ersetzen.

Diese Idee geht zurück auf Levinson selbst, der seinen ursprünglichen Beweis in [Lev75b] in der beschriebenen Weise vereinfachte, allerdings die Summationsbedingungen  $n \leq \sqrt{t/(2\pi)}$  beibehielt. Pan war es schließlich, der in [Pan79] zeigte, daß nur über  $n \leq \sqrt{T/(2\pi)}$  summiert zu werden braucht. Dies hat zur Folge, daß sich Levinsons Integrale ([Lev74a, (2.22), ..., (2.27)]) leichter abschätzen lassen, daß die Lemmata 3.3 und 3.4 aus [Lev74a] einfacher werden (Lemma 3.3.1 der vorliegenden Arbeit), und letztlich, daß Levinsons Lemma 3.7 überhaupt nicht mehr benötigt wird.

Um dies zu erreichen, setzen wir

$$C_1(s) = \sum_{n \leq \tau} c(n) \left(1 + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \log n}{L}\right)^m n^{-s}, \quad (3.2.1)$$

$$D_1(s) = \sum_{n \leq \tau} d(n) \left(\frac{2 \log n}{L} + \frac{\pi i}{2L} - 1\right)^m n^{s-1}, \quad (3.2.2)$$

$$\text{wobei} \quad \tau := \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \leq \eta := \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$$

und, motiviert durch Lemma 2.4.4,

$$\chi^*(t) = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{1/2-a} \exp\left(\frac{\pi i}{4} - it \log \frac{t}{2\pi} + it\right), \quad (3.2.3)$$

$$V^*(s) = C_1(s) + \chi^*(t)D_1(s) \quad (3.2.4)$$

und schließlich noch

$$I^* = \int_T^{T+U} |\psi V^*(a+it)| dt. \quad (3.2.5)$$

Wir überlegen uns zuerst, daß wegen Lemma 2.4.2 und (3.1.11) für  $\sigma = a$  und  $T \leq t \leq T+U$

$$F(s) = \frac{1}{2} \log \frac{s}{2\pi} + O(t^{-1}) = \frac{1}{2} \log \frac{t}{2\pi} + \frac{\pi i}{4} + O(T^{-1})$$

und analog

$$F(1-s) = \frac{1}{2} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{\pi i}{4} + O(T^{-1})$$

Zur Abkürzung sei im folgenden  $\ell = \log \frac{t}{2\pi}$  und es gelte  $s = a - it$  mit  $T \leq t \leq T+U$ .

Wir erhalten nach (3.1.8)

$$\begin{aligned}
C(s) &= \sum_{n \leq \eta} c(n) (F(s) - \log n)^m n^{-s} \\
&= \sum_{n \leq \eta} c(n) \left( \frac{\ell}{2} + \frac{\pi i}{4} - \log n \right)^m n^{-s} + \eta \cdot \left( \frac{\ell}{2} + \frac{\pi i}{4} - \log n \right)^{m-1} \cdot O(T^{-1}) \\
&= \sum_{n \leq \eta} c(n) \left( \frac{\ell}{2} + \frac{\pi i}{4} - \log n \right)^m n^{-s} + O(T^{1/2} L^{m-1}).
\end{aligned}$$

Also ist

$$(2/L)^m C(s) = C_1(s) + C_2(s) + C_3(s) + O(T^{1/2} L^{-1}) \quad \text{für } \sigma = a,$$

wobei  $C_1(s)$  wie in (3.2.1) definiert ist, und wobei

$$\begin{aligned}
C_2(s) &= \sum_{n \leq \tau} c(n) \left( \left( \frac{\ell}{L} + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \log n}{L} \right)^m - \left( 1 + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \log n}{L} \right)^m \right) n^{-s}, \\
C_3(s) &= \sum_{\tau < n \leq \eta} c(n) \left( \frac{\ell}{L} + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \log n}{L} \right)^m n^{-s}.
\end{aligned}$$

Analog behandeln wir  $D(s)$  statt  $C(s)$ . Es folgt

$$\begin{aligned}
\left( \frac{2}{L} \right)^m D(s) &= \sum_{n \leq \eta} d(n) \left( \frac{2 \log n}{L} + \frac{\pi i}{2L} - \frac{\ell}{L} \right)^m n^{s-1} + O(T^{-1/2} L^{-1}) \\
&= D_1(s) + D_2(s) + D_3(s) + O(T^{-1/2} L^{-1}) \quad \text{für } \sigma = a,
\end{aligned}$$

mit  $D_1(s)$  gemäß (3.2.2) und

$$\begin{aligned}
D_2(s) &= \sum_{n \leq \tau} d(n) \left( \left( \frac{2 \log n}{L} + \frac{\pi i}{2L} - \frac{\ell}{L} \right)^m - \left( \frac{2 \log n}{L} + \frac{\pi i}{2L} - 1 \right)^m \right) n^{s-1}, \\
D_3(s) &= \sum_{\tau < n \leq \eta} d(n) \left( \frac{2 \log n}{L} + \frac{\pi i}{2L} - \frac{\ell}{L} \right)^m n^{s-1}.
\end{aligned}$$

Die Dreiecksungleichung liefert nun für  $\sigma = a$

$$\begin{aligned}
I - I^* &= \int_T^{T+U} |(2/L)^m \psi V(s)| dt - \int_T^{T+U} |\psi V^*(s)| dt \\
&\leq \int_T^{T+U} \left| \psi(s) \left( (2/L)^m C(s) + (2/L)^m \chi(s) D(s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - C_1(s) - \chi^*(t) D_1(s) + O(T^{\varepsilon-a/2}) \right) \right| dt \\
&\leq \int_T^{T+U} |\psi C_2(s)| dt + \int_T^{T+U} |\psi C_3(s)| dt + \int_T^{T+U} |\chi \psi D_2(s)| dt \\
&\quad + \int_T^{T+U} |\chi \psi D_3(s)| dt + \int_T^{T+U} |(\chi(s) - \chi^*(t)) \psi D_1(s)| dt \\
&\quad + \int_T^{T+U} |(1 + \chi(s)) \psi(s) \cdot O(T^{-1/2} L^{-1})| dt + \int_T^{T+U} |\psi(s) \cdot O(T^{\varepsilon-a/2})| dt \\
&=: f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7. \tag{3.2.6}
\end{aligned}$$

Diese sieben Integrale müssen wir nun abschätzen. Um dies zu erreichen, werden wir mehrfach das folgende, von Conrey ([Con83a, L. 5]) stammende Lemma verwenden, das wir wegen seiner Bedeutung hier auch gleich beweisen wollen.

### 3.2.2 Ein Hilfssatz

**Lemma 3.2.1** *Seien die Funktionen  $f_\nu(t)$  für  $1 \leq n \leq \nu \leq N$  komplexwertig und definiert auf dem Intervall  $[T_1, T_2]$  mit  $|f_\nu(t)| \leq \delta$  und mit der Totalvariation  $\text{var } f_\nu(t)|_{T_1}^{T_2} \leq \delta$  und sei  $a_\nu \in \mathbb{C}$  für  $n \leq \nu \leq N$ . Dann gilt mit einer absoluten impliziten Konstanten*

$$\int_{T_1}^{T_2} \left| \sum_{\nu=n}^N a_\nu f_\nu(t) \nu^{-it} \right|^2 dt = \sum_{\nu=n}^N |a_\nu|^2 \int_{T_1}^{T_2} |f_\nu(t)|^2 dt + O \left( \delta^2 N \log N \sum_{\nu=n}^N |a_\nu|^2 \right).$$

**Beweis:** OBdA brauchen wir nur den Fall  $n = 1$  betrachten, da wir sonst  $a_\nu = 0$  oder  $f_\nu(t) = 0$  für  $1 \leq \nu < n$  setzen können.

Da die  $f_\nu$  von beschränkter Variation sind, sind sie integrierbar, wir können das Integral also in die Summe hineinziehen und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{T_2} \left| \sum_{\nu=1}^N a_\nu f_\nu(t) \nu^{-it} \right|^2 dt &= \int_{T_1}^{T_2} \sum_{1 \leq \nu, \mu \leq N} \overline{a_\nu} a_\mu \overline{f_\nu(t)} f_\mu(t) (\nu/\mu)^{it} dt \\ &= \sum_{1 \leq \nu, \mu \leq N} \overline{a_\nu} a_\mu \int_{T_1}^{T_2} \overline{f_\nu(t)} f_\mu(t) (\nu/\mu)^{it} dt \\ &= \sum_{\nu=1}^N |a_\nu|^2 \int_{T_1}^{T_2} |f_\nu(t)|^2 dt + \mathcal{R}, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

wobei

$$|\mathcal{R}| \leq \sum_{\substack{1 \leq \nu, \mu \leq N \\ \nu \neq \mu}} |\overline{a_\nu} a_\mu| \left| \int_{T_1}^{T_2} \overline{f_\nu(t)} f_\mu(t) (\nu/\mu)^{it} dt \right|. \quad (3.2.8)$$

Sei  $g(t) = \frac{y^{it}}{i \log y}$  mit  $y > 0$  und  $y \neq 1$ , dann ist  $g'(t) = y^{it}$  und daher

$$\begin{aligned} \int_A^B f(t) y^{it} dt &= \int_A^B f(t) dg(t) = f(t)g(t) \Big|_A^B - \int_A^B g(t) df(t) \\ &= \frac{1}{i \log y} \left( f(t)y^{it} \Big|_A^B - \int_A^B y^{it} df(t) \right). \end{aligned}$$

Jetzt folgt wegen  $|y^{it}| = 1$

$$f(t)y^{it} \Big|_A^B \ll \sup_{A \leq t \leq B} |f(t)| \quad \text{und} \quad \int_A^B y^{it} df(t) \ll \text{var } f(t) \Big|_A^B.$$

Mit  $f = \overline{f_\nu} f_\mu$  und  $y = \nu/\mu$  gilt nun

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{T_2} \overline{f_\nu(t)} f_\mu(t) dt &\ll \frac{1}{\log(\nu/\mu)} \left( \sup_{T_1 \leq t \leq T_2} |\overline{f_\nu(t)} f_\mu(t)| + \text{var}(\overline{f_\nu(t)} f_\mu(t)) \Big|_{T_1}^{T_2} \right) \\ &\ll \frac{\delta^2}{\log(\nu/\mu)}, \end{aligned}$$

da  $\sup |\overline{f_\nu(t)} f_\mu(t)| \leq \delta^2$  und ([Apo74, Thm. 6.9])

$$\text{var} \overline{f_\nu} f_\mu \leq \sup |f_\nu| \cdot \text{var} f_\mu + \sup |f_\mu| \cdot \text{var} f_\nu \leq 2\delta^2.$$

Somit liefert (3.2.8)

$$|\mathcal{R}| \ll \delta^2 \sum_{\substack{1 \leq \nu, \mu \leq N \\ \nu \neq \mu}} \left| \frac{\overline{a_\nu} a_\mu}{\log(\nu/\mu)} \right| \ll \delta^2 \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq N} \frac{|\overline{a_\nu} a_\mu|}{\log(\nu/\mu)}.$$

Diese Summe gilt es nun abzuschätzen. Sei zuerst  $\mu < \nu/2$ , dann ist  $\log(\nu/\mu) > 2$  und daher

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq \mu < \nu \leq N \\ \mu < \nu/2}} \frac{|\overline{a_\nu} a_\mu|}{\log(\nu/\mu)} &< \frac{1}{\log 2} \sum_{\substack{1 \leq \mu < \nu \leq N \\ \mu < \nu/2}} |\overline{a_\nu} a_\mu| \\ &\leq \frac{1}{\log 2} \sum_{1 \leq \nu, \mu \leq N} |\overline{a_\nu} a_\mu| \\ &= \frac{1}{\log 2} \left( \sum_{\nu=1}^N |a_\nu| \right)^2. \end{aligned}$$

Nach der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung ist also

$$\sum_{\substack{1 \leq \mu < \nu \leq N \\ \mu < \nu/2}} \frac{|\overline{a_\nu} a_\mu|}{\log(\nu/\mu)} \leq \frac{N}{\log 2} \sum_{\nu=1}^N |a_\nu|^2$$

und paßt somit in das behauptete Restglied.

Für die restlichen Summanden ist  $\mu \geq \nu/2$  und mit  $r := \nu - \mu > 0$  folgt  $1 \leq r \leq \nu/2$ , also

$$\log \frac{\nu}{\mu} = \log \frac{\nu}{\nu - r} = -\log \left( 1 - \frac{r}{\nu} \right) > \frac{r}{\nu}.$$

Nun folgt wegen  $|xy| \leq \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2)$

$$\sum_{\substack{1 \leq \mu < \nu \leq N \\ \mu \geq \nu/2}} \frac{|\overline{a_\nu} a_\mu|}{\log(\nu/\mu)} \ll \sum_{\nu=2}^N \sum_{r \leq \nu/2} \frac{\nu}{r} |\overline{a_\nu} a_{\nu-r}| \ll \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

wobei<sup>1</sup>

$$\Sigma_1 = \sum_{\nu=2}^N \nu |a_\nu|^2 \sum_{r \leq \nu/2} \frac{1}{r} \ll N \log N \sum_{\nu=1}^N |a_\nu|^2$$

<sup>1</sup>Ich folge hier einem Hinweis von Prof. Dr. W. Schwarz

und

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 &= \sum_{\nu=2}^N \sum_{r \leq \nu/2} \frac{\nu}{r} |a_{\nu-r}|^2 = \sum_{\nu=2}^N \sum_{\nu/2 < \mu \leq \nu-1} \frac{\nu}{\nu-\mu} |a_\mu|^2 \\
&\leq \sum_{\mu=1}^{N-1} |a_\mu|^2 \sum_{\mu < \nu < \min\{N, 2\mu\}} \frac{\nu}{\nu-\mu} \leq N \sum_{\mu=1}^N |a_\mu|^2 \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} \\
&\ll N \log N \sum_{\mu=1}^N |a_\mu|^2.
\end{aligned}$$

Insgesamt ist also

$$|\mathcal{R}| \ll N \sum_{\nu=1}^N |a_\nu|^2 + \Sigma_1 + \Sigma_2 \ll N \log N \sum_{\nu=1}^N |a_\nu|^2$$

und damit und mit (3.2.7) folgt die Behauptung.  $\square$

### 3.2.3 Anwendungen des Hilfssatzes

Das soeben bewiesene Lemma 3.2.1 werden wir nun wie angekündigt auf die Integrale  $f_1, \dots, f_7$  aus (3.2.6) anwenden. Davor sind jedoch noch einige Überlegungen erforderlich.

Wegen  $U = TL^{-10}$  ist

$$\frac{\ell}{L} - 1 = \frac{1}{L} \left( \log \frac{t}{2\pi} - \log \frac{T}{2\pi} \right) \leq \frac{1}{L} \log \frac{T+U}{T} \ll L^{-11},$$

also

$$\frac{\ell}{L} = 1 + O(L^{-11}). \quad (3.2.9)$$

Weiter haben wir für  $n \leq \tau = \sqrt{T/(2\pi)}$

$$\left| \frac{\pi i}{2L} - 2 \log n \right| \leq L^{-1} (\pi/2 + \log \tau^2) = L^{-1} (\pi/2 + L) = 1 + O(L^{-1}).$$

Damit folgt für  $n \leq \tau$

$$\left| \left( \frac{\ell}{L} + \frac{\pi i}{2L} - 2 \log n \right)^m \right| \leq (2 + O(L^{-1}))^m = O_m(1) \quad (3.2.10)$$

und analog

$$\left| \left( 1 + \frac{\pi i}{2L} - 2 \log n \right)^m \right| = O_m(1). \quad (3.2.11)$$

Setzen wir nun

$$f_n(t) = \left( \frac{\ell}{L} + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \log n}{L} \right)^m - \left( 1 + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \log n}{L} \right)^m,$$

dann gilt wegen  $x^m - y^m = (x - y) \sum_{\mu=0}^{m-1} x^{m-\mu-1} y^\mu$

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \left(\frac{\ell}{L} - 1\right) \sum_{\mu=0}^{m-1} \left(\frac{\ell}{L} + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \log n}{L}\right)^{m-\mu-1} \left(1 + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \log n}{L}\right)^\mu \\ &\ll \left(\frac{\ell}{L} - 1\right) \\ &\ll L^{-11} \quad . \end{aligned}$$

Um unser Lemma 3.2.1 anwenden zu können, muß auch noch die Totalvariation von  $f_n(t)$  abgeschätzt werden. Nach der Definition gilt

$$\text{var } f_n(t)|_T^{T+U} = \sup \sum_{i=1}^k |f_n(t_i) - f_n(t_{i-1})|,$$

wobei  $T = t_0 < \dots < t_k = T + U$  und wobei das Supremum über alle derartigen Partitionen gebildet wird.

Sei  $\ell_i = \log \frac{t_i}{2\pi}$  und  $\varepsilon_i = t_i - t_{i-1}$ . Dann ist  $\sum_{i=1}^k \varepsilon_i = U$  und weiter folgt

$$\begin{aligned} f_n(t_i) - f_n(t_{i-1}) &\ll \frac{\ell_i}{L} - \frac{\ell_{i-1}}{L} \\ &= \frac{1}{L} \log \left(1 + \frac{\varepsilon_i}{t_{i-1}}\right) \\ &\ll \frac{\varepsilon_i}{Lt_{i-1}} \end{aligned}$$

und somit insgesamt

$$\text{var } f_n(t)|_T^{T+U} \ll \frac{1}{L} \sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon_i}{t_{i-1}} \ll \frac{U}{LT} = L^{-11}. \quad (3.2.12)$$

Wir können also in Lemma 3.2.1  $\delta \ll L^{-11}$  und  $a_n = c(n) n^{-a}$  setzen und erhalten wegen  $\tau \log \tau \ll U$

$$\begin{aligned} \int_T^{T+U} |C_2(a + it)|^2 dt &= \sum_{1 \leq n \leq \tau} \left| \frac{c(n)}{n^a} \right|^2 \int_T^{T+U} |f_n(t)|^2 dt + O \left( \delta^2 \tau \log \tau \sum_{1 \leq n \leq \tau} \left| \frac{c(n)}{n^a} \right|^2 \right) \\ &\ll UL^{-22} \sum_{1 \leq n \leq \tau} \frac{|c(n)|^2}{n^{2a}}. \end{aligned}$$

Auf Seite 29 mußten wir die Variable  $a = \frac{1}{2} - \frac{R}{L}$  einführen — beispielsweise würde (3.1.19) für  $a = 1/2$  keine Abschätzung für  $N$  liefern —, jetzt müssen wir sie wieder entfernen. Es gilt aber  $n^{2a} = n \cdot n^{2R/L}$  und wegen  $n \leq \tau = \sqrt{T/(2\pi)}$

$$n^{2R/L} \leq \tau^{2R/L} = \exp(2RL^{-1} \log \tau) = e^R \ll_R 1. \quad (3.2.13)$$

Der Faktor  $n^{2a}$  läßt sich somit durch  $O(n)$  für  $n \leq \tau$  abschätzen. Von dieser Möglichkeit werden wir noch wiederholt Gebrauch machen.

Da außerdem  $c(n) \ll (L^{-1} \log n)^j$  mit geeignetem  $j = j(\phi)$ , erhalten wir

$$\int_T^{T+U} |C_2(a+it)|^2 dt \ll UL^{-22} (L^{-1} \log \tau)^{2j} \log \tau \ll L. \quad (3.2.14)$$

Analog verfahren wir mit  $C_3(s)$ . Wir wenden Lemma 3.2.1 an mit  $a_n = c(n) n^{-a}$  und

$$f_n(t) = \begin{cases} \left( \frac{\ell}{L} + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \log n}{L} \right)^m & ; \quad \tau < n \leq \eta & \iff & T < 2\pi n^2 \leq t \\ 0 & ; \quad \eta < n \leq \tau_1 & \iff & t < 2\pi n^2 \leq T+U, \end{cases}$$

wobei

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{T+U}{2\pi}}.$$

Nach (3.2.10) ist  $|f_n(t)| \ll 1$  und analog zu (3.2.12)

$$\text{var } f_n(t) \Big|_{2\pi n^2}^{T+U} \ll L^{-11} \quad \text{und} \quad \text{var } f_n(t) \Big|_T^{2\pi n^2} = 0,$$

wir können also  $\delta \ll 1$  wählen. Es ist  $\tau_1 \log \tau_1 \ll U$  und  $n^{2R/L} \leq e^R 2^{R/L} \ll_R 1$  für  $n \leq \tau_1$  und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_T^{T+U} |C_3(a+it)|^2 dt &= \sum_{\tau < n \leq \tau_1} \frac{|c(n)|^2}{n^{2a}} \int_T^{T+U} |f_n(t)|^2 dt + O\left(\tau_1 \log \tau_1 \sum_{\tau < n \leq \tau_1} \frac{|c(n)|^2}{n^{2a}}\right) \\ &\ll U \sum_{\tau < n \leq \tau_1} \frac{|c(n)|^2}{n} n^{2R/L} \\ &\ll U \sum_{\tau < n \leq \tau_1} \frac{1}{n} \\ &\ll UL^{-10}. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Auch die in den Integranden von  $f_1, \dots, f_7$  weiterhin auftretende Funktion  $\psi$  läßt sich mit Lemma 3.2.1 behandeln. Wir wählen  $a_n = b(k) k^{-\sigma}$ ,  $f_n(t) = 1$  und  $\delta = 1$  und erhalten wegen  $|b(k)| \ll 1$

$$\int_T^{T+U} |\psi(a+it)|^2 dt = \sum_{k \leq y} \frac{|b(k)|^2}{k^{2a}} \int_T^{T+U} 1 dt + O\left(y \log y \sum_{k \leq y} \frac{|b(k)|^2}{k^{2a}}\right) \ll UL.$$

Mit diesen Ergebnissen können wir jetzt die ersten Integrale untersuchen. Wir verwenden die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und erhalten

$$\begin{aligned} f_1 &= \int_T^{T+U} |\psi C_2(a+it)| dt \\ &\leq \left( \int_T^{T+U} |\psi(a+it)|^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left( \int_T^{T+U} |C_2(a+it)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\ll (UL)^{1/2} (UL^{-21})^{1/2} \ll UL^{-10} \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

und

$$f_2 = \int_T^{T+U} |\psi C_3(a+it)| dt \ll (UL)^{1/2} (UL^{-10})^{1/2} \ll UL^{-9/2}, \quad (3.2.17)$$

sowie

$$f_7 = \int_T^{T+U} |\psi(a+it) \cdot O(T^{\varepsilon-a/2})| dt \ll (UL)^{1/2} U^{1/2} T^{\varepsilon-a/2} \ll UT^{\varepsilon-1/4}. \quad (3.2.18)$$

$D_2(s)$  und  $D_3(s)$  schätzen wir ebenfalls mit Lemma 3.2.1 ab. Wir setzen zuerst  $a_n = d(n)n^{a-1}$  und

$$f_n(t) = \left( \left( \frac{2 \log n}{L} + \frac{\pi i}{2L} - \frac{\ell}{L} \right)^m - \left( \frac{2 \log n}{L} + \frac{\pi i}{2L} - 1 \right)^m \right) n^{2it} \ll L^{-11},$$

so daß mit  $\delta \ll L^{-11}$

$$\begin{aligned} \int_T^{T+U} |D_2(s)|^2 dt &= \sum_{1 \leq n \leq \tau} \left| \frac{d(n)}{n^{a-1}} \right|^2 \int_T^{T+U} |f_n(t)|^2 dt + O \left( \delta^2 \tau \log \tau \sum_{1 \leq n \leq \tau} \left| \frac{d(n)}{n^{a-1}} \right|^2 \right) \\ &\ll UL^{-22} \sum_{1 \leq n \leq \tau} \frac{1}{n} n^{-2R/L} \\ &\ll UL^{-21}. \end{aligned}$$

Die Abschätzung von  $C_3(s)$  überträgt sich in ähnlicher Weise auf  $D_3(s)$  und ergibt

$$\int_T^{T+U} |D_3(s)|^2 dt \ll UL^{-10}.$$

Da nach Lemma 2.4.4  $|\chi(a+it)| \ll (T/(2\pi))^{R/L} = e^R \ll_R 1$  ergibt sich analog zu (3.2.16), (3.2.17) und (3.2.18)

$$f_3 = \int_T^{T+U} |\chi \psi D_2(a+it)| dt \ll UL^{10} \quad (3.2.19)$$

und

$$f_4 = \int_T^{T+U} |\chi \psi D_3(a+it)| dt \ll UL^{-9/2}, \quad (3.2.20)$$

sowie

$$f_6 = \int_T^{T+U} |(1+\chi)\psi(a+it) \cdot O(T^{-1/2}L^{-1})| dt \ll UL^{-1/2}T^{-1/2}. \quad (3.2.21)$$

Es bleibt  $f_5$ . Nach Lemma 2.4.4 gilt

$$\chi(a+it) = \left( \frac{t}{2\pi} \right)^{1/2-a} \exp \left( \frac{\pi i}{4} - it \log \frac{t}{2\pi} + it \right) \left( 1 + O \left( \frac{\log^2 L}{T} \right) \right)$$

und wegen (3.2.3) und (3.2.9) erhalten wir

$$\begin{aligned}
|\chi(a+it) - \chi^*(t)| &= \left| \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1/2-a} - \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{1/2-a} + O\left(\frac{\log^2 L}{T} \cdot \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1/2-a}\right) \right| \\
&= \left| e^{R\ell/L} - e^R + O(L^{-11}) \right| \\
&= (1 + e^R) \cdot O(L^{-11}) \\
&\ll L^{-11}.
\end{aligned}$$

Auf die bereits bekannte Art und Weise verwenden wir Lemma 3.2.1, um auch noch  $\int_T^{T+U} |D_1(a+it)|^2 dt$  abzuschätzen. Es ergibt sich

$$\int_T^{T+U} |D_1(a+it)|^2 dt \ll U \sum_{n \leq \tau} \frac{1}{n} n^{-2R/L} \ll UL$$

und daher

$$f_5 = \int_T^{T+U} |(\chi(a+it) - \chi^*(t))\psi D_1(a+it)| dt \ll UL^{-10}. \quad (3.2.22)$$

Unter Verwendung von (3.2.6), (3.2.16), (3.2.17), (3.2.19), (3.2.20), (3.2.22), (3.2.21) und (3.2.18) folgt also

$$I = I^* + f_1 + \dots + f_7 = I^* + O(UL^{-9/2}).$$

Sei jetzt

$$J = \int_T^{T+U} |\psi V^*(a+it)|^2 dt. \quad (3.2.23)$$

Nach Cauchy-Schwarz gilt damit

$$\begin{aligned}
I &= \int_T^{T+U} |\psi V^*(a+it)| dt + O(UL^{-9/2}) \\
&\leq U^{1/2} \left( \int_T^{T+U} |\psi V^*(a+it)|^2 \right)^{1/2} + O(UL^{-9/2}) \\
&= U^{1/2} J^{1/2} + O(UL^{-9/2}).
\end{aligned}$$

Damit ist  $I/U \leq (J/U)^{1/2} + O(L^{-9/2})$  und aus unserer bisherigen Abschätzung für  $\alpha_m$ , (3.1.24), erhalten wir

$$\alpha_m \geq 1 - \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \log \frac{J}{U}. \quad (3.2.24)$$

### 3.3 Berechnung des Integrals

Mit den bisherigen Berechnungen haben wir die Abschätzung von  $\alpha_m$  auf die Berechnung des Integrals  $J$  (3.2.23) zurückgeführt. Dies stellt im wesentlichen den ersten Beweisschritt dar.

Der zweite, und abgesehen von numerischen Berechnungen auch letzte, Schritt besteht darin, dieses Integral abzuschätzen. Durch die Verwendung von Pans Vereinfachungen ist dies nun leichter, als in Levinsons ursprünglichem Beweis ([Lev74a, (2.21) und §§4–14]).

Wir beginnen die Berechnung von  $J$  wieder mit der Zerlegung in einzelne Integrale, die wir einzelnen behandeln werden.

Wegen  $|w + z|^2 = |w|^2 + |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(w\bar{z})$  folgt

$$|\psi V^*|^2 = |\psi|^2 \left( |C_1|^2 + |\chi^* D_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(C_1 \cdot \overline{\chi^* D_1}) \right)$$

und daher

$$J = J_1 + J_2 + 2 \operatorname{Re} J_3, \quad (3.3.1)$$

wobei

$$J_1 = \int_T^{T+U} |\psi C_1(a + it)|^2 dt, \quad (3.3.2)$$

$$J_2 = \int_T^{T+U} |\chi^*(t) \psi D_1(a + it)|^2 dt, \quad (3.3.3)$$

$$J_3 = \int_T^{T+U} |\psi(a + it)|^2 C_1(a + it) \overline{\chi^*(t) D_1(a + it)} dt. \quad (3.3.4)$$

### 3.3.1 Umformung von $J_1$

Da es die einfachste Gestalt hat, beginnen wir mit dem Integral  $J_1$ . Zur Abkürzung sei

$$c_*(n) = c(n) \left( 1 + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \log n}{L} \right)^m, \quad (3.3.5)$$

so daß

$$C_1(a + it) = \sum_{n \leq \tau} c_*(n) n^{-a-it},$$

und damit folgt

$$\psi C_1(s) = \left( \sum_{k \leq y} \frac{b(k)}{k^s} \right) \left( \sum_{n \leq \tau} \frac{c_*(n)}{n^s} \right) = \sum_{n \leq \tau} \sum_{k \leq y} \frac{b(k) c_*(n)}{(kn)^s} = \sum_{n \leq \tau y} \frac{1}{n^s} \sum_{\substack{d|n \\ d \leq \tau \\ n/d \leq y}} c_*(d) b\left(\frac{n}{d}\right).$$

Auf diesen Ausdruck wenden wir das bereits bekannte Lemma 3.2.1 an, mit  $f_n(t) = 1$ ,  $\delta = 1$  und

$$a_n = \left( \sum_{\substack{d|n \\ d \leq \tau \\ n/d \leq y}} c_*(d) b\left(\frac{n}{d}\right) \right) \cdot n^{-a}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_T^{T+U} \left| \sum_{n \leq \tau y} a_n n^{-it} \right|^2 dt \\ &= U \sum_{n \leq \tau y} n^{-2a} \left| \sum_{\substack{d|n \\ d \leq \tau \\ n/d \leq y}} c_*(d) b\left(\frac{n}{d}\right) \right|^2 + O\left(\tau y \log(\tau y) \sum_{n \leq \tau y} |a_n|^2\right). \end{aligned}$$

Wir betrachten zuerst das Restglied. Es ist  $\tau y \ll TL^{-20}$ , also  $\log(\tau y) \ll L$  und somit  $\tau y \log(\tau y) \ll UL^{-9}$ . Wegen (3.2.11) haben wir  $c_*(n) = O(1)$  für  $n \leq \tau y$  und nach (3.1.18) insgesamt  $c_*(d)b(n/d) \ll 1$ . Sei wie üblich

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1$$

die Anzahl der Teiler von  $n$ . Wir erhalten

$$\left| \sum_{n \leq \tau y} \frac{1}{n^s} \sum_{\substack{d|n \\ d \leq \tau \\ n/d \leq y}} c_*(d) b\left(\frac{n}{d}\right) \right|^2 \ll \tau^2(n)$$

und deshalb unter Verwendung von (3.2.13)

$$\sum_{n \leq \tau y} |a_n|^2 \ll \sum_{n \leq \tau y} \frac{\tau^2(n)}{n} n^{2R/L} \ll \sum_{n \leq \tau y} \frac{\tau^2(n)}{n}.$$

Nach einem Satz von Ramanujan ([HW88, p. 265]) ist  $\sum_{n \leq x} \tau^2(n) \sim x(\log x)^3$  und partielle Summation liefert uns

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq \tau y} \frac{\tau^2(n)}{n} &= \left( \sum_{n \leq \tau y} \tau^2(n) \right) \frac{1}{\tau y} + \int_1^{\tau y} \left( \sum_{n \leq x} \tau^2(n) \right) x^{-2} dx \\ &\ll (\log(\tau y))^3 + \int_1^{\tau y} \frac{(\log x)^3}{x} dx \\ &\ll (\log(\tau y))^4 \\ &\ll L^4. \end{aligned}$$

Für obiges Restglied haben wir folglich

$$O\left(\tau y \log(\tau y) \sum_{n \leq \tau y} |a_n|^2\right) = O(UL^{-9} \cdot L^4) = O(UL^{-5}),$$

insgesamt haben wir das Integral  $J_1$  damit durch eine Doppelsumme dargestellt:

$$J_1 = U \sum_{n \leq \tau y} \frac{1}{n^{2a}} \left| \sum_{\substack{d|n \\ d \leq \tau \\ n/d \leq y}} c_*(d) b\left(\frac{n}{d}\right) \right|^2 + O(UL^{-5}). \quad (3.3.6)$$

Wir summieren um:

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq \tau y} \frac{1}{n^{2a}} \left| \sum_{\substack{d|n \\ d \leq \tau \\ n/d \leq y}} c_*(d) b\left(\frac{n}{d}\right) \right|^2 &= \sum_{n \leq \tau y} \frac{1}{n^{2a}} \left( \sum_{\substack{d_1|n \\ d_1 \leq \tau \\ n/d_1 \leq y}} \overline{c_*(d_1)} b\left(\frac{n}{d_1}\right) \right) \left( \sum_{\substack{d_2|n \\ d_2 \leq \tau \\ n/d_2 \leq y}} c_*(d_2) b\left(\frac{n}{d_2}\right) \right) \\
&= \sum_{n \leq \tau y} \frac{1}{n^a \cdot n^a} \sum_{\substack{d_1|n \\ d_1 \leq \tau \\ n/d_1 \leq y}} \sum_{\substack{d_2|n \\ d_2 \leq \tau \\ n/d_2 \leq y}} \overline{c_*(d_1)} c_*(d_2) b\left(\frac{n}{d_1}\right) b\left(\frac{n}{d_2}\right) \\
&= \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1) b(k_2)}{k_1^a k_2^a} \sum_{\substack{1 \leq d_1, d_2 \leq \tau \\ k_1 d_1 = k_2 d_2}} \frac{\overline{c_*(d_1)} c_*(d_2)}{d_1^a d_2^a}. \tag{3.3.7}
\end{aligned}$$

Sei von nun an stets

$$k = (k_1, k_2), \tag{3.3.8}$$

$$\kappa_i = \frac{k_i}{k} \quad (i = 1, 2), \tag{3.3.9}$$

$$\text{und} \quad \kappa_{\max} = \max\{\kappa_1, \kappa_2\}. \tag{3.3.10}$$

Aus der Summationsbedingung  $k_1 d_1 = k_2 d_2$  erhalten wir jetzt  $\kappa_1 |d_2$  und  $\kappa_2 |d_1$ , weil  $(\kappa_1, \kappa_2) = 1$ . Daraus folgt wegen  $\kappa_1 d_1 = \kappa_2 d_2$

$$\frac{d_1}{\kappa_2} = \frac{d_2}{\kappa_1} =: j.$$

Die innere Summe aus (3.3.7) können wir jetzt nach  $j$  umsortieren. Insgesamt folgt dann wegen  $\left(\frac{k_1 k_2}{\kappa_1 \kappa_2}\right)^a = k^{2a}$  und mit (3.3.6) und (3.3.7)

$$J_1 = U \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1) b(k_2)}{k_1^{2a} k_2^{2a}} k^{2a} \sum_{j \leq \tau / \kappa_{\max}} \frac{\overline{c_*(j \kappa_1)} c_*(j \kappa_2)}{j^{2a}} + O(UL^{-5}). \tag{3.3.11}$$

### 3.3.2 Umformung von $J_2$

In gleicher Art und Weise verfahren wir mit  $J_2$ . Zuerst definieren wir

$$d_*(n) = d(n) \left( \frac{2 \log n}{L} + \frac{\pi i}{2L} - 1 \right)^m \tag{3.3.12}$$

und bemerken auch hier, ähnlich wie oben,  $d_* \ll 1$ . Weiter gilt nach (3.2.3)

$$|\chi^*(t)|^2 = \left( \frac{T}{2\pi} \right)^{1-2a} = e^{2R}$$

und deshalb ist nach (3.3.3)

$$J_2 = e^{2R} \int_T^{T+U} |\psi D_1(a + it)|^2 dt.$$

Analog zu obiger Rechnung erhalten wir hier

$$\psi D_1(s) = \sum_{n \leq \tau} \sum_{k \leq y} \frac{b(k) d_*(n)}{k^{1/2-R/L+it} n^{1/2+R/L-it}} = \sum_{n \leq \tau y} \frac{n^{2it}}{n^{1-a+it}} \sum_{\substack{d|n \\ d \leq \tau \\ n/d \leq y}} \frac{d_*(d) b(\frac{n}{d})}{(\frac{n}{d})^{-2R/L}}.$$

Die Anwendung von Lemma 3.2.1 mit  $f_n(t) = n^{2it}$ ,  $\delta \ll 1$  und

$$a_n = n^{a-1} \sum_{\substack{d|n \\ d \leq \tau \\ n/d \leq y}} \frac{d_*(d) b(\frac{n}{d})}{(\frac{n}{d})^{-2R/L}}$$

ergibt

$$\begin{aligned} J_2 &= e^{2R} \sum_{n \leq \tau y} n^{2a-2} \left| \sum_{\substack{d|n \\ d \leq \tau \\ n/d \leq y}} \left(\frac{n}{d}\right)^{2R/L} b\left(\frac{n}{d}\right) d_*(d) \right|^2 \int_T^{T+U} |n^{2it}|^2 dt \\ &\quad + O\left(\tau y \log(\tau y) \sum_{n \leq \tau y} |a_n|^2\right). \end{aligned}$$

Das Fehlerglied läßt sich wegen  $(n/d)^{2R/L} \leq y^{2R/L} \ll 1$  wie das von  $J_1$  abschätzen und ist ebenfalls  $\ll UL^{-5}$ . Den Hauptteil quadrieren wir aus und es ergibt sich analog zu oben

$$\begin{aligned} J_2 &= e^{2R} U \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1) b(k_2)}{k_1^a k_2^a} \sum_{\substack{1 \leq d_1, d_2 \leq \tau \\ k_1 d_1 = k_2 d_2}} \frac{\overline{d_*(d_1)} d_*(d_2)}{d_1^{1-a}} d_2^{1-a} + O(UL^{-5}) \\ &= e^{2R} U \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1) b(k_2)}{k_1 k_2} \sum_{j \leq \tau/\kappa_{\max}} \frac{d_*(j\kappa_1) \overline{d_*(j\kappa_2)}}{j^{2-2a}} + O(UL^{-5}). \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

### 3.3.3 Erste Umformungen von $J_3$

Wir müssen nun versuchen,  $J_3$  auf eine ähnliche Gestalt zu bringen. Das Lemma 3.2.1, welches uns bisher recht nützlich gewesen ist, können wir hier wegen (3.3.4), der Definition von  $J_3$ , offensichtlich nicht verwenden. Wir überlegen wir uns statt dessen, daß

$$\begin{aligned} |\psi(a+it)|^2 &= \psi(a+it) \overline{\psi(a+it)} \\ &= \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1) b(k_2)}{k_1^a k_2^a} k_1^{-it} k_2^{it}, \\ \overline{\chi^*(t)} &= \frac{T^{1/2-a}}{2\pi} \exp\left(it \log \frac{t}{2\pi} - it - \frac{\pi i}{4}\right) \\ \text{und} \quad C_1(a+it) \overline{D_1(a+it)} &= \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq \tau} \frac{c_*(j_1) \overline{d_*(j_2)}}{j_1^a j_2^{1-a}} j_1^{-it} j_2^{-it}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_T^{T+U} |\psi(a+it)|^2 \cdot \overline{\chi^*(t)} \cdot C_1(a+it) \overline{D_1(a+it)} dt \\ &= e^R e^{-\pi i/4} \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1)b(k_2)}{k_1^a k_2^a} \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq \tau} \frac{c_*(j_1) \overline{d_*(j_2)}}{j_1^a j_2^{1-a}} \cdot \mathcal{J}, \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_T^{T+U} \exp\left(it \log \frac{t}{2\pi} - it\right) k_1^{-it} k_2^{it} j_1^{-it} j_2^{-it} dt \\ &= \int_T^{T+U} \exp\left(it \log \frac{t}{2\pi\theta} - it\right) dt, \\ \text{mit } \theta &= \frac{k_1 j_1 j_2}{k_2}. \end{aligned}$$

Um das Integral  $\mathcal{J}$  aus der Darstellung von  $J_3$  beseitigen zu können, verwenden wir das folgende, auf Selberg ([Sel42, Lemma 2]) zurückgehende Lemma, das in Anhang A bewiesen wird.

**Lemma 3.3.1** *Sei*

$$\mathcal{J}(\theta) = \int_T^{T+U} \exp\left(it \log \frac{t}{2\pi\theta} - it\right) dt$$

und

$$\mathcal{E}(\theta) = 1 + \frac{T}{|T - \theta| + T^{1/2}} + \frac{T + U}{|T + U - \theta| + (T + U)^{1/2}}.$$

Dann gilt

$$\mathcal{J}(\theta) = \begin{cases} 2\pi \theta^{1/2} e^{\pi i/4 - 2\pi i\theta} + O(\mathcal{E}(\theta)) & ; \frac{T}{2\pi} \leq \theta \leq \frac{T+U}{2\pi} \\ O(\mathcal{E}(\theta)) & ; \theta < \frac{T}{2\pi} \text{ oder } \theta > \frac{T+U}{2\pi}. \end{cases}$$

Unter Anwendung dieses Lemmas können wir das Integral  $\mathcal{J}$  aus (3.3.14) entfernen, und wir erhalten mit  $\tau = \sqrt{T/(2\pi)}$  und  $\tau_1 = \sqrt{(T+U)/(2\pi)}$

$$\begin{aligned} J_3 &= e^R e^{-\pi i/4} \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1)b(k_2)}{k_1^a k_2^a} \sum_{\substack{1 \leq j_1, j_2 \leq \tau \\ \tau^2 \leq \theta \leq \tau_1^2}} \frac{c_*(j_1) \overline{d_*(j_2)}}{j_1^a j_2^{1-a}} \cdot \mathcal{J} + \mathcal{R}_1 \\ &= 2\pi e^R \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1)b(k_2)}{k_1^a k_2^a} \sum_{\substack{1 \leq j_1, j_2 \leq \tau \\ \tau^2 \leq \theta \leq \tau_1^2}} \frac{c_*(j_1) \overline{d_*(j_2)}}{j_1^a j_2^{1-a}} \theta^{1/2} e^{-2\pi i\theta} + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_1, \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= e^R e^{-\pi i/4} \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1)b(k_2)}{k_1^a k_2^a} \sum_{\substack{1 \leq j_1, j_2 \leq \tau \\ \theta < \tau^2 \vee \theta > \tau_1^2}} \frac{c_*(j_1) \overline{d_*(j_2)}}{j_1^a j_2^{1-a}} \cdot \mathcal{J} \\ &\ll \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} k_1^{-1/2} k_2^{-1/2} \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq \tau} j_1^{-1/2} j_2^{-1/2} \mathcal{E}(\theta) \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

$$\begin{aligned} \text{und } \mathcal{R}_2 &= e^R e^{-\pi i/4} \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1)b(k_2)}{k_1^a k_2^a} \sum_{\substack{1 \leq j_1, j_2 \leq \tau \\ \tau^2 < \theta \leq \tau_1^2}} \frac{c_*(j_1) \overline{d_*(j_2)}}{j_1^a j_2^{1-a}} \cdot O(\mathcal{E}(\theta)) \\ &\ll \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} k_1^{-1/2} k_2^{-1/2} \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq \tau} j_1^{-1/2} j_2^{-1/2} \mathcal{E}(\theta). \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

### 3.3.4 Abschätzung der Summe über $\mathcal{E}(\theta)$

Wir wollen jetzt

$$S = \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} k_1^{-1/2} k_2^{-1/2} \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq \tau} j_1^{-1/2} j_2^{-1/2} \mathcal{E}(\theta) \quad \text{mit} \quad \theta = \frac{k_1 j_1 j_2}{k_2}$$

abschätzen, wobei, wie in Lemma 3.3.1,

$$\mathcal{E}(\theta) = 1 + \frac{T}{|T - \theta| + T^{1/2}} + \frac{T + U}{|T + U - \theta| + (T + U)^{1/2}}.$$

Die wesentlichen Summanden sind hier die, für die  $\theta$  in der Nähe von  $T$  liegt. Daher betrachten wir zuerst den Fall  $\theta \leq \frac{3}{4}T$  oder  $\theta \geq \frac{5}{4}T$ . Dann gilt

$$\mathcal{E}(\theta) \leq 1 + 4 \frac{T}{T + T^{1/2}} + 4 \frac{T + U}{T + U + (T + U)^{1/2}} = O(1).$$

Wegen  $\sum_{n \leq x} n^{-1/2} \ll x^{1/2}$  (partielle Summation) sind nun die Summanden von  $S$ , für die  $\theta$  die zur Zeit betrachteten Werte annimmt,

$$\ll \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} k_1^{-1/2} k_2^{-1/2} \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq \tau} j_1^{-1/2} j_2^{-1/2} \ll T^{1/2} L^{-20} \cdot T^{1/2} \ll UL^{-10}. \quad (3.3.18)$$

Es bleibt der Fall  $\frac{3}{4}T < \theta < \frac{5}{4}T$  zu betrachten. Dazu werden die betroffenen Summanden von  $S$  in drei Summen zerlegt:

$$S_i = \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \sum_{\substack{1 \leq j_1, j_2 \leq \tau \\ 3/4 < \theta < 5/4}} \frac{\mathcal{E}_i}{(k_1 k_2 j_1 j_2)^{1/2}} \quad (i = 1, 2, 3),$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= 1 \\ \mathcal{E}_2 &= \frac{T}{|T - \theta| + T^{1/2}} \\ \mathcal{E}_3 &= \frac{T + U}{|T + U - \theta| + (T + U)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Genau wie in (3.3.18) folgt  $S_1 \ll UL^{-10}$ .

Wir untersuchen  $S_2$ :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{\substack{1 \leq k_1, k_2 \leq y \\ 3/4 < \theta < 5/4}} \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq \tau} k_2^{-1} \frac{T}{|T - \theta| + t^{1/2}} \theta^{-1/2} \\ &\ll T^{-1/2} \sum_{\substack{1 \leq k_1, k_2 \leq y \\ 3/4 < \theta < 5/4}} \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq \tau} k_2^{-1} \frac{\frac{Tk_2}{j_2 k_1}}{\left| \frac{Tk_2}{j_2 k_1} - j_1 \right| + \frac{T^{1/2} k_2}{j_2 k_1}}. \end{aligned}$$

Auch diese Summe zerlegen wir wieder in zwei weitere Summen  $S_{21}$  und  $S_{22}$ , in der ersten sei

$$\left| \frac{Tk_2}{j_2 k_1} - j_1 \right| < \frac{1}{2}. \quad (3.3.19)$$

Dann gilt für die Summanden

$$\frac{\frac{Tk_2}{j_2 k_1}}{\left| \frac{Tk_2}{j_2 k_1} - j_1 \right| + \frac{T^{1/2} k_2}{j_2 k_1}} \leq \frac{Tk_1 k_2 j_2}{T^{1/2} k_1 k_2 j_2} = T^{1/2}.$$

Wenn wir zuerst über  $j_1$  summieren, gibt es zu festen  $T, k_1, k_2$  und  $j_2$  höchstens ein  $j_1$  mit (3.3.19), und daher ist

$$S_{21} \ll \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} k_2^{-1} \sum_{1 \leq j_2 \leq \tau} 1 \ll T^{1/2} y \log y \ll TL^{-9} = UL^{-9}. \quad (3.3.20)$$

In  $S_{22}$  ist, vgl. (3.3.19),  $\left| \frac{Tk_2}{j_2 k_1} - j_1 \right| \geq \frac{1}{2}$ . Wir summieren wieder zuerst über  $j_1$ . Für diese Summe gilt dann

$$\sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \tau \\ |Tk_2/(j_2 k_1) - j_1| \geq 1/2}} \frac{\frac{Tk_2}{j_2 k_1}}{\left| \frac{Tk_2}{j_2 k_1} - j_1 \right| + \frac{T^{1/2} k_2}{j_2 k_1}} \ll \frac{Tk_2}{j_2 k_1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \tau \\ |Tk_2/(j_2 k_1) - j_1| \geq 1/2}} \left| \frac{Tk_2}{j_2 k_1} - j_1 \right|^{-1} \ll L \frac{Tk_2}{j_2 k_1}.$$

Folglich ist

$$S_{22} \ll T^{-1/2} L \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} k_2^{-1} \sum_{1 \leq j_2 \leq \tau} \frac{Tk_2}{j_2 k_1} \ll T^{1/2} Ly \log y \log \tau \ll TL^{-17} = UL^{-7}.$$

Damit und mit (3.3.20) haben wir also  $S_2 = O(UL^{-7})$ .

Die Abschätzung von  $S_3$  erfolgt analog, hier haben wir statt  $T$  lediglich  $T + U < 2T$  zu setzen und wir erhalten auch hier  $S_3 = O(UL^{-7})$ .

Zusammen mit (3.3.18) folgt schließlich

$$S = O(UL^{-7}).$$

### 3.3.5 Weitere Umformungen

Nach (3.3.15), (3.3.16), (3.3.17) und den letzten Rechnungen gilt nun

$$\begin{aligned} J_3 &= 2\pi e^R \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1)b(k_2)}{k_1^{a-1/2}k_2^{a+1/2}} \sum_{\substack{1 \leq j_1, j_2 \leq \tau \\ \tau^2 \leq \theta \leq \tau_1^2}} \frac{c_*(j_1)\overline{d_*(j_2)}}{j_1^a j_2^{1-a}} \theta^{1/2} e^{-2\pi i \theta} + O(UL^{-\tau}) \\ &= J_3^* + O(UL^{-\tau}), \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

wobei

$$\begin{aligned} J_3^* &= 2\pi e^R \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1)b(k_2)}{k_1^{a-1/2}k_2^{a+1/2}} \sum_{\substack{1 \leq j_1, j_2 \leq \tau \\ \tau^2 \leq \theta \leq \tau_1^2}} \frac{c_*(j_1)\overline{d_*(j_2)}}{j_1^{a-1/2}j_2^{1/2-a}} e^{-2\pi i \theta} \\ &= 2\pi e^R \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1)b(k_2)}{k_1^{a-1/2}k_2^{a+1/2}} \sum_{1 \leq j_2 \leq \tau} \frac{\overline{d_*(j_2)}}{j_2^{1/2-a}} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \tau \\ \tau^2 \leq j_1 j_2 k_1 / k_2 \leq \tau_1^2}} \frac{c_*(j_1)}{j_1^{a-1/2}} \exp\left(-2\pi i \frac{j_1 j_2 k_1}{k_2}\right). \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Um dies in eine ähnliche Gestalt wie  $J_1$  und  $J_2$  zu bringen, müssen wir zuerst den exponentiellen Faktor entfernen.

Betrachten wir zunächst die Summe im Fall  $k_2 \mid j_2 k_1$ . Dann ist  $\exp(-2\pi i j_1 j_2 k_1 / k_2) = 1$  und fällt somit fort.

Im anderen Fall ist  $k_2 \nmid j_2 k_1$  und wegen  $\lambda = \frac{j_2 k_1}{k_2} \notin \mathbb{Z}$  und  $\frac{c_*(j_1)}{j_1^{a-1/2}} \ll \tau^{R/L} \ll 1$  folgt mit  $A = \max\{1, \lceil \tau^2 / \lambda \rceil\}$  und  $B = \lfloor \min\{\tau, \tau_1^2 / \lambda\} \rfloor$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \tau \\ \tau^2 \leq j_1 \lambda \leq \tau_1^2 \\ k_2 \nmid j_2 k_1}} \frac{c_*(j_1)}{j_1^{a-1/2}} e^{-2\pi i \lambda j_1} &\ll \left| \sum_{j_1=A}^B \exp(-2\pi i \lambda j_1) \right| \\ &= \left| \frac{\exp(-2\pi i \lambda (B-A+1)) - 1}{\exp(-2\pi i \lambda) - 1} \right| \\ &\ll |\sin \pi \lambda|^{-1} \\ &\ll \|\lambda\|^{-1}, \end{aligned}$$

da  $|\sin \pi \lambda| = \frac{|e^{\pi i \lambda} - e^{-\pi i \lambda}|}{2} \leq \frac{e^{2\pi i \lambda} - 1}{e^{2\pi i \lambda (B-A+1)} - 1}$  und wobei  $\|x\| = |x - [x]|$  den ‘‘Abstand’’ von  $x$  zur nächsten ganzen Zahl bezeichnet.

Damit haben wir zunächst

$$J_3^* = 2\pi e^R \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1)b(k_2)}{k_1^{a-1/2}k_2^{a+1/2}} \left( \sum_{\substack{1 \leq j_2 \leq \tau \\ k_2 \mid j_2 k_1}} \frac{\overline{d_*(j_2)}}{j_2^{1/2-a}} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \tau \\ \tau^2 / \lambda \leq j_1 \leq \tau_1^2 / \lambda}} \frac{c_*(j_1)}{j_1^{a-1/2}} + \mathcal{S} \right), \quad (3.3.23)$$

wobei, unter Verwendung von  $\overline{d_*(j_2)} j_2^{-1/2+a} = O(1)$ ,

$$\mathcal{S} = \sum_{\substack{1 \leq j_2 \leq \tau \\ k_2 \nmid j_2 k_1}} \frac{\overline{d_*(j_2)}}{j_2^{1/2-a}} \cdot O(\|\lambda\|^{-1}) = \sum_{\substack{1 \leq j_2 \leq \tau \\ j_2 \not\equiv 0 \pmod{\kappa_2}}} \left\| \frac{j_2 k_1}{k_2} \right\|^{-1}.$$

Für ein  $\nu \in \{1, \dots, [\kappa_2/2]\}$  gilt  $\left\| \frac{j_2 k_1}{k_2} \right\| = \left\| \frac{j_2 \kappa_1}{\kappa_2} \right\| = \frac{\nu}{\kappa_2}$  und wenn  $j_2$  die Werte  $1, \dots, [\tau]$  durchläuft, nimmt  $\nu$  jeden Wert aus  $\{1, \dots, [\kappa_2/2]\}$  höchstens  $\left( \left[ \frac{\tau}{[\kappa_2/2]} \right] + 1 \right)$ -mal an. Folglich ist

$$\mathcal{S} \ll \left( \left[ \frac{\tau}{[\kappa_2/2]} \right] + 1 \right) \cdot \sum_{1 \leq \nu \leq \kappa_2/2} \frac{\kappa_2}{\nu}.$$

Es ist für  $\kappa_2 \geq 2$

$$\kappa_2 \left( \left[ \frac{\tau}{[\kappa_2/2]} \right] + 1 \right) \ll \tau + \kappa_2.$$

Ist  $\kappa_2 = 1$ , so folgt  $k_1 = k_2$  und wegen der Summationsbedingung  $k_2 \nmid j_2 k_1$  gilt  $\mathcal{S} = 0$ .

Insgesamt haben wir

$$\mathcal{S} \ll (\tau + \kappa_2) \sum_{1 \leq \nu \leq \kappa_2/2} \frac{1}{\nu} \ll (\tau + \kappa_2) \log \kappa_2 \ll (\tau + \kappa_2)L.$$

Der gesamte Beitrag der Summanden mit  $k_2 \nmid j_2 k_1$  zu  $J_3^*$  ist folglich

$$\begin{aligned} &\ll \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1) b(k_2)}{k_1^{a-1/2} k_2^{a+1/2}} (\tau + k_2) L \\ &\ll L \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{\tau + k_2}{k_2} \\ &\ll \tau y L^2 + y^2 L \\ &\ll UL^{-8}. \end{aligned}$$

Nach (3.3.23) gilt somit, wenn wir wegen  $\kappa_2 | j_2$  (vgl. (3.3.7) und (3.3.13))  $j = j_2 / \kappa_2$  setzen und nach  $j$  umsummieren

$$\begin{aligned} J_3^* &= 2\pi e^R \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1) b(k_2)}{k_1^{a-1/2} k_2^{a+1/2}} \sum_{\substack{1 \leq j_1, j_2 \leq \tau \\ \tau^2 \leq r \leq \tau_1^2 \\ j_2 \equiv 0 \pmod{\kappa_2}}} \frac{c_*(j_1) \overline{d_*(j_2)}}{j_1^{a-1/2} j_2^{1/2-a}} + O(UL^{-8}) \\ &= 2\pi e^R \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1) b(k_2)}{k_1^{a-1/2} k_2^{a+1/2}} \sum_{\substack{\tau/\kappa_1 \leq j \leq \tau/\kappa_2 \\ \tau^2/(j\kappa_1) \leq j_1 \leq \min\{\tau, \tau_1^2/(j\kappa_1)\}}} \sum_{j_2} \frac{c_*(j_1) \overline{d_*(j\kappa_2)}}{j_1^{a-1/2} (j\kappa_2)^{1/2-a}} \\ &\quad + O(UL^{-8}). \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

Um schönere Summationsbedingungen zu erhalten, wollen wir die Bedingung  $j_1 \leq \tau$  fallen

lassen. Der dabei für die innere Doppelsumme über  $j$  und  $j_1$  entstehende Fehler ist

$$\begin{aligned}
&\ll \sum_{\tau/\kappa_1 \leq j \leq \tau/\kappa_2} \frac{\overline{d_*(j\kappa_2)}}{(j\kappa_2)^{1/2-a}} \sum_{\tau < j_1 \leq \tau_1^2/(j\kappa_1)} \frac{c_*(j_1)}{j_1^{a-1/2}} \\
&\ll \sum_{\tau/\kappa_1 \leq j < \tau_1^2/(\tau\kappa_1)} \sum_{\tau < j_1 \leq \tau_1^2/(j\kappa_1)} 1 \\
&\ll \sum_{\tau/\kappa_1 \leq j < \tau_1^2/(\tau\kappa_1)} \tau L^{-10} \\
&\ll \frac{1}{\kappa_1} \tau^2 L^{-20} \\
&\ll \frac{1}{\kappa_1} UL^{-10}
\end{aligned}$$

und es folgt

$$J_3^* = 2\pi e^R \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1)b(k_2)}{k_1^{a-1/2}k_2^{a+1/2}} \left( \Sigma + O\left(\frac{U}{\kappa_1 L^{10}}\right) \right) + O(UL^{-8}), \quad (3.3.25)$$

wobei

$$\Sigma = \sum_{\tau/\kappa_1 \leq j \leq \tau/\kappa_2} \frac{\overline{d_*(j\kappa_2)}}{(j\kappa_2)^{1/2-a}} \sum_{\substack{j_1 \\ \tau^2 \leq j_1 j \kappa_1 \leq \tau_1^2}} \frac{c_*(j_1)}{j_1^{a-1/2}}. \quad (3.3.26)$$

Betrachten wir zunächst die innere Summe von  $\Sigma$ . Es liegt nahe, diese Summe abzuschätzen, denn es ist

$$\frac{c_*(x)}{x^{a-1/2}} = x^{R/L} \phi(L^{-1} \log x) \left( 1 + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \log x}{L} \right)^m,$$

und daher

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left( \frac{c_*(x)}{x^{a-1/2}} \right) &= L^{-1} x^{R/L-1} \left( Rc_*(x) + \phi'(L^{-1} \log x) \left( 1 + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \log x}{L} \right)^m \right. \\
&\quad \left. + 2m c(x) \left( 1 + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \log x}{L} \right)^{m-1} \right) \\
&\ll L^{-1} x^{R/L-1} \ll \frac{1}{xL} \quad \text{für} \quad x \leq \frac{\tau_1^2}{j\kappa_1} \ll \tau,
\end{aligned}$$

die Summanden der Summe über  $j_1$  sind also nahezu konstant.

Sei  $\varphi(x) = o\left(x - \frac{\tau^2}{j\kappa_1}\right)$  für  $x \rightarrow \frac{\tau^2}{j\kappa_1}$  und zur Abkürzung  $f(x) = \frac{c_*(x)}{x^{a-1/2}}$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j_1 \\ \tau^2 \leq j_1 j \kappa_1 \leq \tau_1^2}} \frac{c_*(j_1)}{j_1^{a-1/2}} &= \sum_{\substack{j_1 \\ \tau^2 \leq j_1 j \kappa_1 \leq \tau_1^2}} \frac{c_*(j_1)}{j_1^{a-1/2}} \left( f\left(\frac{\tau^2}{j\kappa_1}\right) + f'\left(\frac{\tau^2}{j\kappa_1}\right) \left(j_1 - \frac{\tau^2}{j\kappa_1}\right) + \varphi(j_1) \right) \\ &= f\left(\frac{\tau^2}{j\kappa_1}\right) \frac{\tau_1^2 - \tau^2}{j\kappa_1} + O\left(UL^{-1} \frac{1}{j\kappa_1} \left(\frac{\tau_1^2}{\tau^2} - 1\right)\right) + O(1) \\ &= \frac{1}{2\pi} U c_* \left(\frac{\tau^2}{j\kappa_1}\right) \left(\frac{\tau^2}{j\kappa_1}\right)^{1/2-a} \frac{1}{j\kappa_1} + O\left(UL^{-11} \frac{1}{j\kappa_1}\right) + O(1) \\ &= \frac{e^R}{2\pi} U (j\kappa_1)^{a-3/2} c_* \left(\frac{\tau^2}{j\kappa_1}\right) + O\left(UL^{-11} \frac{1}{j\kappa_1} + 1\right). \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\Sigma = \frac{e^R}{2\pi} U \kappa_1^{a-3/2} \kappa_2^{a-1/2} \sum_{\substack{j_1 \\ \tau^2 \leq j_1 j \kappa_1 \leq \tau_1^2}} c_* \left(\frac{\tau^2}{j\kappa_1}\right) \overline{d_*(j\kappa_2)} j^{2a-2} + \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2,$$

wobei

$$\mathcal{F}_1 \ll UL^{-11} \kappa_1^{-1} \sum_{\substack{j_1 \\ \tau^2 \leq j_1 j \kappa_1 \leq \tau_1^2}} j^{-1} \ll UL^{-10} \kappa_1^{-1} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_2 \ll \sum_{\substack{j_1 \\ \tau^2 \leq j_1 j \kappa_1 \leq \tau_1^2}} 1 \ll T^{1/2}.$$

Etwas problematisch erscheint, verglichen mit  $J_1$ , (3.3.11), und  $J_2$ , (3.3.13), noch das gleichzeitige Auftreten von  $c_*$  und  $d_*$  in  $\Sigma$ . Es gilt jedoch

$$\begin{aligned} c_* \left(\frac{\tau^2}{j\kappa_1}\right) &= \phi \left( L^{-1} \log \left( \frac{\tau^2}{j\kappa_1} \right) \right) \left( 1 + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \log(\tau^2/(j\kappa_1))}{L} \right)^m \\ &= \phi(1 - L^{-1} \log(j\kappa_1)) \left( \frac{2 \log(j\kappa_1)}{L} + \frac{\pi i}{2L} - 1 \right)^m = d_*(j\kappa_1) \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

und dieses, sowie  $k_1^{1/2-a} k_2^{-1/2-a} = k_1^{-1} k_2^{-1} k^{2-2a}$  und  $b(k_i) \ll 1$  liefern zusammen mit (3.3.25)

$$\begin{aligned} J_3^* &= e^{2RU} \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1) b(k_2)}{k_1^{a-1/2} k_2^{a+1/2}} \left( \kappa_1^{a-3/2} \kappa_2^{a-1/2} \sum_{\tau/\kappa_1 \leq j \leq \tau/\kappa_2} \frac{d_*(j\kappa_1) \overline{d_*(j\kappa_2)}}{j^{2-2a}} \right. \\ &\quad \left. + O(T^{1/2} U^{-1}) + O(L^{-10} \kappa_1^{-1}) \right) + O(UL^{-8}) \\ &= e^{2RU} \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1) b(k_2)}{k_1 k_2} k^{2-2a} \sum_{\tau/\kappa_1 \leq j \leq \tau/\kappa_2} \frac{d_*(j\kappa_1) \overline{d_*(j\kappa_2)}}{j^{2-2a}} + \mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_4 + O(UL^{-8}), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_3 &\ll T^{1/2} \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} k_1^{1/2-a} k_2^{-1/2-a} \ll T^{1/2} y \log y \ll UL^{-9}, \\ \mathcal{F}_4 &\ll UL^{-10} \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} k_1^{1/2-a} k_2^{-1/2-a} \kappa_1^{-1} \ll UL^{-10} \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{k}{k_1 k_2}.\end{aligned}$$

Die letzte Summe ist schnell abgeschätzt:

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} k k_1^{-1} k_2^{-1} &= \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} k_1^{-1} k_2^{-1} \sum_{j|k} j \\ &= \sum_{1 \leq j \leq y} j \sum_{\substack{1 \leq k_1, k_2 \leq y \\ k_1 \equiv 0 \pmod{j} \\ k_2 \equiv 0 \pmod{j}}} k_1^{-1} k_2^{-1} \\ &= \sum_{1 \leq j \leq y} j^{-1} \left( \sum_{\substack{1 \leq k_1 \leq y \\ k_1 \equiv 0 \pmod{j}}} \frac{j}{k_1} \right)^2 \\ &= \sum_{1 \leq j \leq y} j^{-1} \left( \sum_{1 \leq \nu \leq y/j} \nu^{-1} \right)^2 \\ &= (\log y)^3 \\ &\ll L^3.\end{aligned}$$

Wir erhalten also  $\mathcal{F}_4 \ll UL^{-7}$  und so insgesamt

$$J_3^* = e^{2RU} \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1) b(k_2)}{k_1 k_2} k^{2-2a} \sum_{\tau/\kappa_1 \leq j \leq \tau/\kappa_2} \frac{d_*(j\kappa_1) \overline{d_*(j\kappa_2)}}{j^{2-2a}} + O(UL^{-7}).$$

Gesucht war der Realteil von  $J_3$ . Nach (3.3.21) gilt nun

$$\begin{aligned}2 \operatorname{Re} J_3 &= 2 \operatorname{Re} J_3^* + O(UL^{-7}) \\ &= J_3^* + \overline{J_3^*} + O(UL^{-7}) \\ &= e^{2RU} \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1) b(k_2)}{k_1 k_2} k^{2-2a} \left( \sum_{\tau/\kappa_1 \leq j \leq \tau/\kappa_2} \frac{d_*(j\kappa_1) \overline{d_*(j\kappa_2)}}{j^{2-2a}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\tau/\kappa_2 \leq j \leq \tau/\kappa_1} \frac{d_*(j\kappa_1) \overline{d_*(j\kappa_2)}}{j^{2-2a}} \right) + O(UL^{-7}) \\ &= e^{2RU} \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1) b(k_2)}{k_1 k_2} k^{2-2a} \sum_{\tau/\kappa_{\max} \leq j \leq \tau/\kappa_{\min}} \frac{d_*(j\kappa_1) \overline{d_*(j\kappa_2)}}{j^{2-2a}} + O(UL^{-7}),\end{aligned}$$

wobei  $\kappa_{\min} = \min\{\kappa_1, \kappa_2\}$ .

Dieser Ausdruck paßt nun sehr gut zu  $J_2$  (3.3.13):

$$J_2 + 2 \operatorname{Re} J_3 = e^{2RU} \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1) b(k_2)}{k_1 k_2} k^{2-2a} \sum_{j \leq \tau/\kappa_{\min}} \frac{d_*(j\kappa_1) \overline{d_*(j\kappa_2)}}{j^{2-2a}} + O(1) + O(UL^{-5}).$$

Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen, so erhalten wir für  $J/U$  eine neue Darstellung:

$$\frac{J}{U} = \frac{J_1}{U} + \frac{J_2 + 2 \operatorname{Re} J_3}{U} = J_4 + J_5 + O(UL^{-5}), \quad (3.3.28)$$

wobei

$$J_4 = \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1) b(k_2)}{k_1^{2a} k_2^{2a}} k^{2a} \sum_{j \leq \tau/\kappa_{\max}} \frac{c_*(j\kappa_1) \overline{c_*(j\kappa_2)}}{j^{2a}}, \quad (3.3.29)$$

$$J_5 = \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1) b(k_2)}{k_1 k_2} k^{2-2a} \sum_{j \leq \tau/\kappa_{\min}} \frac{d_*(j\kappa_1) \overline{d_*(j\kappa_2)}}{j^{2-2a}}. \quad (3.3.30)$$

### 3.3.6 Beseitigung der Asymmetrie

Die soeben hergeleiteten Summen  $J_4$  und  $J_5$  unterscheiden sich, abgesehen vom Unterschied zwischen den Funktionen  $c_*$  und  $d_*$ , im wesentlichen in der Länge der Summe über  $j$ . Diese Asymmetrie zwischen  $\kappa_{\min}$  und  $\kappa_{\max}$  tauchte in ähnlicher Form auch in Levinsons Beweis in [Lev74a] auf; die (in Levinsons Bezeichnungen) von  $k_m = \min\{k_1, k_2\}$  und  $k_M = \max\{k_1, k_2\}$  abhängigen Terme, die bei uns den inneren Summen von (3.3.29) und (3.3.30) entsprechen, löschten sich dort ([Lev74a, §10]) aber aus.

Einen vergleichbaren Effekt werden wir nach den folgenden Berechnungen auch bei uns bemerken. Daß wir hier nur zwei Summen zusammenzufassen haben — statt der insgesamt 24 (!) in [Lev74a] —, verdanken wir, wie bereits angedeutet, Pans Vereinfachungen.

Wir beginnen mit einer einfachen Vorüberlegung.

Sei  $f(x) : [1, M] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig differenzierbar mit

$$|f(x)| \leq \frac{C}{x} \quad \text{und} \quad |f'(x)| \leq \frac{C}{x^2} \quad \text{für } 1 \leq x \leq M$$

und bezeichne  $\{x\} = x - [x]$  den gebrochenen Anteil von  $x$ . Partielle Summation liefert (vgl. [Pra78, Anhang, S. 1.5])

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} f(n) &= \int_1^x f(u) du + f(1) - \{x\} f(x) + \int_1^x \{u\} f'(u) du \\ &= \int_1^x f(u) du + \int_1^M \{u\} f'(u) du + \mathcal{R}, \end{aligned}$$

wobei

$$|\mathcal{R}| = \left| f(1) - \{x\} f(x) - \int_x^M \{u\} f'(u) du \right| \leq C + \frac{C}{x} + C \int_x^M u^{-2} du \leq C + \frac{2C}{x},$$

also insgesamt

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \int_1^x f(u) du + \int_1^M \{u\} f'(u) du + O_C(1) + O_C(x^{-1}). \quad (3.3.31)$$

Sei  $f(x) = c_*(x\kappa_1)\overline{c_*(x\kappa_2)}x^{-2a}$ . Es ist  $f(x) \ll x^{-2a} \ll x^{-1}$  und wegen (3.2.11) sowie wegen  $\frac{d}{dx}c(x\kappa) = L^{-1}x^{-1}\phi'(L^{-1}\log(x\kappa)) \ll (Lx)^{-1}$  gilt

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\ll x^{-2a-1}L^{-1} \left| \phi(L^{-1}\log(x\kappa_1))c(x\kappa_2) \right| + x^{-2a-1}L^{-1} \left| c(x\kappa_1)\phi(L^{-1}\log(x\kappa_2)) \right| \\ &\quad + 2ax^{-2a-1} |c(x\kappa_1)c(x\kappa_2)| \\ &\ll L^{-1}x^{-2}. \end{aligned}$$

Die  $O$ -Konstante hängt dabei nur von  $m$ ,  $\phi$  und  $R$  ab.

Damit können wir (3.3.31) auf die innere Summe in  $J_4$  mit  $M = \tau$ ,  $x = \tau/\kappa_{\max}$  anwenden und erhalten

$$\sum_{j \leq \tau/\kappa_{\max}} c_*(j\kappa_1)\overline{c_*(j\kappa_2)}j^{-2a} = \int_1^{\tau/\kappa_{\max}} c_*(u\kappa_1)\overline{c_*(u\kappa_2)}u^{-2a}du + O(1) + O\left(\frac{\kappa_{\max}}{\tau}\right),$$

denn es gilt

$$\int_1^\tau \{u\}f'(u)du \ll \int_1^\tau u^{-2}du \ll 1.$$

Betrachten wir zunächst die Fehlerterme. Weil

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1)b(k_2)}{k_1^{2a}k_2^{2a}} k^{2a} \cdot O\left(\frac{\kappa_{\max}}{\tau}\right) &\ll \tau^{-1} \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} k_1^{-1}k_2^{-1}\kappa_{\max}k \\ &= \tau^{-1}y \sum_{1 \leq k \leq y} k^{-1} \\ &\ll L^{-19} \end{aligned}$$

liefert der Fehlerterm  $O(\kappa_{\max}/\tau)$  einen Beitrag von  $O(L^{-19})$  zu  $J_4$ .

Komplizierter ist die Berechnung des Fehlers, der durch den Summanden  $O(1)$  verursacht wird. Da wir uns später ohnehin mit derartigen Summen beschäftigen müssen, erlaube ich mir hier einen Vorgriff auf ein Ergebnis von Seite 66. Unabhängig von den hiesigen Rechnungen wird dort gezeigt (3.4.23):

$$\sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1)b(k_2)}{k_1^\theta k_2^\theta} k^{2\theta-2a} =: S_{0,0}(\theta) \ll L^{-1} \quad \text{für } \theta = 1 \text{ oder } \theta = 2a.$$

Mit  $\theta = 2a$  erhalten wir folglich

$$J_4 = \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1)b(k_2)}{k_1^{2a}k_2^{2a}} k^{2a} \int_1^{\tau/\kappa_{\max}} c_*(u\kappa_1)\overline{c_*(u\kappa_2)}u^{-2a}du + O(L^{-1}).$$

Analog folgt

$$J_5 = e^{2R} \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1)b(k_2)}{k_1 k_2} k^{2-2a} \int_1^{\tau/\kappa_{\min}} d_*(u\kappa_1)\overline{d_*(u\kappa_2)}u^{2a-2}du + O(L^{-1}).$$

Diese beiden Ausdrücke können wir nun zusammenfügen. Dazu substituieren wir im Integral der letzten Zeile  $u = \frac{\tau^2}{v\kappa_1\kappa_2}$  und verwenden (3.3.27):

$$\begin{aligned} & \int_1^{\tau/\kappa_{\min}} d_*(u\kappa_1) \overline{d_*(u\kappa_2)} u^{2a-2} du \\ &= \int_{\tau^2/(\kappa_1\kappa_2)}^{\tau/\kappa_{\max}} d_*\left(\frac{\tau^2}{v\kappa_2}\right) \overline{d_*\left(\frac{\tau^2}{v\kappa_1}\right)} \frac{\tau^{4a-4}}{(v\kappa_1\kappa_2)^{2a-2}} \cdot \left(-\frac{\tau^2}{v^2\kappa_1\kappa_2}\right) dv \\ &= e^{-2R} \kappa_1^{1-2a} \kappa_2^{1-2a} \int_{\tau/\kappa_{\max}}^{\tau^2/(\kappa_1\kappa_2)} c_*(v\kappa_2) \overline{c_*(v\kappa_1)} v^{-2a} dv. \end{aligned}$$

Setzen wir dies oben ein, so können wir  $k_1$  und  $k_2$  vertauschen und erhalten

$$J_5 = \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1) b(k_2)}{k_1 k_2} k^{2-2a} \kappa_1^{1-2a} \kappa_2^{1-2a} \int_{\tau/\kappa_{\max}}^{\tau^2/(\kappa_1\kappa_2)} c_*(v\kappa_1) \overline{c_*(v\kappa_2)} v^{-2a} dv.$$

Da  $k_1^{-1} k_2^{-1} k^{2-2a} \kappa_1^{1-2a} \kappa_2^{1-2a} = k_1^{-2a} k_2^{-2a} k^{2a}$ , passen die Darstellungen von  $J_4$  und  $J_5$  gut zusammen. Wegen (3.3.28) gilt

$$\frac{J}{U} = J_4 + J_5 + O(L^{-5}) = J_6 + O(L^{-1}), \quad (3.3.32)$$

wobei

$$J_6 = \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1) b(k_2)}{k_1^{2a} k_2^{2a}} k^{2a} \int_1^{\tau^2/(\kappa_1\kappa_2)} c_*(u\kappa_1) \overline{c_*(u\kappa_2)} u^{-2a} du. \quad (3.3.33)$$

### 3.3.7 Beseitigung des Integrals

Auch wenn die neue Darstellung (3.3.33) von  $J/U$  recht übersichtlich ist, ist es für unsere Berechnungen doch einfacher, statt mit obigem Integral mit (endlichen) Summen zu arbeiten. Sei  $p$  ein Polynom,  $k \neq 0, -1$ . Durch wiederholte partielle Integration ergibt sich

$$\int_A^B p(\log x) x^k dx = \sum_{n \geq 0} (-1)^n p^{(n)}(\log x) \frac{x^{k+1}}{(k+1)^{n+1}} \Big|_A^B. \quad (3.3.34)$$

Die Summe über  $n$  ist dabei selbstverständlich endlich.

Sei

$$\phi_*(x) = \phi(x) \left(1 - 2x + \frac{\pi i}{2L}\right)^m. \quad (3.3.35)$$

Mit  $p(x) = \phi_*(L^{-1}x + L^{-1}\log \kappa_1) \overline{\phi_*(L^{-1}x + L^{-1}\log \kappa_2)}$  gilt  $p(\log x) = c_*(x\kappa_1) \overline{c_*(x\kappa_2)}$  und es

folgt, wenn wir in obigem Ausdruck  $k = -2a$  setzen :

$$\begin{aligned}
& \int_1^{\tau^2/(\kappa_1\kappa_2)} c_*(u\kappa_1)\overline{c_*(u\kappa_2)}u^{-2a} du \\
&= \sum_{n \geq 0} (-1)^n L^{-n} \frac{u^{1-2a}}{(1-2a)^{n+1}} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \phi_*^{(n-\nu)}(L^{-1} \log(u\kappa_1)) \overline{\phi_*^{(\nu)}(L^{-1} \log(u\kappa_2))} \Big|_1^{\tau^2/(\kappa_1\kappa_2)} \\
&= \frac{e^{2R}}{1-2a} (\kappa_1\kappa_2)^{2a-1} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{(2R)^n} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \phi_*^{(n-\nu)}(1-L^{-1} \log \kappa_2) \overline{\phi_*^{(\nu)}(1-L^{-1} \log \kappa_1)} \\
&\quad - \frac{1}{1-2a} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{(2R)^n} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \phi_*^{(n-\nu)}(L^{-1} \log \kappa_1) \overline{\phi_*^{(\nu)}(L^{-1} \log \kappa_2)}.
\end{aligned}$$

Also ist mit (3.3.32) und (3.3.33)

$$\frac{J}{U} = J_7 - J_8 + O(L^{-1}), \quad (3.3.36)$$

wobei

$$\begin{aligned}
J_7 &= \frac{e^{2R}}{1-2a} \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1)b(k_2)}{k_1 k_2} k^{2-2a} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{(2R)^n} \times \\
&\quad \times \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \phi_*^{(n-\nu)}(1-L^{-1} \log \kappa_2) \overline{\phi_*^{(\nu)}(1-L^{-1} \log \kappa_1)}, \\
J_8 &= \frac{1}{1-2a} \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1)b(k_2)}{k_1^{2a} k_2^{2a}} k^{2a} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{(2R)^n} \times \\
&\quad \times \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \phi_*^{(n-\nu)}(L^{-1} \log \kappa_2) \overline{\phi_*^{(\nu)}(L^{-1} \log \kappa_1)}.
\end{aligned}$$

Da die Summation symmetrisch ist bezüglich  $k_1$  und  $k_2$ , war die Vertauschung der beiden Variablen in (3.3.39) möglich.

Betrachten wir zunächst  $J_7$  :

$$\begin{aligned}
J_7 &= \frac{e^{2R}}{1-2a} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2R)^n} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \times \\
&\quad \times \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1)b(k_2)}{k_1 k_2} k^{2-2a} \phi_*^{(n-\nu)}(1-L^{-1} \log \kappa_2) \overline{\phi_*^{(\nu)}(1-L^{-1} \log \kappa_1)}
\end{aligned}$$

Entwickeln wir die Polynome  $\phi_*^{(\nu)}$  in eine Taylorreihe um 1, so gilt für  $i = 1, 2$

$$\phi_*^{(\nu)} \left( 1 - \frac{\log \kappa_i}{L} \right) = \sum_{N_i \geq 0} (-1)^{N_i} \frac{\phi_*^{(\nu+N_i)}(1)}{N_i!} \left( \frac{\log \kappa_i}{L} \right)^{N_i}.$$

Es folgt nun, da  $\kappa_i = k_i/k$ ,

$$J_7 = \frac{e^{2R}}{1-2a} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2R)^n} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \sum_{N_1, N_2 \geq 0} \frac{1}{N_1! N_2!} \phi_*^{(n-\nu+N_2)}(1) \overline{\phi_*^{(\nu+N_1)}(1)} \cdot S_{N_1, N_2}(1), \quad (3.3.37)$$

wobei wie bisher  $k = (k_1, k_2)$  und  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}_0$  mit  $N_1, N_2 \leq \deg \phi_* = O_{\phi, m}(1)$ , und wobei

$$S_{N_1, N_2}(\theta) = \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1)b(k_2)}{k_1^\theta k_2^\theta} k^{2\theta - 2a} \left( L^{-1} \log \frac{k_1}{k} \right)^{N_1} \left( L^{-1} \log \frac{k_2}{k} \right)^{N_2}. \quad (3.3.38)$$

$S_{N_1, N_2}$  ist als Funktion von  $\theta$  definiert, da wir so diese Funktion auch noch in  $J_8$  verwenden können. Hier ist es naheliegend, die Polynome  $\phi_*^{(\nu)}$  um 0 statt um 1 zu entwickeln. Wir erhalten analog zu oben

$$J_8 = \frac{1}{1 - 2a} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2R)^n} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \sum_{N_1, N_2 \geq 0} \frac{1}{N_1! N_2!} \phi_*^{(n-\nu+N_2)}(0) \overline{\phi_*^{(\nu+N_1)}(0)} \cdot S_{N_1, N_2}(2a). \quad (3.3.39)$$

### 3.4 Berechnung der $S_{N_1, N_2}$

#### 3.4.1 Die Wahl der glättenden Funktion

Wie wir gesehen haben, müssen wir für die weiteren Untersuchungen von  $J_7$  und  $J_8$  die Summen  $S_{N_1, N_2}(\theta)$  betrachten. Offensichtlich spielt dabei die Wahl der Koeffizienten  $b(\cdot)$  des Dirichlet-Polynoms  $\psi$ , (3.1.18), mithin die Wahl dieser glättenden Funktion, eine entscheidende Rolle.

Sei jetzt zur Abkürzung

$$\gamma = 2\theta - 2a.$$

Allgemein gilt nach der Möbiusschen Umkehrformel für alle zahlentheoretischen Funktionen  $g$

$$g(k) = \sum_{j|k} \sum_{d|j} \mu(d) g\left(\frac{j}{d}\right),$$

wobei  $\mu(d)$  wie üblich die Möbiusfunktion bezeichnet.

Angewandt auf  $g(k) = k^\gamma (k_1/k)^{N_1} (k_2/k)^{N_2}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} g(k) &= \sum_{j|k} \sum_{d|j} \mu(d) \left(\frac{j}{d}\right)^\gamma \left(\log \frac{k_1 d}{j}\right)^{N_1} \left(\log \frac{k_2 d}{j}\right)^{N_2} \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \binom{N_1}{n_1} \binom{N_2}{n_2} \sum_{j|k} j^\gamma \left(\log \frac{k_1}{j}\right)^{n_1} \left(\log \frac{k_2}{j}\right)^{n_2} g_j(N, \gamma), \end{aligned}$$

wobei

$$g_j(N, \gamma) = \sum_{d|j} \mu(d) d^{-\gamma} (\log d)^N, \quad (3.4.1)$$

$$N = N_1 - n_1 + N_2 - n_2. \quad (3.4.2)$$

Damit erhalten wir aus (3.3.38)

$$\begin{aligned}
S_{N_1, N_2}(\theta) &= L^{-N_1 - N_2} \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq y} \frac{b(k_1)b(k_2)}{k_1^\theta k_2^\theta} \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \binom{N_1}{n_1} \binom{N_2}{n_2} \times \\
&\quad \times \sum_{\substack{j \\ j|k_1 \\ j|k_2}} j^\gamma \left(\log \frac{k_1}{j}\right)^{n_1} \left(\log \frac{k_2}{j}\right)^{n_2} g_j(N, \gamma) \\
&= L^{-N_1 - N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \binom{N_1}{n_1} \binom{N_2}{n_2} \sum_{j \leq y} j^\gamma g_j(N, \gamma) \times \\
&\quad \times \sum_{\substack{k_1 \leq y \\ j|k_1}} \sum_{\substack{k_2 \leq y \\ j|k_2}} \frac{b(k_1)b(k_2)}{k_1^\theta k_2^\theta} \left(\log \frac{k_1}{j}\right)^{n_1} \left(\log \frac{k_2}{j}\right)^{n_2} \\
&= L^{-N_1 - N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \binom{N_1}{n_1} \binom{N_2}{n_2} \sum_{j \leq y} j^\gamma g_j(N, \gamma) T_j(n_1, \theta) T_j(n_2, \theta), \quad (3.4.3)
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
T_j(n, \theta) &= \sum_{\substack{k \leq y \\ k \equiv 0 \pmod{j}}} b(k) k^{-\theta} \left(\log \frac{k}{j}\right)^n \\
&= j^{-\theta} \sum_{\nu \leq y/j} b(\nu j) \nu^{-\theta} (\log \nu)^n \\
&= (-1)^n j^{-\theta} \frac{d^n}{d\theta^n} \left( \sum_{\nu \leq y/j} b(\nu j) \nu^{-\theta} \right). \quad (3.4.4)
\end{aligned}$$

Nun wählen wir die Koeffizienten von  $\psi$ , die nur noch in  $T_j(n, \theta)$  auftreten. In [Lev74a, (2.4)] wählte Levinson  $b(k) = \mu(k) k^{a-1/2} \frac{\log y/k}{\log y}$ . Eine der Möglichkeiten, das Ergebnis in [Lev74a] zu verbessern, ist naheliegenderweise eine andere Wahl dieser Koeffizienten. Wir verallgemeinern daher Levinsons ursprüngliche Wahl und wählen

$$b(k) = \mu(k) k^{a-1/2} h\left(\frac{\log y/k}{\log y}\right), \quad (3.4.5)$$

wobei  $h$  ein reelles Polynom mit  $h(1) = 1$  und  $h(0) = 0$  darstellt. Mit dieser Wahl ist klar, daß  $b(1) = 1$  und  $b(k) \ll 1$  (vgl. (3.1.18)).

Dies setzen wir nun in (3.4.4) ein und erhalten wegen der Multiplikativität der  $\mu$ -Funktion

$$\begin{aligned}
T_j(n, \theta) &= (-1)^n j^{-\theta} \frac{d^n}{d\theta^n} \left( \sum_{\nu \leq y/j} \mu(\nu j) \nu^{-\theta+a-1/2} j^{a-1/2} h\left(\frac{\log \frac{y}{\nu j}}{\log y}\right) \right) \\
&= (-1)^n \mu(j) j^{-\beta} G_j^{(n)}(\beta),
\end{aligned}$$

wobei

$$G_j(\beta) = \sum_{\substack{\nu \leq y/j \\ (\nu, j)=1}} \mu(\nu) \nu^{-\beta} h\left(\frac{\log \frac{y}{\nu j}}{\log y}\right), \quad (3.4.6)$$

$$\beta = \theta - a + \frac{1}{2}.$$

Insgesamt folgt aus (3.4.3) wegen  $\gamma - 2\beta = -1$

$$S_{N_1, N_2}(\theta) = L^{-N_1 - N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \binom{N_1}{n_1} \binom{N_2}{n_2} (-1)^{n_1 + n_2} \times$$

$$\times \sum_{j \leq y} j^{-1} \mu^2(j) g_j(N, \gamma) G_j^{(n_1)}(\beta) G_j^{(n_2)}(\beta). \quad (3.4.7)$$

### 3.4.2 Einige Überlegungen

Der problematische Teil in (3.4.7) ist offensichtlich

$$V_{N, n_1, n_2}(\theta) = \sum_{j \leq y} j^{-1} \mu^2(j) g_j(N, \gamma) G_j^{(n_1)}(\beta) G_j^{(n_2)}(\beta).$$

Um diese Terme in geeigneter Weise abschätzen zu können, definieren wir zuerst zwei Hilfsfunktionen:

$$F(j, s) = \prod_{p|j} (1 - p^{-s}) \quad \text{und} \quad F_1(j, s) = \prod_{p|j} (1 + p^{-s}). \quad (3.4.8)$$

Man beachte, daß für  $s = \sigma + it$  mit  $\sigma \geq \sigma_0 > 1/2$  gilt

$$\begin{aligned} |F_1(j, s) \cdot F(j, s)| &= \prod_{p|j} |1 - p^{-2s}| \\ &\geq \prod_p (1 - p^{-2\sigma_0}) \\ &= \frac{1}{\zeta(2\sigma_0)} \\ &\geq \frac{1}{C}, \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Konstanten  $C = C(\sigma_0)$ . Es folgt also

$$|F(j, s)^{-1}| \leq C \cdot |F_1(j, s)| \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} s \geq \sigma_0 > \frac{1}{2}. \quad (3.4.9)$$

Da die Zerlegung von  $V_{N, n_1, n_2}$  umfangreiche technische Überlegungen erfordert, fassen wir den wesentlichen Teil dieses Schritts — die Abschätzung von  $G_j(\beta)$  — in folgendem Hilfssatz zusammen, um den zugehörigen Beweis auf den Anhang verschieben zu können.

**Lemma 3.4.1** Sei  $h$  ein reelles Polynom mit  $h(0) = 0$ ,  $\delta = (\log \log y)^{-1}$ ,  $d = \delta/M$ , mit einer absoluten Konstanten  $M > 1$ , und sei  $G_j(\beta)$  wie in (3.4.6).

Dann gilt gleichmäßig für alle  $1 \leq j \leq y$  und alle  $\beta \neq 1$  mit  $|1 - \beta| \ll (\log y)^{-1}$

$$G_j^{(n)}(\beta) = M_{n,j}(\beta) + O(E_{n,j}),$$

wobei für  $n = 0$

$$M_{0,j} = F(j, \beta)^{-1} \left( (\beta - 1)h \left( \frac{\log y/j}{\log y} \right) + (\log y)^{-1}h' \left( \frac{\log y/j}{\log y} \right) \right) = O \left( \frac{F_1(j, \beta)}{\log y} \right),$$

für  $n = 1$

$$M_{1,j} = F(j, \beta)^{-1}h \left( \frac{\log y/j}{\log y} \right) = O(F_1(j, \beta)),$$

für  $n \geq 2$

$$M_{n,j} = 0$$

und für alle  $n \geq 0$

$$E_{n,j} = (\log y)^{n-2} (\log \log y)^2 \left( 1 + (j/y)^d \log y \right) F_1(j, 1 - \delta).$$

In unserem Fall ist entweder  $\theta = 1$  oder  $\theta = 2a$ , also  $\beta = 1 \pm R/L$  (analog  $\gamma = 1 \pm 2R/L$ ). Die Voraussetzungen von Lemma 3.4.1 sind damit erfüllt, und wir erhalten

$$\begin{aligned} V_{N,n_1,n_2}(\theta) &= \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} M_{n_1,j}(\beta) M_{n_2,j}(\beta) g_j(N, \gamma) \\ &\quad + O \left( \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} M_{n_1,j}(\beta) E_{n_2,j} g_j(N, \gamma) \right. \\ &\quad \quad \quad + \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} E_{n_1,j} M_{n_2,j}(\beta) g_j(N, \gamma) \\ &\quad \quad \quad \left. + \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} E_{n_1,j} E_{n_2,j} g_j(N, \gamma) \right) \\ &=: \Sigma_1 + O(\Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4). \end{aligned}$$

Aus Lemma 3.4.1 folgern wir sofort:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= 0 && \text{für } \max\{n_1, n_2\} \geq 2, \\ \Sigma_2 &= 0 && \text{für } n_1 \geq 2, \\ \Sigma_3 &= 0 && \text{für } n_2 \geq 2. \end{aligned}$$

Die in den Summen  $\Sigma_\nu$  auftretenden Terme sind nun für die verbleibenden Werte von  $n_i$  abzuschätzen. Zuerst bemerken wir, daß für  $n = 0$  oder  $n = 1$

$$\begin{aligned} M_{n,j} &\ll F_1(j, 1 - \delta) (\log y)^{n-1} && \text{und} \\ E_{n,j} &\ll (\log y)^{n-1} (\log L)^2 F_1(j, 1 - \delta). \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

Da  $d \mapsto d^{-\gamma}$  multiplikativ ist, haben wir

$$g_j(0, \gamma) = \sum_{d|j} \mu(d) d^{-\gamma} = \prod_{p|j} (1 - p^{-\gamma}) = F(j, \gamma) \quad (3.4.11)$$

und für  $N \geq 1$

$$g_j(N, \gamma) = \sum_{d|j} \mu(d) d^{-\gamma} (\log d)^N = (-1)^N \frac{d^N}{d^{\gamma N}} \left( \sum_{d|j} \mu(d) d^{-\gamma} \right) = (-1)^N F^{(N)}(j, \gamma).$$

$F(j, \cdot)$  ist in einer Umgebung von  $\overline{B}$  holomorph, wobei  $B = B(\gamma, \log^{-1} L)$  die offene Kreisscheibe um  $\gamma$  mit Radius  $(\log L)^{-1}$  bezeichnet. Nach Cauchys Ungleichung gilt dann

$$F^{(N)}(j, \gamma) \leq N! (\log L)^N \sup_{z \in \partial B} |F(j, z)|.$$

Wir wählen, wie in Lemma 3.4.1,

$$\delta = \frac{1}{\log \log y} \quad \text{und} \quad d = \frac{\delta}{M}.$$

Für  $z \in \partial B$ , d.h.  $|z - \gamma| = (\log L)^{-1}$ , ist  $\operatorname{Re} z < 1 - \delta$ , also mit (3.4.9)

$$|F(j, z)| \leq F_1(j, \operatorname{Re} z) \leq F_1(1 - \delta).$$

Folglich gilt

$$|g_j(N, \gamma)| = F^{(N)}(j, \gamma) \leq N! (\log L)^N F_1(j, 1 - \delta).$$

Da in unserem Fall  $N \leq N_1 + N_2 = O(1)$ , haben wir insgesamt

$$g_j(N, \gamma) \ll_{m, \phi} (\log L)^N F_1(j, 1 - \delta) \quad \text{für} \quad N \geq 1. \quad (3.4.12)$$

Berücksichtigen wir dies, sowie die Definitionen der  $M_{n,j}$  und  $E_{n,j}$ , so stellen wir fest, daß bei der Abschätzung der  $\Sigma_\nu$  ( $1 \leq \nu \leq 4$ ) Summen der Form

$$\sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} F_1(j, 1 - \delta)^r$$

auftreten werden. Über ihr Verhalten gibt unser nächstes Lemma Auskunft.

**Lemma 3.4.2** Sei  $F_1(j, 1 - \delta) = \prod_{p|j} (1 + p^{-1+\delta})$  mit  $\delta > 0$  und sei  $d \geq 0$ , wobei  $\delta + d \leq c_0 < 1$ . Dann gilt für  $r \geq 1$

$$\sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j^{1-d}} F_1(j, 1 - \delta)^r = \begin{cases} O_{c_0, r}(\log y) & ; \quad d = 0 \\ O_{c_0, r}(y^d/d) & ; \quad 0 < d < 1. \end{cases}$$

Einen Beweis findet man auf Seite 108.

Mit unserer Wahl von  $\delta$  ist Lemma 3.4.2 mit  $d = 0$  anwendbar. Wir erhalten

$$\sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} F_1(j, 1 - \delta) \ll \log y. \quad (3.4.13)$$

### 3.4.3 Der Fall $N_i \geq 2$

Die bislang hergeleiteten Abschätzungen (3.4.10), (3.4.12) und (3.4.13) genügen uns zur Abschätzung von  $V_{N,n_1,n_2}$  im Fall  $N \neq 0$ , also in dem Fall, in dem  $n_1 < N_1$  oder  $n_2 < N_2$ . Für  $\max\{n_1, n_2\} = 0, 1$  gilt

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\ll \sum_{j \leq y} F_1(j, 1 - \delta)^2 (\log y)^{n_1+n_2-2} g_j(N, \gamma) \\ &\ll (\log y)^{n_1+n_2-2} (\log L)^N \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} F_1(j, 1 - \delta)^3 \\ &\ll (\log y)^{n_1+n_2-1} (\log L)^N \\ &\ll L^{n_1+n_2-1} (\log L)^N. \end{aligned}$$

Ist  $n_1 = 0, 1$  und  $n_2 = 0, 1$ , so gilt analog

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\ll L^{n_1+n_2-1} (\log L)^{N-2}, \\ \Sigma_3 &\ll L^{n_1+n_2-1} (\log L)^{N-2}, \end{aligned}$$

sowie für beliebige Werte  $n_1, n_2$

$$\Sigma_4 \ll L^{n_1+n_2-1} (\log L)^{N+4}.$$

Insgesamt erhalten wir zusammen mit den obigen Ergebnissen für  $n_1, n_2 \geq 2$

$$V_{N,n_1,n_2}(\theta) \ll L^{N_1+N_2-2} (\log L)^5 \quad \text{für } N \neq 0, \quad (3.4.14)$$

da  $n_1 \leq N_1 - 1$  oder  $n_2 \leq N_2 - 1$ .

Betrachten wir nun den Fall  $N = 0$ , also den Fall  $n_1 = N_1$  und  $n_2 = N_2$ . Hier ist nach (3.4.11)

$$g_j(0, \gamma) = F(j, \gamma) \leq 1.$$

Gelte zusätzlich noch  $\max\{n_1, n_2\} \geq 2$ . Sei oBdA  $n_1 \geq 2$ , so folgt nach Lemma 3.4.2 mit  $d = \delta/M$  bzw.  $d = 0$

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \Sigma_2 = 0, \\ \Sigma_3 &\ll \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} (\log L)^2 \left( 1 + \left( \frac{j}{y} \right)^d \log y \right) F_1(j, 1 - \delta)^2 (\log y)^{n_2-1} g_j(0, \gamma) \\ &\ll L^{n_1+n_2-3} (\log L)^2 \left( \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} F_1(j, 1 - \delta)^2 + y^{-d} \log y \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j^{1-d}} F_1(j, 1 - \delta)^2 \right) \\ &\ll L^{n_1+n_2-2} (\log L)^3, \end{aligned}$$

und analog

$$\Sigma_4 \ll L^{n_1+n_2-2} (\log L)^5.$$

Somit ergibt sich

$$V_{0, n_1, n_2}(\theta) \ll L^{N_1 + N_2 - 2} (\log L)^5 \quad \text{für } \max\{n_1, n_2\} \geq 2. \quad (3.4.15)$$

Die Ergebnisse (3.4.14) und (3.4.15) können wir zusammenfassen. Ist nämlich  $\max\{N_1, N_2\} \geq 2$ , so ist in der Summe  $S_{N_1, N_2}(\theta)$  stets entweder  $N = 0 \implies \max\{n_1, n_2\} \geq 2$  oder  $N \neq 0$ , also gilt nach (3.4.7)

$$\begin{aligned} S_{N_1, N_2}(\theta) &= L^{-N_1 - N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \binom{N_1}{n_1} \binom{N_2}{n_2} (-1)^{n_1 + n_2} V_{N, n_1, n_2}(\theta) \\ &\ll L^{-2} (\log L)^5 \quad \text{für } \max\{N_1, N_2\} \geq 2. \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

Diese  $S_{N_1, N_2}$  sind also recht klein. Wir werden sehen, daß lediglich die verbleibenden  $S_{N_1, N_2}$  einen wesentlichen Beitrag zu  $J_7$  und  $J_8$  leisten.

#### 3.4.4 Der Fall $N_i = 0$ oder 1

Wir betrachten also die  $S_{N_1, N_2}(\theta)$  mit  $N_1, N_2 \in \{0, 1\}$ . Offensichtlich ist

$$\begin{aligned} S_{0,0}(\theta) &= V_{0,0,0}(\theta), \\ S_{0,1}(\theta) = S_{1,0}(\theta) &= L^{-1} (V_{1,0,0}(\theta) - V_{0,1,0}(\theta)) \\ &= L^{-1} V_{0,1,0}(\theta) + O(L^{-2} (\log L)^5), \\ S_{1,1}(\theta) &= L^{-2} (V_{2,0,0}(\theta) - V_{1,0,1}(\theta) - V_{1,1,0}(\theta) + V_{0,1,1}(\theta)) \\ &= L^{-2} V_{0,1,1}(\theta) + O(L^{-2} (\log L)^5). \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

Wir müssen also die Summen  $V_{0,0,0}$ ,  $V_{0,1,0}$  und  $V_{0,1,1}$  untersuchen. Beginnen wir mit  $V_{0,0,0}$ . Nach Lemma 3.4.1 folgt

$$\begin{aligned} V_{0,0,0} &= \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} G_j(\beta)^2 g_j(0, \gamma) \\ &= \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} \frac{F(j, \gamma)}{F(j, \beta)^2} \left( (\beta - 1) h \left( \frac{\log \frac{y}{j}}{\log y} \right) + \frac{1}{\log y} h' \left( \frac{\log \frac{y}{j}}{\log y} \right) \right)^2 + \mathcal{F}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\ll (\log y)^{-2} (\log \log y)^2 y^{-d} \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j^{1-d}} F_1(j, 1 - \delta)^2 \\ &\quad + (\log y)^{-2} (\log \log y)^4 y^{-2d} \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j^{1-2d}} F_1(j, 1 - \delta)^2 \\ &\ll L^{-2} (\log L)^5. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir den Hauptteil von  $V_{0,0,0}$  aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned} V_{0,0,0} &= (\beta - 1)^2 \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} \frac{F(j, \gamma)}{F(j, \beta)^2} h^2 \left( \frac{\log \frac{y}{j}}{\log y} \right) \\ &\quad + \frac{1}{(\log y)^2} \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} \frac{F(j, \gamma)}{F(j, \beta)^2} h'^2 \left( \frac{\log \frac{y}{j}}{\log y} \right) \\ &\quad + 2(\beta - 1) \frac{1}{\log y} \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} \frac{F(j, \gamma)}{F(j, \beta)^2} h h' \left( \frac{\log \frac{y}{j}}{\log y} \right) + O \left( \frac{(\log L)^5}{L^2} \right). \end{aligned}$$

Wir haben hier also Ausdrücke der Form

$$\sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} \frac{F(j, \gamma)}{F(j, \beta)^2} p \left( \frac{\log \frac{y}{j}}{\log y} \right) = \sum_{\nu} \frac{a_{\nu}}{(\log y)^{\nu}} \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} \frac{F(j, \gamma)}{F(j, \beta)^2} \left( \log \frac{y}{j} \right)^{\nu}, \quad (3.4.18)$$

vorliegen, wobei  $p$  das Polynom  $p(z) = \sum_{\nu} a_{\nu} z^{\nu}$  darstellt.

Bei der Herleitung von (3.4.16) genügten uns stets Aussagen der Art, wie Lemma 3.4.2 sie lieferte. Da die  $S_{N_1, N_2}$ , in denen die Terme aus (3.4.18) auftreten, den wesentlichen Beitrag zu  $J_7$  und  $J_8$  leisten, können uns derartige  $O$ -Abschätzungen nicht genügen. Wir benötigen also eine genauere Aussage. Der folgende Hilfssatz ist eine Verallgemeinerung von Lemma 3.4.2 im Spezialfall  $d = 0$  und wird ebenfalls im Anhang A bewiesen.

**Lemma 3.4.3** *Sei  $f(p) = 1 + O(p^{-c})$  für Primzahlen  $p$  und sei  $f(j) = \prod_{p|j} f(p)$ , mit einer Konstanten  $c > 0$ .*

*Dann gilt für  $\nu \geq 0$*

$$\sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} f(j) \left( \log \frac{y}{j} \right)^{\nu} = \frac{\mathcal{P}_f}{\zeta(2)} \cdot \frac{(\log y)^{\nu+1}}{\nu+1} + O_{c, \nu}((\log y)^{\nu}),$$

wobei

$$\mathcal{P}_f = \prod_p \left( 1 + \frac{f(p) - 1}{p + 1} \right).$$

*Das Produkt  $\mathcal{P}_f$  ist absolut konvergent.*

Weil  $f(p) = \frac{F(p, \gamma)}{F(p, \beta)^2} = 1 + O(p^{-c})$ , wegen  $\gamma, \beta = 1 + O(L^{-1})$ , können wir dieses Lemma anwenden und erhalten

$$\frac{1}{(\log y)^{\nu}} \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} \frac{F(j, \gamma)}{F(j, \beta)^2} \left( \log \frac{y}{j} \right)^{\nu} = \frac{\mathcal{P}_f}{\zeta(2)} \cdot \frac{\log y}{\nu + 1} + O(1).$$

Da  $\mathcal{P}_f$  absolut konvergiert, ist wegen  $\gamma = 2\beta - 1$

$$\mathcal{P}(\beta) = \mathcal{P}_f = \prod_p \left( 1 + \frac{2p^{-\beta} - p^{1-2\beta} - p^{-2\beta}}{(p+1)(1-p^{-\beta})^2} \right)$$

analytisch für  $\beta = 1 + O(L^{-1})$ . Daher gilt

$$\mathcal{P}(\beta) = \mathcal{P}(1) + O(|\beta - 1|) = \zeta(2) + O(L^{-1}) \quad \text{für } \beta = 1 + O(L^{-1})$$

und somit folgt aus (3.4.18)

$$\begin{aligned} \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} \frac{F(j, \gamma)}{F(j, \beta)^2} p\left(\frac{\log \frac{y}{j}}{\log y}\right) &= \log y \sum_{\nu} \frac{a_{\nu}}{\nu + 1} + O\left(\sum_{\nu} a_{\nu}\right) \\ &= \log y \sum_{\nu} a_{\nu} \int_0^1 t^{\nu} dt + O(1) \\ &= \log y \int_0^1 p(t) dt + O(1). \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

Sei nun

$$P_1 = \int_0^1 h^2(t) dt \quad \text{und} \quad P_2 = \int_0^1 h'^2(t) dt.$$

Setzen wir (3.4.19) in  $V_{0,0,0}$  ein, so liefert uns dies

$$\begin{aligned} V_{0,0,0}(\theta) &= (\beta - 1)^2 \log y \int_0^1 h^2(t) dt + \frac{1}{\log y} \int_0^1 h'^2(t) dt \\ &\quad + 2(\beta - 1) \int_0^1 h h'(t) dt + O(L^{-2}(\log L)^5) \\ &= (\beta - 1)^2 P_1 \log y + \frac{P_2}{\log y} + \beta - 1 + O(L^{-2}(\log L)^5), \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

denn es gilt

$$\int_0^1 h(t)h'(t) dt = \frac{1}{2}(h^2(1) - h^2(0)) = \frac{1}{2},$$

da wir  $h(0) = 0$  und  $h(1) = 1$  gefordert hatten.

Analog laufen die Berechnungen bezüglich  $V_{0,1,0}$  und  $V_{0,1,1}$ . Es folgt

$$\begin{aligned} V_{0,1,0}(\theta) &= \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} G'_j(\beta) G_j(\beta) g_j(0, \gamma) \\ &= (\beta - 1) \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} \frac{F(j, \gamma)}{F(j, \beta)^2} h^2\left(\frac{\log \frac{y}{j}}{\log y}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\log y} \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} \frac{F(j, \gamma)}{F(j, \beta)^2} h h'\left(\frac{\log \frac{y}{j}}{\log y}\right) + O(L^{-1}(\log L)^5) \\ &= (\beta - 1) P_1 \log y + \frac{1}{2} + O(L^{-1}(\log y)^5) \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

und

$$\begin{aligned} V_{0,1,1}(\theta) &= \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} (G'_j(\beta))^2 g_j(0, \gamma) \\ &= \sum_{j \leq y} \frac{\mu(j)^2}{j} \frac{F(j, \gamma)}{F(j, \beta)^2} h^2\left(\frac{\log \frac{y}{j}}{\log y}\right) + O((\log L)^5) \\ &= P_1 \log y + O((\log y)^5). \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

Die Ergebnisse (3.4.20), (3.4.21) und (3.4.22) können wir jetzt in (3.4.17) einsetzen. Da  $y = T^{1/2}L^{-20}$ , also  $\log y = \frac{1}{2}L + O(1)$ , ist

$$\begin{aligned} S_{0,0}(\theta) &= L^{-1} \left( \frac{1}{2}(\beta - 1)^2 L^2 P_1 + 2P_2 + (\beta - 1)L \right) + O(L^{-2} \log^5 L), \\ S_{0,1}(\theta) &= S_{1,0}(\theta) = -\frac{1}{2}L^{-1} ((\beta - 1)LP_1 + 1) + O(L^{-2} \log^5 L), \\ S_{1,1}(\theta) &= \frac{1}{2}L^{-1} P_1 + O(L^{-2} \log^5 L) \end{aligned}$$

für  $\theta = 1$  oder  $\theta = 2a$ .

Abschließend bemerken wir noch, daß wegen  $\beta - 1 \ll L^{-1}$

$$S_{0,0}, S_{0,1}, S_{1,0}, S_{1,1} \ll L^{-1}. \quad (3.4.23)$$

Hiermit haben wir jetzt auch die bereits auf Seite 54 verwendete Abschätzung von  $S_{0,0}$  bewiesen.

### 3.5 Abschätzung von $\alpha_m$

#### 3.5.1 Berechnung von $J/U$

Die gerade erzielten Ergebnisse setzen wir jetzt in die Definitionen von  $J_7$  und  $J_8$ , (3.3.37) und (3.3.39), ein.

Es folgt aufgrund von (3.3.37), (3.3.38) und, da wegen (3.4.16) nur die  $S_{N_1, N_2}$  mit  $N_1, N_2 \in \{0, 1\}$  wesentliche Beiträge leisten,

$$\begin{aligned} J_7 &= \frac{e^{2R}}{1 - 2a} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2R)^n} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \left( \phi_*^{(n-\nu)}(1) \overline{\phi_*^{(\nu)}(1)} S_{0,0}(1) \right. \\ &\quad - \phi_*^{(n-\nu)}(1) \overline{\phi_*^{(\nu+1)}(1)} S_{1,0}(1) \\ &\quad - \phi_*^{(n-\nu+1)}(1) \overline{\phi_*^{(\nu)}(1)} S_{0,1}(1) \\ &\quad \left. + \phi_*^{(n-\nu+1)}(1) \overline{\phi_*^{(\nu+1)}(1)} S_{1,0}(1) \right) + O(L^{-1} \log^5 L). \end{aligned}$$

Bevor wir unsere Abschätzungen für  $S_{N_1, N_2}$  in diese Darstellung von  $J_7$  einsetzen, werden wir sie vereinfachen. Zuerst entfernen wir die imaginären Anteile der Summanden des Hauptteils, indem wir das komplexwertige Polynom

$$\phi_*(z) = \phi(z) \left( 1 - 2z + \frac{\pi i}{2L} \right)^m \quad \text{durch} \quad \phi_m(z) = \phi(z)(1 - 2z)^m$$

ersetzen. Es gilt

$$\frac{d^j}{dz^j} (c - 2z)^m = \begin{cases} (-1)^j m(m-1) \cdots (m-j+1) (c-2z)^{m-j} & ; j \leq m \\ 0 & ; j > m \end{cases}.$$

Somit folgt

$$|\phi_*^{(\nu)}(z) - \phi_m^{(\nu)}(z)| = \left| \sum_{\substack{0 \leq j \leq \nu \\ j \leq m}} \binom{\nu}{j} (-1)^j \phi^{(\nu-j)}(z) \frac{m!}{(m-\nu)!} \times \right. \\ \left. \times \left[ \left(1 - 2z + \frac{\pi i}{2L}\right)^{m-j} - (1 - 2z)^{m-j} \right] \right|.$$

Der Term in eckigen Klammern ist dabei betragsmäßig

$$\leq \left(\frac{1}{L}\right)^{m-j} \cdot \sum_{\mu=1}^{m-j} \left(1 - \left|\frac{\pi i}{2L}\right|\right)^{m-j-\mu} \leq m \cdot \left(\frac{1}{L}\right)^m \cdot \left(1 + \frac{\pi}{2L}\right)^{m-1} \ll \frac{1}{L}$$

und insgesamt gilt daher für  $0 \leq z \leq 1$

$$\phi_*^{(\nu)}(z) = \phi_m^{(\nu)}(z) + O(L^{-1}).$$

Damit ist wegen (3.4.23) und wegen  $(1 - 2a)^{-1} \ll L$

$$\frac{1}{1-2a} \phi_*^{(j_1)}(z) \overline{\phi_*^{(j_2)}(z)} S_{N_1, N_2}(\theta) = \frac{1}{1-2a} \phi_m^{(j_1)}(z) \phi_m^{(j_2)}(z) S_{N_1, N_2}(\theta) + O(L^{-1}).$$

Zusammengenommen kann also in  $J_7$  (und analog auch in  $J_8$ ) stets  $\phi_*$  durch  $\phi_m$  ersetzt werden, da der entstehende Gesamtfehler  $\ll L^{-1}$  ist und so in das Restglied  $O(L^{-1} \log^5 L)$  fällt.

Weiter ist nach der Definition von  $a$  (3.1.17)

$$\beta - 1 = \theta - a - \frac{1}{2} = \begin{cases} R/L & ; \theta = 1 \\ -R/L & ; \theta = 2a, \end{cases}$$

sowie  $1 - 2a = 2R/L$ .

Sei nun noch

$$\Phi_1(z) = \phi_m^2(z) \quad , \quad \Phi_2(z) = \phi_m'^2(z) \quad \text{und} \quad \Phi_3(z) = \phi_m(z) \phi_m'(z).$$

Mit diesen Abkürzungen gilt

$$\Phi_1^{(n)}(z) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \phi_m^{(\nu)}(z) \phi_m^{(n-\nu)}(z) \\ \Phi_2^{(n)}(z) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \phi_m^{(\nu+1)}(z) \phi_m^{(n-\nu+1)}(z) \\ \Phi_3^{(n)}(z) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \phi_m^{(\nu+1)}(z) \phi_m^{(n-\nu)}(z).$$

Verwenden wir diese Resultate und setzen die Abschätzungen für  $S_{N_1, N_2}$  ein, so erhalten wir die vereinfachte Darstellung

$$J_7 = \frac{e^{2R}}{2R} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2R)^n} \left( \Phi_1^{(n)}(1) \left( \frac{1}{2} R^2 P_1 + 2P_2 + R \right) + \frac{1}{2} \Phi_2^{(n)}(1) P_1 + \Phi_3^{(n)}(1) (R P_1 + 1) \right) \\ + O(L^{-1} \log^5 L).$$

Völlig analog verfahren wir mit (3.3.39). Mit den oben genannten Vereinfachungen erhalten wir letztendlich

$$J_8 = \frac{1}{2R} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2R)^n} \left( \Phi_1^{(n)}(0) \left( \frac{1}{2} R^2 P_1 + 2P_2 + R \right) + \frac{1}{2} \Phi_2^{(n)}(0) P_1 + \Phi_3^{(n)}(0) (R P_1 + 1) \right) + O(L^{-1} \log^5 L).$$

Nach (3.3.36) müssen wir die Differenz zwischen  $J_7$  und  $J_8$  betrachten. Wiederholte partielle Integration ergibt für Polynome  $p(z)$

$$\int_0^1 e^{2Rz} p(z) dz = \frac{1}{2R} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2R)^n} \left( e^{2R} p^{(n)}(1) - p^{(n)}(0) \right),$$

womit nach (3.3.36) gilt :

$$\begin{aligned} \frac{J}{U} &= J_7 - J_8 + O(L^{-1}) \\ &= \left( \frac{1}{2} R^2 P_1 + 2P_2 \right) \int_0^1 e^{2Rz} \Phi_1(z) dz + \frac{1}{2} P_1 \int_0^1 e^{2Rz} \Phi_2(z) dz + R P_1 \int_0^1 e^{2Rz} \Phi_3(z) dz \\ &\quad + \frac{1}{2R} \sum_{n \geq 0} \left( e^{2R} (R \Phi_1^{(n)}(1) + \Phi_3^{(n)}(1)) + (R \Phi_1^{(n)}(0) + \Phi_3^{(n)}(0)) \right) \\ &\quad + O(L^{-1} \log^5 L). \end{aligned}$$

Selbstverständlich werden wir jetzt die noch verbliebene Summe entfernen. Nach Definition der  $\Phi_i$  gilt  $\Phi_3(z) = \frac{1}{2} \Phi_1'(z)$  und somit

$$\frac{1}{R} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2R)^n} (R \Phi_1^{(n)}(z) + \Phi_3^{(n)}(z)) = \Phi_1(z).$$

Zur weiteren Abkürzung sei

$$\Psi = \int_0^1 e^{2Rz} \Phi_1(z) dz \quad \text{und} \quad \Psi' = \int_0^1 e^{2Rz} \Phi_2(z) dz.$$

Für das entsprechende Integral über  $\Phi_3$  brauchen wir keine derartige Abkürzung, denn mit partieller Integration erhalten wir, da  $\phi_m^2(1) = \phi^2(1)$  und  $\phi_m^2(0) = \phi^2(0) = 0$ ,

$$\int_0^1 e^{2Rz} \Phi_3(z) dz = \frac{1}{2} \left( e^{2R} \phi^2(1) - 1 \right) - R \Psi.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \frac{J}{U} &= \left( \frac{1}{2} R^2 P_1 + 2P_2 \right) \Psi + \frac{1}{2} P_1 \Psi' + R P_1 \left( \frac{1}{2} (e^{2R} \phi^2(1) - 1) - R \Psi \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( e^{2R} \phi^2(1) + 1 \right) + O(L^{-1} \log^5 L) \\ &= \frac{1}{2} \left( (e^{2R} \phi^2(1) + 1) + R P_1 (e^{2R} \phi^2(1) - 1) + P_1 \Psi' + (4P_2 - R^2 P_1) \Psi \right) \\ &\quad + O(L^{-1} \log^5 L). \end{aligned}$$

### 3.5.2 Letzte Vereinfachungen

Wir sind nun in der Lage, eine erste Abschätzung für  $\alpha_m$  anzugeben. Mit (3.2.24) folgt

$$\alpha_m \geq 1 - \inf \frac{\log F_m(\phi, h, R)}{R}, \quad (3.5.1)$$

wobei

$$F_m(\phi, h, R) = \frac{1}{2} \left( (e^{2R}\phi^2(1) + 1) + RP_1(e^{2R}\phi^2(1) - 1) + P_1\Psi' + (4P_2 - R^2P_1)\Psi \right)$$

und wobei das Infimum über alle  $R > 0$ , alle  $h(x) \in \mathbb{R}[x]$  mit  $h(0) = 0$  und  $h(1) = 1$  ( $P_1, P_2$  hängen von  $h$  ab) sowie über alle  $\phi(x) \in \mathbb{R}[x]$  mit  $\phi(0) = 0$  und  $\phi'(x) = \phi'(1-x)$  gebildet wird.

Zur Abkürzung sei

$$\lambda = \frac{\Psi' + R(e^{2R}\phi^2(1) - 1) - R^2\Psi}{4\Psi},$$

so daß

$$F_m(\phi, h, R) = \frac{1}{2}(e^{2R}\phi^2(1) + 1) + 2\Psi(P_1\lambda + P_2).$$

Statt der Polynome  $h$  und  $\phi$  können beliebige, auf  $[0, 1]$  stetig differenzierbare reelle Funktionen mit den gleichen Eigenschaften verwendet werden, da derartige Funktionen sich beliebig genau durch Polynome approximieren lassen.

Es ist sicher wünschenswert, diese Funktionen optimal zu bestimmen, um das Infimum in (3.5.1) zu minimieren. Bezüglich der Funktion  $h$  können wir dazu Ergebnisse der Variationsrechnung verwenden. Wir müssen also  $h$  derart wählen, daß  $P_1\lambda - P_2$  möglichst klein wird, also so, daß

$$P_1\lambda + P_2 = \int_0^1 (\lambda h^2(z) + h'^2(z)) dz \quad \text{mit} \quad h(0) = 0, h(1) = 1$$

minimal wird. Als Lösung dieser Lagrange-Aufgabe kommen ([GF63]) die Lösungen von

$$h'' - \lambda h = 0$$

in Frage.

Die offensichtliche Lösung  $h \equiv 0$  scheidet aus, da sie nicht der Bedingung  $h(1) = 1$  genügt.

Da  $e^{2R}\phi^2(1) - 1 = 2 \int_0^1 e^{2Rz} \phi_m(z) \phi_m'(z) dz + 2R\Psi$ , folgt

$$\Psi' + R(e^{2R}\phi^2(1) - 1) - R^2\Psi = \int_0^1 e^{2Rz} (\phi_m'(z) + R\phi_m(z))^2 dz > 0,$$

und somit ist wegen  $\Psi > 0$  auch

$$\lambda = \frac{\Psi' + R(e^{2R}\phi^2(1) - 1) - R^2\Psi}{4\Psi} > 0.$$

Setzen wir also  $\Lambda = \sqrt{\lambda}$ , so haben die Lösungen der obigen Differentialgleichung ([Kam59, C.2.9]) die Form

$$h(x) = c_1 \cosh(\Lambda x) + c_2 \sinh(\Lambda x).$$

Aus  $h(0) = 0$  folgt  $c_1 = 0$  und aus  $h(1) = 1$  folgt  $c_2 = (\sinh \Lambda)^{-1}$  und insgesamt ist damit

$$h(x) = \frac{\sinh(\Lambda x)}{\sinh \Lambda}.$$

Mit dieser Wahl erhalten wir

$$P_1 \lambda + P_2 = \frac{\Lambda \cosh \Lambda}{\sinh \Lambda} = \Lambda \coth \Lambda.$$

Setzen wir dies in  $F_m(\phi, h, R)$  ein, so erhalten wir

$$F_m(\phi, R) = F_m(\phi, h, R) = \frac{1}{2}(e^{2R}\phi^2(1) + 1) + 2\Psi\Lambda \coth \Lambda,$$

und damit ist Satz 2.2.1 bewiesen. □

## 3.6 Numerische Berechnungen I

### 3.6.1 Eine allgemeine Darstellung von $\phi_m$

Um jetzt die Werte des Korollars 2.2.2 zu erhalten, sind wir gezwungen, die Funktion  $\phi$ , sowie die Konstante  $R$ , optimal zu bestimmen. Leider steht uns hier keine ähnlich elegante Möglichkeit zur Verfügung wie oben bei der Wahl der Funktion  $h$ . Daher benutzen wir numerische Verfahren zur Suche nach einem Minimum der Funktion

$$\frac{1}{R} \log F_m(\phi, R).$$

Die Funktion  $\phi$  wollen wir dazu als Polynom wählen, so daß die zu minimierende Funktion als Funktion von  $R$  und den Koeffizienten dieses Polynoms betrachtet werden kann.

Da gelten muß

$$\phi(0) = 1 \quad \text{und} \quad \phi'(x) = \phi'(1-x),$$

kommen nur bestimmte Polynome in Frage. Sei

$$\hat{\phi}(x) = \phi'\left(x + \frac{1}{2}\right),$$

dann ist  $\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}(-x)$ ,  $\hat{\phi}$  ist also eine gerade Funktion und es gilt somit

$$\phi'(x) = \hat{\phi}(x - 1/2) = \sum_{\nu=0}^{d-1} b_\nu (x - 1/2)^{2\nu}.$$

Alle Stammfunktionen von  $\phi'$  haben die Form

$$\phi(x) = \int_{1/2}^x \phi'(t) dt + \beta_0 = \beta_0 + \sum_{\nu=0}^{d-1} \frac{b_\nu}{2\nu+1} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2\nu+1},$$

mit  $\beta_0 = \phi(1/2)$ . Polynome dieser Gestalt erfüllen, bei geeigneter Wahl von  $\beta_0$ , die geforderten Bedingungen. Da wir aber ohnehin mit der Funktion  $\phi_m(x) = \phi(x)(1-2x)^m$  rechnen müssen, formen wir unsere Darstellung von  $\phi$  noch etwas um.

Da  $x - 1/2 = (-1/2)(1 - 2x)$ , gilt mit  $\beta_\nu = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu+1} \frac{b_{\nu-1}}{2\nu-1}$

$$\phi(x) = \beta_0 + \sum_{\nu=1}^d \beta_\nu (1-2x)^{2\nu-1}.$$

Wählen wir  $\beta_0 = 1 - \sum_{\nu=1}^d \beta_\nu$ , so gilt auch  $\phi(0) = 1$ . Es ist also

$$\phi_m(x) = \beta_0 + \sum_{\nu=1}^d \beta_\nu (1-2x)^{2\nu-1+m}.$$

### 3.6.2 Numerische Berechnung von $F_m(\phi, R)$

Sämtliche weiteren bei der Berechnung von  $F_m(\phi, R)$  auftretenden Werte lassen sich nun bequem berechnen. Es gilt nämlich

$$\phi(x) = \sum_{\mu=0}^{2d-1+m} \gamma_\mu x^\mu \quad \text{und} \quad \phi'(x) = \sum_{\mu=0}^{2d-2+m} (\mu+1)\gamma_{\mu+1} x^\mu$$

mit

$$\gamma_\mu = (-2)^\mu \sum_{\substack{1 \leq \nu \leq d \\ 2\nu \geq \mu+1-m}} \binom{2\nu-1+m}{\mu} \beta_\nu + \binom{m}{\mu} (-2)^\mu \beta_0 \quad (1 \leq \mu \leq 2d-1+m).$$

Setzen wir nun  $d' = \deg \phi_m = 2d-1+m$ , so folgt

$$\phi_m^2(x) = \sum_{k=0}^{2d'} x^k \sum_{\substack{0 \leq \mu \leq d' \\ \mu \leq k \\ \mu \geq k-d'}} \gamma_\mu \gamma_{k-\mu} \quad \text{und} \quad \phi_m'^2(x) = \sum_{k=0}^{2d'-2} x^k \sum_{\substack{1 \leq \mu \leq d' \\ \mu \leq k+1 \\ \mu \geq k-d'+2}} \mu(k-\mu) \gamma_\mu \gamma_{k-\mu}$$

Diese Werte algorithmisch zu berechnen, stellt also kein Problem dar.

Um den Wert  $\Lambda$  zu erhalten, müssen nur noch die Integrale  $\Psi$  und  $\Psi'$  berechnet werden, in denen die obigen Funktionen  $\phi_m^2$  und  $\phi_m'^2$  auftreten.  $F_m(\phi, R)$  können wir damit dann als Funktion in  $d+1$  Variablen, nämlich  $R$  und den  $\beta_\nu$  mit  $\nu = 1, \dots, d$ , auffassen.

### 3.6.3 Das Programm

Da für Minimierungsaufgaben diverse Routinen der NAG-Bibliothek ([NAG86]) am Hochschulrechenzentrum der Universität Frankfurt am Main zur Verfügung stehen, besteht das FORTRAN-Programm `SUCHE0`, mit dem die in Korollar 2.2.2 angegebenen numerischen Werte gefunden wurden (s. Anhang B), im wesentlichen aus einer Definition der zu minimierenden Funktion — entsprechend den obigen Überlegungen —, einem Aufruf der minimierenden NAG-Routine und einer Schleife, in der verschiedene Startwerte gewählt werden.

Auch zur Berechnung der Integrale  $\Psi$  und  $\Psi'$  werden Quadraturroutinen der NAG-Bibliothek verwendet. Der Versuch, diese Integrale explizit über eine Rekursionsformel zu berechnen,

scheiterte, da die dabei auftretenden Zahlen zu groß werden, um im Rechner exakt dargestellt werden zu können.

Des weiteren wird eine NAG-Routine zur Erzeugung von Pseudo-Zufallszahlen benutzt, um die Startwerte des Minimierungsalgorithmus zu generieren. Eine genaue Erläuterung dieser Routinen findet man in [NAG86]. Der Vorteil in der Verwendung solcher numerischer Software-Pakete liegt zum einen in der Einfachheit ihrer Anwendung, vor allem aber in ihrer numerischen Stabilität.

Bei höherem Grad des Polynoms  $\phi_m$  konvergiert das benutzte Minimierungsverfahren leider nicht mehr bei jedem Startwert gegen ein lokales Minimum. Da jedoch stets der kleinste aufgefundene Wert von der Minimierungsroutine zurückgegeben wird, sind auch diese Programmläufe für unseren Zweck verwendbar. Beispiele von Programmausgaben findet man ebenfalls im Anhang B.

Der Umstand, daß die hier erzielten Ergebnisse besser sind als Conreys (vgl. [Con83a, § 7]), obwohl die gleichen Funktionen zugrundegelegt werden, ist dadurch zu erklären, daß Conrey für  $\phi$  Polynome geringeren Grades wählte, als das mit dem hier verwendeten Programm möglich ist.

### 3.6.4 Die Maxima

Die Tabelle 3.1 zeigt die Werte für  $R$  und  $\beta_1, \dots, \beta_d$ , an denen das Programm SUCHEO die in Korollar 2.2.2 genannten Maxima von  $1 - R^{-1} \log F_m(\phi, R)$  gefunden hat. Sämtliche Werte sind auf jeweils acht signifikante Stellen gerundet, die Schranken aus Korollar 2.2.2 sind dagegen nach jeweils sechs Nachkommastellen abgeschnitten.

$m$	0	1	2	3	4
$R$	1.4760924	1.2145657	1.3025133	1.5148713	1.8874695
$\beta_1$	.67103125	1.2617328	1.9197010	2.5016643	2.5132416
$\beta_2$	-.26415943	-3.8172995	-7.2775661	-10.303586	-9.8475588
$\beta_3$	.15850922	10.302836	18.211992	24.675925	22.506354
$\beta_4$	-.069562664	-16.064069	-25.008732	-31.439920	-27.631595
$\beta_5$	.015669665	13.888409	18.134471	20.300627	17.320037
$\beta_6$		-6.1085159	-6.0102666	-5.2348342	-4.3604698
$\beta_7$		1.0392884	.52974669		
$\alpha_m >$	.36581586	.81568226	.96014221	.98821615	.99522696
$m$	5	6	7	8	9
$R$	2.3010114	2.2431667	2.7458060	2.8307870	3.7417189
$\beta_1$	2.3948019	2.1800982	1.9846892	2.1120596	1.2264449
$\beta_2$	-8.6731755	-6.0104306	-5.2179423	-5.7671047	-1.5219522
$\beta_3$	18.520367	8.7220584	7.8067416	8.6858287	1.1157811
$\beta_4$	-21.379508	-5.5177106	-5.6555390	-6.2745446	-.32027469
$\beta_5$	12.666469	.74637204	1.5820636	1.7437727	
$\beta_6$	-3.0289303	.37964633			
$\alpha_m >$	.99754323	.99845820	.99902042	.99931006	.99952300

Tabelle 3.1: Abschätzung von  $\alpha_m$



## Kapitel 4

# Einfache Nullstellen

### 4.1 Eine andere Darstellung von $\xi^{(m)}$

Wie in der Einleitung angekündigt, wollen wir nun noch  $\alpha_m^{(1)}$ , den Anteil der einfachen Nullstellen von  $\xi^{(m)}(s)$ , die auf  $\sigma = \frac{1}{2}$  liegen, abschätzen. Abgesehen von einigen Modifikationen folgen wir dem in [Con83b] geführten Beweis.

In [HB79] zeigte Heath-Brown, wie Levinsons Beweisansatz aus [Lev74a] derart abgewandelt werden kann, daß Levinsons Schranke auch für  $\alpha_0^{(1)}$  gilt. Leider läßt sich Heath-Browns Argument nicht auf den von uns verfolgten Beweisansatz anwenden, da unsere Darstellung (3.1.2) für  $\xi^{(m)}$  nicht die von Levinson verwendete ist. Wir müssen folglich zuerst eine neue derartige Darstellung suchen. Ausgangspunkt dafür ist die Definition der  $\xi$ -Funktion, also

$$\xi(s) = H(s)\zeta(s).$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$\xi^{(m+1)}(s) = \sum_{\mu=0}^{m+1} \binom{m+1}{\mu} \zeta^{(\mu)}(s) H^{(m+1-\mu)}(s).$$

Für  $0 \leq \sigma \ll \log L$ ,  $T \leq t \leq T + U$  und  $k \leq k_0$  wissen wir bezüglich der Ableitungen von  $H(s)$  bereits, daß nach Lemma 2.4.3,

$$H^{(k)}(s) = H(s) \left( F(s)^k + R_k \right)$$

mit

$$R_k = O\left(T^{-1}L^{k-2}\right), \tag{4.1.1}$$

und, gemäß Lemma 2.4.2,

$$F(s) = \frac{H'(s)}{H(s)} = L + O\left(T^{-1}\right). \tag{4.1.2}$$

Damit erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
\xi^{(m+1)}(s) &= H(s) \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} \zeta^{(\mu)}(s) F(s)^{m+1-\mu} \\
&\quad + H(s) \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} \zeta^{(\mu)}(s) R_{m+1-\mu} + \frac{d^m}{ds^m} (\zeta'(s) H(s)) \\
&= F(s) \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} \zeta^{(\mu)}(s) H^{(m-\mu)}(s) - H(s) F(s) \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} \zeta^{(\mu)}(s) R_{m-\mu} \\
&\quad + H(s) \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} \zeta^{(\mu)}(s) R_{m+1-\mu} + \frac{d^m}{ds^m} (\zeta'(s) H(s)) \\
&= F(s) \xi^{(m)}(s) + G(s), \tag{4.1.3}
\end{aligned}$$

wobei

$$G(s) = \frac{d^m}{ds^m} (H(s) \zeta'(s)) + H(s) \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} \zeta^{(\mu)}(s) (R_{m+1-\mu} - F(s) R_{m-\mu}). \tag{4.1.4}$$

Andererseits folgt aus der Funktionalgleichung der  $\xi$ -Funktion durch Differenzieren, wenn wir (4.1.3) verwenden,

$$\begin{aligned}
\xi^{(m+1)}(s) &= (-1)^{m+1} \xi^{(m+1)}(1-s) \\
&= -F(1-s) \xi^{(m)}(s) - (-1)^m G(1-s). \tag{4.1.5}
\end{aligned}$$

Setzen wir nun (4.1.3) und (4.1.5) gleich und lösen nach  $\xi^{(m)}(s)$  auf, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\xi^{(m)}(s) &= -\frac{G(s) + (-1)^m G(1-s)}{F(s) + F(1-s)} \\
&= \xi^{(m)}(s) + \frac{G(s)}{F(s) + F(1-s)} + (-1)^m \left( \xi^{(m)}(1-s) + \frac{G(1-s)}{F(s) + F(1-s)} \right)
\end{aligned}$$

und für  $s = \frac{1}{2} + it$  folgt nun

$$\xi^{(m)}\left(\frac{1}{2} + it\right) = \mathcal{Q}_m\left(\frac{1}{2} + it\right) + (-1)^m \overline{\mathcal{Q}_m\left(\frac{1}{2} + it\right)}, \tag{4.1.6}$$

mit

$$\mathcal{Q}_m(s) = \xi^{(m)}(s) + \frac{G(s)}{F(s) + F(1-s)}. \tag{4.1.7}$$

Mit (4.1.6) haben wir also jetzt unser Analogon zur Darstellung (3.1.2) gefunden. Wie in Kapitel 3 ((3.1.3) und (3.1.4)) gilt  $\xi^{(m)}\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0$  genau dann, wenn

$$\text{entweder} \quad \arg \mathcal{Q}_m\left(\frac{1}{2} + it\right) \equiv \begin{cases} 0 & (\text{mod } \pi) & ; & m \text{ ungerade} \\ \pi/2 & (\text{mod } \pi) & ; & m \text{ gerade} \end{cases} \tag{4.1.8}$$

$$\text{oder} \quad \mathcal{Q}_m\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0. \tag{4.1.9}$$

Um nun zusätzlich noch Aussagen über die Einfachheit der Nullstellen von  $\xi^{(m)}(s)$  machen zu können, benötigen wir Informationen über  $\xi^{(m+1)}(s)$ . Wir erhalten aus (4.1.3) und (4.1.7)

$$\xi^{(m+1)}(s) = \mathcal{Q}_m(s)(F(s) + F(1-s)) - \xi^{(m)}(s)F(1-s). \quad (4.1.10)$$

Sei zunächst  $\rho = \frac{1}{2} + it_0$  eine Nullstelle von  $\mathcal{Q}_m(s)$ , sei also (4.1.9) erfüllt. Nach (4.1.6) ist  $\rho$  dann Nullstelle von  $\xi^{(m)}(s)$  und aus (4.1.10) folgt, daß  $\rho$  schließlich auch eine Nullstelle von  $\xi^{(m+1)}(s)$  darstellt.

Im Fall (4.1.9) kann  $\rho$  also keine einfache Nullstelle von  $\xi^{(m)}(s)$  sein.

Liegt dagegen (4.1.8) vor, also  $\xi^{(m)}(\rho) = 0$  mit  $\mathcal{Q}_m(\rho) \neq 0$  für  $\rho = \frac{1}{2} + it_0$ , so folgt aus (4.1.10) und (4.1.2), daß  $\xi^{(m+1)}(\rho) \neq 0$ , falls  $t_0$  hinreichend groß ist.

Im Fall (4.1.8) ist  $\rho$  demnach eine einfache Nullstelle von  $\xi^{(m)}(s)$ .

Zählen wir — wie schon in Kapitel 3 — nur die Häufigkeit des Eintretens von (4.1.8), so wissen wir, daß wir nur einfache Nullstellen betrachten. Aus dem in Kapitel 3 verfolgten Beweisansatz konnten wir keine Gleichung der Art (4.1.10) herleiten, so daß wir dort nicht auf die Einfachheit der Nullstellen schließen konnten.

## 4.2 Rückführung

Offensichtlich müssen wir mit  $\mathcal{Q}_m(s)$  genauso verfahren, wie mit der aus (3.1.1) bekannten Funktion  $Q_m(s)$ . Beide Funktionen erlauben uns durch (4.1.8) beziehungsweise (3.1.3) eine Abschätzung für die Anzahl der Nullstellen von  $\xi^{(m)}(\frac{1}{2} + it)$  herzuleiten.

Wir werden jetzt  $\mathcal{Q}_m(s)$  auf  $Q_m(s)$  zurückführen, so daß wir den Beweis des Kapitels 3 auf  $Q_m(s)$  und somit auf die Betrachtung einfacher Nullstellen anwenden können.

Aus (4.1.2) und aus (4.1.7), der Definition von  $\mathcal{Q}_m(s)$ , erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_m(s) &= \xi^{(m)}(s) + \frac{G(s)}{F(s) + F(1-s)} \\ &= \xi^{(m)}(s) + L^{-1}G(s) + G(s) \cdot O(T^{-1}L^{-2}) \\ &= \mathcal{Q}^{(m)}(s) + \mathcal{F}_m, \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

wobei

$$\mathcal{Q}(s) = \xi(s) + L^{-1}H(s)\zeta'(s) = H(s) \left( \zeta(s) + L^{-1}\zeta'(s) \right), \quad (4.2.2)$$

$$\mathcal{F}_m = G(s) \cdot O \left( T^{-1}L^{-2} \right). \quad (4.2.3)$$

Untersuchen wir  $\mathcal{Q}(s)$  etwas genauer. Aus der Riemann-Siegel-Formel (Lemma 3.1.1) folgt, wenn wir wieder  $\chi(s) = H(1-s)/H(s)$  setzen,

$$\zeta(s) = f_1(s) + \chi(s)f_2(s)$$

und

$$\begin{aligned} \zeta'(s) &= f_1'(s) + \chi(s)f_2'(s) + \chi'(s)f_2(s) \\ &= f_1'(s) + \chi(s)f_2'(s) - \chi(s)(F(s) + F(1-s))f_2(s), \end{aligned}$$

wobei

$$f_1(s) = \int_{0 \setminus 1} \frac{z^{-s} e^{\pi i z^2}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} dz \quad \text{und} \quad f_2(s) = \int_{0 \setminus 1} \frac{z^{s-1} e^{-\pi i z^2}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} dz.$$

Setzen wir dies in (4.2.2) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(s) &= H(s) \left( \zeta(s) + L^{-1} \zeta'(s) \right) \\ &= H(s) \left( f_1(s) + L^{-1} f_1'(s) \right) + H(1-s) \cdot L^{-1} f_2'(s) \\ &\quad + H(1-s) \left( f_2(s) - L^{-1} (F(s) + F(1-s)) f_2(s) \right). \end{aligned}$$

Vergleichen wir dies mit der Funktion  $Q_m(s)$ , die in (3.1.1) definiert wurde. Wählen wir den Spezialfall  $m = 0$  und, wie in Satz 2.2.3 gefordert,

$$\phi(x) = 1 - x,$$

so gilt zum einen  $Q_0^{(m)}(s) = Q_m(s)$  und zum anderen

$$Q_0(s) = H(s) \left( f_1(s) + L^{-1} f_1'(s) \right) + H(1-s) \cdot L^{-1} f_2'(s),$$

da  $f_1'(s) = -L^{-1} f_1(s)$  und  $f_2'(s) = L^{-1} f_2(s)$ .

Wir haben also

$$\mathcal{Q}(s) = Q_0(s) + H(s) \chi(s) f_2(s) \left( 1 - L^{-1} (F(s) + F(1-s)) \right).$$

Nach (4.1.2), Lemma 2.4.4 und Lemma 3.1.2 folgt, ähnlich wie bei der Abschätzung von  $\Sigma_2$  im Abschnitt 3.1.2,

$$\chi(s) f_2(s) \left( 1 - L^{-1} (F(s) + F(1-s)) \right) \ll T^{\varepsilon-1/2-\sigma/2}.$$

Somit haben wir

$$\mathcal{Q}(s) = Q_0(s) + H(s) \cdot O(T^{\varepsilon-1/2-\sigma/2})$$

und unter Verwendung von (4.1.2), (4.2.1) sowie Lemma 2.4.3 folgt für  $\sigma > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_m(s) &= Q^{(m)}(s) + \mathcal{F}_m \\ &= Q_m(s) + O \left( T^{\varepsilon-1/2} |H(s)| + |\mathcal{F}_m| \right). \end{aligned}$$

Genau wie im Abschnitt 3.1.1 müssen wir analog zu  $V(s) = Q_m(s)/H(s)$  die Funktion

$$\mathcal{V}(s) = \frac{\mathcal{Q}_m(s)}{H(s)} = V(s) + O \left( T^{\varepsilon-1/2} + \left| \frac{\mathcal{F}_m}{H(s)} \right| \right)$$

betrachten. Wenn wir gezeigt haben, daß dieser Fehlerterm keinen entscheidenden Einfluß besitzt, können wir die Berechnungen des Kapitels 3 bezüglich  $V(s)$  auf  $\mathcal{V}(s)$  übertragen. Da wir hier den Spezialfall  $\phi(x) = 1 - x$  vorliegen haben, wäre Satz 2.2.3 damit bewiesen.

Wir schätzen also  $\mathcal{F}_m/H(s)$  ab. Aus (4.2.3), (4.1.4), (4.1.2) und (4.1.1) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_m}{H(s)} &\ll T^{-1}L^{-2} \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} |\zeta^{(\mu+1)}(s)| \cdot |F(s)^{m-\mu} + R_{m-\mu}| \\ &\quad + L^{-1} \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} |\zeta^{(\mu)}(s)| \cdot |R_{m+1-\mu} + F(s)R_{m-\mu}| \\ &\ll \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} T^{-1}L^{m-\mu-2} \left| \zeta^{(\mu+1)}(s) + \zeta^{(\mu)}(s) \right|. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Zur Abschätzung von  $\zeta^{(k)}(s)$  benötigen wir noch das folgende Lemma, das im Anhang A bewiesen wird.

**Lemma 4.2.1** *Für  $\sigma \geq \sigma_0 > 0$ ,  $|t| > t_0$  und  $k < k_0$  gilt*

$$\zeta^{(k)}(s) = O_{k_0, \sigma_0, t_0}(|t|^{1/2}).$$

Unter Verwendung dieses Satzes folgt jetzt aus (4.2.4)

$$\frac{\mathcal{F}_m}{H(s)} \ll T^{\varepsilon-1/2}$$

und insgesamt haben wir

$$\mathcal{V}(s) = V(s) + O(T^{\varepsilon-1/2}).$$

Nach (3.1.10) ist

$$V(s) = C(s) + \chi(s)D(s) + O(T^{\varepsilon-\sigma/2})$$

und demnach

$$\mathcal{V}(s) = C(s) + \chi(s)D(s) + O(T^{\varepsilon-\sigma/2} + T^{\varepsilon-1/2}).$$

Dieser Fehlerterm ist unproblematisch, da die  $V(s)$  betreffenden Abschätzungen des 3. Kapitels (z.B. (3.1.13)) auch mit dem zusätzlich zu addierenden Term  $O(T^{\varepsilon-1/2})$  zu den gleichen Resultaten führen. Der Beweis von Satz 2.2.1 läßt sich daher beginnend mit Abschnitt 3.1.3 wörtlich auf  $\mathcal{V}(s)$  an Stelle von  $V(s)$  übertragen, diese Rechnungen beweisen im Fall  $\phi(x) = 1 - x$  in Anbetracht der obigen Überlegungen also auch Satz 2.2.3.  $\square$

## 4.3 Numerische Berechnungen II

Das Programm, mit dem die Werte des Korollars 2.2.4 bestimmt wurden, entspricht im wesentlichen dem in Anhang B abgedruckten Programm, auf das wir am Ende von Kapitel 3 bereits eingegangen sind.

Da die untere Schranke für  $\alpha_m^{(1)}$  aus Satz 2.2.3 ein Spezialfall der analogen Formel aus Satz 2.2.1 ist, ist klar, daß die Berechnung der Schranken für  $\alpha_m^{(1)}$  auf die gleiche Art erfolgen kann, wie im allgemeineren Fall. Da die Funktion  $\phi(x)$  jetzt sogar eindeutig bestimmt ist und somit nicht mehr durch Optimierung gefunden werden muß, ist das Programm, mit dem wir nun arbeiten können, sogar einfacher.

Berechnungen wurden für  $m = 0, \dots, 18$  durchgeführt. In Korollar 2.2.4 wurden zum Vergleich mit Korollar 2.2.2 nur die ersten zehn Werte angegeben aber in Tabelle 4.1 sind sämtliche berechneten Schranken sowie die jeweilige Wahl von  $R$  aufgeführt.

$m$	$\alpha_m^{(1)} >$	$R$	$m$	$\alpha_m^{(1)} >$	$R$	$m$	$\alpha_m^{(1)} >$	$R$
0	.34856712	1.2928420	7	.99259583	.67283815	13	.99764878	.65983164
1	.78696702	.89787039	8	.99419588	.66962342	14	.99795621	.65858589
2	.93162261	.74929814	9	.99532667	.66698013	15	.99820698	.65748225
3	.96670040	.70644933	10	.99615572	.66476330	16	.99841422	.65649767
4	.97994591	.69036385	11	.99678178	.66287588	17	.99858747	.65561383
5	.98646920	.68222335	12	.99726621	.66124889	18	.99873378	.65481605
6	.99022238	.67686763						

Tabelle 4.1: Abschätzung von  $\alpha_m^{(1)}$ 

#### 4.4 Beweis der Korollare

Noch unbewiesen sind die beiden letzten Korollare aus Kapitel 2. Zuerst wollen wir Korollar 2.2.5 zeigen, also die Beziehung

$$1 \geq \alpha_m \geq \alpha_m^{(1)} = 1 + O(m^{-2}).$$

##### Beweis von Korollar 2.2.5 :

Die “ $\geq$ ”-Relationen sind trivial, bevor wir aber  $\alpha_m^{(1)} = 1 + O(m^{-2})$  beweisen, zeigen wir, daß für eine auf  $[0, 1]$  zweimal stetig differenzierbare Funktionen  $f$  gilt :

$$\int_0^1 f(x)(1-2x)^n dx = \frac{(-1)^n f(1) + f(0)}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n f'(1) + f'(0)}{4(n+1)(n+2)} + O\left(\frac{M}{n^3}\right), \quad (4.4.1)$$

wobei  $M = \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)|$ .

Durch zweimalige partielle Integration folgt nämlich

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)(1-2x)^n dx &= \frac{(-1)^n f(1) + f(0)}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n f'(1) + f'(0)}{4(n+1)(n+2)} \\ &\quad + \frac{1}{4(n+1)(n+2)} \int_0^1 f''(x)(1-2x)^{n+2} dx. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\left| \int_0^1 f''(x)(1-2x)^{n+2} dx \right| \leq M \cdot \int_0^1 |1-2x|^{n+2} dx = \frac{M}{n+3}$$

und somit folgt (4.4.1).

Der Einfachheit halber betrachten wir nun in Satz 2.2.3 den Fall  $R = 1$ . Für  $m \geq 1$  gilt, wenn wir in (4.4.1)  $f(x) = e^{2x}(1-x)^2$  und  $n = 2m$  setzen, und die Bezeichnungen von Satz 2.2.1 beibehalten,

$$\Psi = \int_0^1 e^{2x}(1-x)^2(1-2x)^{2m} dx = \frac{1}{2(2m+1)} + O\left(\frac{M}{m^3}\right).$$

Es ist  $M = \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)| = 4e^2 \ll 1$ , also nach Polynomdivision

$$\Psi = \frac{1}{4m} - \frac{1}{8m^2} + O(m^{-3}).$$

Analog berechnen wir  $\Psi'$ . Hier müssen wir  $n = 2m - 2$  wählen, sowie

$$f(x) = e^{2x}((2m+2)x - 2m - 1)^2.$$

Damit erhalten wir  $M = 32m e^2 + 8m^2 e^2 + 28e^2 \ll m^2$  und

$$\Psi' = \frac{4m^2 + 4m + 1}{4m - 2} + O(m^{-1}) = m + \frac{3}{2} + O(m^{-1}).$$

Damit können wir nun  $\Lambda$  abschätzen. Da wir  $\phi(x) = 1 - x$  und  $R = 1$  betrachten, ist

$$\Lambda^2 = \frac{\Psi' - 1 - \Psi}{4\Psi} = 4m^2 + 4m + O(1) \gg m^2$$

und folglich

$$\coth \Lambda = \frac{e^{2\Lambda} + 1}{e^{2\Lambda} - 1} = 1 + O(e^{-2m}).$$

Insgesamt ist nun

$$F_m(\phi, 1) = \frac{1}{2} + 2\Psi\Lambda \coth \Lambda = 1 + O(m^{-2}),$$

also

$$\alpha_m^{(1)} \geq 1 - \log F_m(\phi, 1) = 1 + O(m^{-2}),$$

womit Korollar 2.2.5 bewiesen ist. □

Zuletzt müssen wir als weitere Folgerung noch Korollar 2.2.6 beweisen, also die Behauptung

$$\beta_m = O(m^{-2}),$$

wobei  $\beta_m$  den Anteil der Nullstellen von  $\zeta(s)$  mit Vielfachheit  $\geq m$  bezeichnet.

**Beweis von Korollar 2.2.6 :**

Sei  $s = \frac{1}{2} + it$  eine mindestens  $m$ -fache Nullstelle von  $\zeta(s)$ . Dann ist nach der Definition der  $\xi$ -Funktion  $s$  auch eine Nullstelle von  $\xi(s)$  mit der gleichen Vielfachheit und mithin stellt  $s$  eine mindestens doppelte Nullstelle von  $\xi^{(m-2)}(s)$  dar. Der Anteil dieser Nullstellen ist nach Korollar 2.2.5 aber höchstens  $O((m-2)^2) = O(m^{-2})$ , womit die Behauptung bewiesen wäre. □



## Kapitel 5

# Weitere Resultate, Ausblick

### 5.1 Verlängerung der glättenden Funktion

Die in den vorhergehenden Kapiteln gezeigten Abschätzungen für  $\alpha_m$  und  $\alpha_m^{(1)}$  sind für  $m = 0$  nicht die größten bis heute bekannten unteren Schranken. In [Con89] zeigt Conrey, wie bereits in den Kapiteln 1 und 2 erwähnt,

$$\alpha_0 > 0.4088 \quad \text{und} \quad \alpha_0^{(1)} > 0.4013 \quad .$$

Conrey wählte als glättende Funktion

$$\psi(s) = \sum_{n \leq y} \frac{b(n)}{n^s} \quad \text{mit} \quad y = T^\theta$$

und mit den gleichen Koeffizienten  $b(n)$ , wie wir in (3.4.5). Statt aber  $\theta = \frac{1}{2} - \varepsilon$  zu verwenden, wählte er  $\theta = \frac{4}{7} - \varepsilon$ , wodurch er zu den oben genannten Verbesserungen gelangte. Leider ist diese ‘‘Verlängerung’’ der glättenden Funktion mit nicht unerheblichen Schwierigkeiten verbunden. Das Problem besteht im wesentlichen darin, eine asymptotische Formel für Integrale der Form (vgl. (3.1.22))

$$I = \int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \psi\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt \quad (5.1.1)$$

zu finden, wobei allgemein  $\psi(s)$  ein Dirichletpolynom der Länge  $y = T^\theta$  darstellt.

Um  $\theta = \frac{4}{7} - \varepsilon$  verwenden zu können, wird in [Con89] neben den Techniken, die wir in Kapitel 3 angewandt haben, vor allem auf zwei weitere Arbeiten zurückgegriffen, die eine asymptotische Darstellung von  $I$  erlauben :

Zum einen bauen große Teile der Rechnungen auf den Methoden aus [BCHB85] auf, wo Balasubramanian, Conrey und Heath-Brown für  $b(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon$  zeigen, daß

$$I = T \sum_{n, m \leq y} \frac{b(n) \overline{b(m)}}{n \cdot m} (n, m) \left( \log \frac{T \cdot (n, m)^2}{2\pi nm} + 2\gamma - 1 \right) + o(T),$$

allgemein für  $y = T^{1/2-\varepsilon}$  und, unter Annahme von Hooleys  $R^*$ -Vermutung ([Hoo78, §8]), für  $y = T^{4/7-\varepsilon}$ .

Zum anderen benötigt Conrey ein Ergebniss über unvollständige Kloosterman-Summen, das Deshouillers und Iwaniec in [DI84, Lemma 1], aufbauend auf ihrer Arbeit [DI82], beweisen. In [DI84] gelingt es den beiden Autoren damit, eine Asymptotik für ähnliche Integrale wie  $I$  auch ohne Annahme der  $R^*$ -Vermutung für  $\theta = \frac{4}{7} - \varepsilon$  herzuleiten.

Um den Satz, aus dem Conrey die genannten Schranken berechnete, mit unseren Ergebnissen, die  $\theta = \frac{1}{2} - \varepsilon$  verwenden, vergleichen zu können, formulieren wir nun das Resultat aus [Con89] in einer Form, die ähnlich zu unseren Sätzen 2.2.1 und 2.2.3 ist.

**Satz 5.1.1** *Seien  $R > 0$  und  $\theta < \frac{4}{7}$  reelle Konstanten und  $\phi$  eine stetig differenzierbare Funktion mit  $\phi(0) = 1$  und  $\phi'(x) = \phi'(1-x)$ . Sei weiter*

$$\begin{aligned}\Psi &= \int_0^1 e^{2Rx} \phi^2(x) dx, \\ \Psi' &= \int_0^1 e^{2Rx} (R\phi(x) + \phi'(x))^2 dx \quad \text{und} \\ \Lambda &= \left( \frac{\theta^2 \Psi'}{\Psi} \right)^{1/2}\end{aligned}$$

und sei schließlich

$$F(\phi, R) = \frac{1}{2}(e^{2R}\phi^2(1) + 1) + \theta^{-1}\Psi\Lambda \coth \Lambda.$$

Dann gilt

$$\alpha_0 \geq 1 - \frac{\log F(\phi, R)}{R}$$

und, falls  $\phi(x) = 1 + cx$ ,

$$\alpha_0^{(1)} \geq 1 - \frac{\log F(\phi, R)}{R}.$$

Setzen wir hier  $\theta = \frac{1}{2}$ , so erhalten wir (fast) unsere Sätze aus Kapitel 2.

Aufgrund dieser Ähnlichkeit ist es leicht, das Programm SUCHEO (Anhang B) so zu modifizieren, daß untere Schranken für  $\alpha_0$  und  $\alpha_0^{(1)}$  gemäß Satz 5.1.1 berechnet werden können. Tatsächlich war es damit möglich, Conreys Resultate weiter zu verbessern. Mit den in Tabelle 5.1 ange-

gebenen Werten für  $R$  und  $\phi(x) = \beta_0 + \sum_{\nu=1}^d \beta_\nu (1-2x)^{2\nu-1}$  folgt

$$\alpha_0 > 0.408959 \quad \text{und} \quad \alpha_0^{(1)} > 0.402193 \quad .$$

	$\alpha_0 > 0.40895932$	$\alpha_0^{(1)} > 0.40219321$
$R$	1.2915859	1.1316946
$\beta_1$	.62309877	.51400424
$\beta_2$	-.17708888	
$\beta_3$	.087202732	
$\beta_4$	-.032568894	
$\beta_5$	.0066857637	

Tabelle 5.1: Abschätzungen gemäß Satz 5.1.1

## 5.2 Hypothetische Abschätzungen

Die Autoren von [BCHB85] konnten zeigen, daß ihre asymptotische Formel für  $\theta > 1$  nicht mehr gültig ist, bestenfalls wäre also die Wahl  $\theta = 1$  möglich. Nehmen wir an, Satz 5.1.1 gelte für  $\theta = 1$ , so wäre, wie numerische Berechnungen mit einer Modifikation des Programms aus Anhang B zeigen,

$$\alpha_0 > 0.588407 \quad \text{und} \quad \alpha_0^{(1)} > 0.586572 \quad . \quad (5.2.1)$$

Da die hier verwendeten Koeffizienten  $b(n)$  der glättenden Funktion bereits in einer sehr allgemeinen Form gehalten sind (vgl. (3.4.5)), ist es vermutlich nicht zu erwarten, daß diese Abschätzungen ohne Hinzunahme gänzlich neuer Ideen, wesentlich verbessert werden können. Weitere Resultate wurden bislang nur unter Annahme der Riemannschen Vermutung erzielt. Diese setzen wir nun voraus. Bezüglich  $\alpha_0$  ergibt sich dann trivialerweise

$$\alpha_0 = 1 \quad ,$$

aber auch in Hinsicht auf  $\alpha_0^{(1)}$  erlaubt Riemanns Hypothese weitere Aussagen. So zeigte beispielsweise Montgomery in [Mon72, Cor. 2]

$$\alpha_0^{(1)} \geq \frac{2}{3}$$

und unter der zusätzlichen Annahme seiner *“pair correlation conjecture”* ([Mon72, (12)]) folgt, daß fast alle Nullstellen von  $\zeta(s)$  einfach sind, also

$$\alpha_0^{(1)} = 1 \quad .$$

## 5.3 Ausblick

Weitere Verbesserungen der in der vorliegenden Arbeit berechneten numerischen Werte hängen sicherlich in entscheidendem Maße vom Fortschritt ab, der bei der Untersuchung von Integralen der Form (5.1.1) erreicht wird.

Wie (5.2.1) zeigt, ist es dagegen unwahrscheinlich, daß weitere Verfeinerungen von Levinsons Beweis zu  $\alpha_0 = 1$  führen können. Der Grund liegt wohl vor allem in der Abschätzung mittels

Jensens Ungleichung (Abschnitt 3.1.4). Daß hierbei tatsächlich Ungenauigkeiten auftreten, zeigt der unterschiedliche Erfolg, der mit den diversen glättenden Funktionen erzielt werden kann (vgl. Kapitel 1 und die Bemerkungen nach (3.1.22)).

Eventuell ist jedoch die Übertragung von Levinsons Methode auf die Nullstellen anderer Dirichletreihen möglich, die ähnliche Eigenschaften besitzen, wie die  $\zeta$ -Funktion sie aufweist. Kandidaten für derartige Funktionen sind Dirichletreihen, die gewissen Spitzenformen zugeordnet sind.

Betrachten wir dazu, ohne jetzt auf die näheren Einzelheiten einzugehen, eine *ganze Modulform*  $F$  vom Gewicht  $k$ , also eine in der oberen komplexen Halbebene holomorphe Funktion  $F$  mit

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k F(z),$$

wobei  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  mit  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$  und wobei  $k$  eine gerade Zahl  $\geq 4$  darstellt. Eine solche Abbildung besitzt eine Fourierreiheentwicklung der Gestalt

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{2\pi i n z}.$$

Gilt  $f(0) = 0$ , so heißt  $F$  *Spitzenform*.

Sei nun  $F$  eine derartige Spitzenform mit  $f(1) = 1$  und sei  $F$  Eigenfunktion aller Hecke-Operatoren (vgl. [Apo76, §6.11]). Die Koeffizienten  $f(n)$  stellen dann eine multiplikative Funktion dar und wir bilden die Dirichletreihe

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Das Euler-Produkt dieser Reihe ist ([Haf83, (1.2)])

$$L_f(s) = \prod_p \left(1 - f(p)p^{-s} + p^{k-1-2s}\right)^{-1}.$$

Hecke zeigt in [Hec37], daß  $L_f(s)$  für  $\sigma > \frac{k+1}{2}$  absolut konvergiert und sich zu einer ganzen Funktion fortsetzen läßt, die der Funktionalgleichung

$$\xi_f(s) = (-1)^{k/2} \xi_f(k-s)$$

mit

$$\xi_f(s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L_f(s)$$

genügt.

Ähnlich wie  $\zeta(s)$  hat  $L_f(s)$  triviale Nullstellen an den negativen ganzen Zahlen und sämtliche nicht-triviale Nullstellen liegen im Streifen  $\frac{k-1}{2} < \sigma < \frac{k+1}{2}$ . Die kritische Gerade ist hier also die Gerade mit  $\sigma = \frac{k}{2}$ .

Bezeichnen wir mit  $N(L_f, T)$  und  $N_*(L_f, T)$ , analog zu  $N(T)$  und  $N_*(T)$ , die Anzahl der Nullstellen von  $L_f(s)$  im kritischen Streifen beziehungsweise auf der kritischen Geraden.

In seiner Dissertation [Lek55] zeigte Lekkerkerker für  $T \rightarrow \infty$

$$N(L_f, T) \sim c_1 T \log T$$

und

$$N_*(L_f, T) > c_2 T.$$

In [Haf83] konnte Hafner dann schließlich das Analogon zu Selbergs Resultat bezüglich der Nullstellen von  $\zeta(s)$  zeigen. Er bewies für  $T > T_0(f)$

$$N_*(L_f, T) > \alpha_f T \log T$$

mit einer positiven Konstante  $\alpha_f$ , deren Wert Hafner nicht berechnete.

Hafners Beweis baut auf Selbergs Methoden auf. Sollte es möglich sein,  $\alpha_f$  nach unten abzuschätzen, indem Levinsons Beweis auf die Reihen  $L_f(s)$  übertragen wird, so wäre dies sicherlich mit erheblichen technischen Schwierigkeiten verbunden. Wie Bombieri in [Bom76] bemerkt, ist die Existenz eines Euler-Produkts notwendig für die Existenz einer “guten” glättenden Funktion, wie sie auch von Hafner benötigt wird. Zur Abschätzung von  $\alpha_f$  ist dies allein aber wohl kaum ausreichend.



# Anhang A

## Hilfssätze

In diesem Anhang wollen wir nun die Beweise der Lemmata nachtragen, die in den vorhergehenden Kapiteln verwendet, dort aber nicht gezeigt worden sind.

### A.1 Beweis von Lemma 2.1.1

**Lemma 2.1.1** *Sämtliche Nullstellen von  $\xi^{(m)}(s)$  liegen im kritischen Streifen  $0 < \sigma < 1$ . Sie liegen symmetrisch zu  $\sigma = \frac{1}{2}$  und symmetrisch zu  $t = 0$ . Für  $m \geq 0$  gilt*

$$N^{(m)}(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O_m(\log T).$$

Dieser Satz ist offensichtlich von zentraler Bedeutung für die vorliegende Arbeit. Zum Beweis benötigen wir zwei weitere Hilfssätze. Der erste stammt aus [Pra78, Anhang, S. 5.2].

**Lemma A.1.1** *Sei  $f(s)$  holomorph im Kreis  $|s - s_0| \leq R$  mit  $f(s_0) \neq 0$  und mit (mindestens)  $n$  Nullstellen im Kreis  $|s - s_0| \leq r$ , wobei  $r < R$ .*

*Dann gilt*

$$\left(\frac{R}{r}\right)^n \leq \frac{M}{|f(s_0)|},$$

wobei  $M = \sup_{|s-s_0|=R} |f(s)|$ .

Unser zweiter Hilfssatz ist der Produktsatz von Hadamard. Dazu führen wir zunächst einige Begriffe aus der Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung ein (vgl. [Pra78, Anhang, §5]).

**Definition A.1.2** *Sei  $f(s)$  eine ganze Funktion.  $f(s)$  heißt von endlicher Ordnung, wenn es Werte  $a > 0$  gibt mit*

$$\sup_{|s|=r} |f(s)| < \exp(r^a) \quad \text{für } r > r_0(a).$$

*Die größte untere Schranke dieser  $a$  heißt die Ordnung von  $f(s)$ .*

**Definition A.1.3** Sei  $\{s_n\}$  eine Folge komplexer Zahlen mit  $0 < |s_1| \leq |s_2| \leq \dots$ . Die größte untere Schranke der  $b > 0$ , für die gilt

$$\sum_n |s_n|^{-b} < \infty$$

heißt Konvergenzexponent der Folge  $\{s_n\}$ .

**Lemma A.1.4** Jede ganze Funktion  $f(s)$  der endlichen Ordnung  $\alpha$  mit  $f(0) \neq 0$  ist in der Form

$$f(s) = e^{g(s)} P(s)$$

darstellbar mit

$$P(s) = \prod_n \left(1 - \frac{s}{s_n}\right) \exp\left(\frac{s}{s_n} + \dots + \frac{1}{p} \left(\frac{s}{s_n}\right)^p\right).$$

Dabei durchläuft  $s_n$  alle Nullstellen von  $f$ , nach der Größe ihres Absolutbetrages geordnet, und  $p$  bezeichnet die kleinste nicht negative ganze Zahl mit  $\sum |s_n|^{-(p+1)} < \infty$ .  $g(s)$  ist ein Polynom vom Grad  $\leq \alpha$ . Wenn  $\beta$  den Konvergenzexponenten der Folge  $\{s_n\}$  bezeichnet, so gilt  $\alpha = \max\{\deg g, \beta\}$ .

Wir kommen nun zum Beweis von Lemma 2.1.1.

**Beweis von Lemma 2.1.1 :**

Zuerst zeigen wir das behauptete Symmetrieverhalten der Nullstellen von  $\xi^{(m)}(s)$ . Wegen  $\xi^{(m)}(s) = \xi^{(m)}(\bar{s})$  ist die Symmetrie zur reellen Achse klar. Aus der Funktionalgleichung für  $\xi(s)$  folgt durch Differentiation

$$\xi^{(m)}(s) = (-1)^m \xi^{(m)}(1-s) \quad (\text{A.1.1})$$

und daher ist mit  $\rho$  auch  $1 - \rho$  Nullstelle von  $\xi^{(m)}$ . Die Symmetrie zu  $t = 0$  liefert nun die Symmetrie zu  $\sigma = \frac{1}{2}$ .

Mittels vollständiger Induktion zeigen wir nun, daß alle Nullstellen im Streifen  $0 < \sigma < 1$  liegen. Für  $\xi(s)$  ist die Behauptung bekannt und wir nehmen nun an, daß sie für  $\xi^{(m)}$  gilt. Aus (A.1.1) folgt

$$\xi^{(m)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{für ungerades } m. \quad (\text{A.1.2})$$

Sei  $\frac{1}{2}$   $n$ -fache Nullstelle von  $\xi^{(m)}$ , also

$$\xi^{(m+n)}\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0 \quad \text{für } m \geq 0. \quad (\text{A.1.3})$$

Die Funktion  $\xi^{(m)}(1/2 + is) s^{-n}$  ist daher ganz und hat keine Nullstelle im Punkt  $s = 0$ . Sei

$$\xi^{(m)}(1/2 + is) s^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$$

die zugehörige Potenzreihe. Aufgrund von (A.1.1) handelt es sich um eine gerade Funktion, weil wegen (A.1.3) und (A.1.2)  $n$  genau dann ungerade ist, wenn  $m$  ungerade ist. Für die

Koeffizienten der Potenzreihe gilt deshalb  $a_{2k+1} = 0$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$  und somit ist die Funktion

$$\Xi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} s^k$$

ebenfalls ganz und es gilt

$$\Xi(s^2) = \xi^{(m)}(1/2 + is) s^{-n}. \quad (\text{A.1.4})$$

Nach unseren obigen Überlegungen ist  $\Xi(0) \neq 0$ . Da  $\xi(s)$  und somit auch  $\xi^{(m)}(s)$  Ordnung 1 haben, hat nach (A.1.4)  $\Xi(s)$  die Ordnung  $\frac{1}{2}$ .

Bezeichnen wir die Nullstellen von  $\Xi$  mit  $\alpha$ . Dann gilt, wenn wir die  $\alpha$  nach steigendem Betrag sortieren, wegen Lemma A.1.4

$$\Xi(s) = e^A \prod_{\alpha} \left(1 - \frac{s}{\alpha}\right),$$

mit einer Konstanten  $A$ . Da  $\Xi$  Ordnung  $\frac{1}{2} = \max\{\beta, \deg g\}$  hat, ist nämlich der Konvergenzexponent  $\beta$  der Folge  $\{\alpha\}$  höchstens  $\frac{1}{2}$ , also gilt  $p = 0$ . Aus dem gleichen Grund ist auch  $\deg g = 0$ , also  $g(s) = A$ . Logarithmische Differentiation liefert nun

$$\frac{\Xi'(s)}{\Xi(s)} = \sum_{\alpha} \frac{1}{s - \alpha}.$$

Aus (A.1.4) folgt

$$\xi^{(m)}(1/2 + is) = \Xi(s^2) s^n \quad (\text{A.1.5})$$

und hieraus erhalten wir

$$\frac{i \xi^{(m+1)}(1/2 + is)}{\xi^{(m)}(1/2 + is)} = 2s \frac{\Xi'(s^2)}{\Xi(s^2)} + \frac{n}{s} = s \left( \sum_{\alpha} \frac{2}{s^2 - \alpha} + \frac{n}{s^2} \right). \quad (\text{A.1.6})$$

Bezeichnen wir nun mit  $\rho$  die Nullstellen von  $\xi^{(m)}(s)$ . Unsere Induktionsannahme sagt, daß alle  $\rho$  im Gebiet

$$\mathcal{S} = \{s : 0 < \sigma < 1\}$$

liegen, die nach (A.1.5) entsprechenden Nullstellen von  $\Xi(s)$  müssen nun im Gebiet

$$\mathcal{P} = \left\{s : \sigma > t^2 - \frac{1}{4}\right\}$$

liegen, denn die Abbildung  $s \mapsto -(s - 1/2)^2$  bildet  $\mathcal{S}$  auf  $\mathcal{P}$  ab.

Aus (A.1.6) und unserer Induktionsannahme sehen wir, daß alle Nullstellen von  $\xi^{(m+1)}(s)$  im Streifen  $\mathcal{S}$  liegen, wenn alle Nullstellen von

$$\sum_{\alpha} \frac{2}{s - \alpha} + \frac{n}{s} = \sum_{\beta} \frac{1}{s - \beta} = \sum_{\beta} \frac{\overline{s - \beta}}{|s - \beta|^2}$$

in  $\mathcal{P}$  liegen. Die  $\beta$  sind dabei gewisse, nicht notwendig voneinander verschiedene Werte, die wegen  $0 \in \mathcal{P}$  alle in  $\mathcal{P}$  liegen. Aufgrund der Gestalt von  $\mathcal{P}$  sind diese  $\beta$  allesamt in genau einer

Halbebene der komplexen Zahlen zu finden. Sei nun  $s \notin \mathcal{P}$  fest gewählt. Dann liegen die Punkte  $s - \beta$  und folglich auch die Punkte  $\frac{s-\beta}{|s-\beta|^2}$  sämtlich in einer Halbebene, die den Nullpunkt nicht enthält. Die Summe dieser Werte kann daher nicht Null ergeben und wir haben gezeigt, daß  $\xi^{(m+1)}(s) \neq 0$  für  $s \notin \mathcal{S}$ , was zu beweisen war.

Als letztes bleibt die asymptotische Formel für  $N^{(m)}(T)$  zu zeigen. Sei dazu  $\mathcal{E}$  das Rechteck mit den Ecken  $-2 \pm iT$  und  $3 \pm iT$ . OBdA liege keine Nullstelle von  $\xi^{(m)}(s)$  auf  $\mathcal{E}$ . Die Anzahl der Nullstellen innerhalb von  $\mathcal{E}$  ist aufgrund ihrer Symmetrie

$$2N^{(m)}(T) + O(1).$$

Der Summand  $O(1)$  tritt auf, da eine eventuelle Nullstelle in  $s = \frac{1}{2}$  im Term  $2N^{(m)}(t)$  doppelt gezählt würde.

Nach dem Argumentprinzip ist also

$$\Delta \arg \xi^{(m)}(s) \Big|_{\mathcal{E}} = 4\pi N^{(m)}(T) + O(1).$$

Sei  $\Gamma$  der Weg längs der geraden Strecken von 3 nach  $3 + iT$  und dann nach  $\frac{1}{2} + iT$ . Wegen  $\overline{\xi^{(m)}(s)} = \xi^{(m)}(\bar{s})$  und (A.1.1) folgt nun

$$\Delta \arg \xi^{(m)}(s) \Big|_{\Gamma} = \pi N^{(m)}(T) + O(1).$$

Wir müssen also das Argument von  $\xi^{(m)}(s)$  auf  $\Gamma$  bestimmen.

Wie wir im Beweis von Lemma 2.4.3 gesehen haben, gilt

$$H^{(k)}(s) = H(s) \left( F(s)^k + R_k(s) \right)$$

und aus  $\xi(s) = H(s)\zeta(s)$  folgt damit

$$\xi^{(m)}(s) = \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} H^{(m-\mu)}(s) \zeta^{(\mu)}(s) = H(s) F(s)^m G(s), \quad (\text{A.1.7})$$

wobei

$$G(s) = \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} \zeta^{(\mu)}(s) (F(s)^{-\mu} + R_{m-\mu}(s) F(s)^{-m}). \quad (\text{A.1.8})$$

Nach unserer Definition des Arguments von  $H$  und wegen Lemma 2.4.1 ist

$$\Delta \arg H(s) \Big|_{\Gamma} = \frac{T}{2} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2} + O(1) \quad (\text{A.1.9})$$

und nach Lemma 2.4.2

$$\Delta \arg F(s)^m \Big|_{\Gamma} = m \arctan \frac{\frac{\pi}{2} + O(T^{-1})}{\log \left| \frac{1/2 + iT}{2\pi} \right| + O(T^{-1})} = O_m \left( \frac{1}{\log T} \right). \quad (\text{A.1.10})$$

Betrachten wir die Summe (A.1.8). Nach Lemma 2.4.3 haben wir

$$R_k(s) \ll |t|^{-1} (\log |t|)^{k-2} \quad \text{für } 0 \leq \sigma \leq 6 \text{ und } |t| > t_0$$

und nach Lemma 2.4.2 ist

$$\frac{1}{F(s)} \ll \frac{1}{\log |t|} \quad \text{für } 0 \leq \sigma \leq 6 \text{ und } |t| > t_0.$$

Schließlich ist für  $\mu \leq m$

$$\left| \zeta^{(\mu)}(3+it) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^\mu}{n^3} \ll_m 1.$$

Insgesamt ergibt sich auf dem vertikalen Teil von , für  $t > t_0$

$$\begin{aligned} G(3+it) &= \zeta(3+it) (1 + R_m(3+it)F(3+it)^{-m}) + O_m(\log^{-1} t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3-it} + O_m(\log^{-1} t), \end{aligned}$$

also nach (3.1.12) für  $|t| > t_0$

$$|G(3+it) - 1| \leq \sum_{n=2}^{\infty} n^{-3} + O_m(\log^{-1} |t|) < \frac{1}{2}. \quad (\text{A.1.11})$$

Folglich ist

$$\Delta \arg G(3+it) \Big|_{t_0}^T < \pi$$

und demnach

$$\Delta \arg G(3+it) \Big|_0^T = \Delta \arg G(3+it) \Big|_0^{t_0} + \Delta \arg G(3+it) \Big|_{t_0}^T < O(1) + \pi = O(1).$$

Die Abschätzung auf dem horizontalen Teil von , ist etwas komplizierter. Nach Lemma 4.2.1 ist

$$\zeta^{(\mu)}(s) \ll |t|^{1/2} \quad \text{für } \frac{1}{4} \leq \sigma \leq 6, |t| > t_0 \text{ und } \mu \leq m.$$

Wir haben also

$$G(s) = O_m(|t|^{1/2}) \quad \text{für } \frac{1}{4} \leq \sigma \leq 6 \text{ und } |t| > t_0. \quad (\text{A.1.12})$$

Verändert sich das Argument von  $G(\sigma + iT)$  um den Wert  $\pi$ , so muß dabei mindestens einmal  $\operatorname{Re} G(\sigma + iT) = 0$  gelten. Wegen  $\overline{G(s)} = G(\bar{s})$  ist somit  $\operatorname{Re} G(\sigma + iT) = \frac{1}{2}(G(\sigma + iT) + G(\sigma - iT))$ , also

$$\begin{aligned} \Delta \arg G(\sigma + iT) \Big|_3^{1/2} &\leq \pi \cdot \# \left\{ \sigma \in \left[ \frac{1}{2}, 3 \right] : \operatorname{Re} G(\sigma + iT) = 0 \right\} + O(1) \\ &\leq \pi \cdot \# \left\{ s : |s - 3| \leq \frac{10}{4}; G(s + iT) + G(s - iT) = 0 \right\} + O(1). \end{aligned} \quad (\text{A.1.13})$$

Gesucht ist also die Zahl  $N$  der Nullstellen  $\rho_1, \dots, \rho_N$  von  $G(s + iT) + G(s - iT)$  in  $|s - 3| \leq \frac{10}{4}$ . Nach (A.1.11) ist

$$|G(3+iT) + G(3-iT)| = |2 \operatorname{Re} G(3+iT)| \geq 1,$$

speziell also  $G(3+iT) + G(3-iT) \neq 0$  und wir können Lemma A.1.1 mit  $r = \frac{10}{4}$  und  $R = \frac{11}{4}$  anwenden. Es folgt

$$\left( \frac{11}{10} \right)^N \leq \frac{M}{|G(3+iT) + G(3-iT)|} \leq M,$$

wobei  $M = \sup_{|s-3|=11/4} |G(s+iT) + G(s-iT)|$ . (A.1.12) liefert uns  $M \ll T^{1/2}$  und wir erhalten

$$N \leq \frac{\log M}{\log \frac{11}{10}} \ll \log T.$$

Aus (A.1.13) folgt

$$\Delta \arg G(\sigma + iT)|_3^{1/2} = O(\log T)$$

und insgesamt auf dem gesamten Weg ,

$$\Delta \arg G(s)|_\Gamma = O(\log T).$$

Deshalb und wegen (A.1.7), (A.1.9) und (A.1.10) ist

$$\Delta \arg \xi^{(m)}(s)|_\Gamma = \frac{T}{2} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2} + O(\log T),$$

also

$$N^{(m)}(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T).$$

□

## A.2 Beweis von Lemma 3.1.2

**Lemma 3.1.2** Sei  $h(z)$  analytisch in der entlang der negativen reellen Achse geschlitzten Ebene mit

$$h(z) \ll |\log z|^j \quad \text{für } |z| > 10 \text{ und geeignetes } j > 0.$$

Sei weiter  $|\sigma| \leq C \log L$ ,  $T \leq t \leq T + U$  und  $\eta = \sqrt{t/(2\pi)}$ .

Dann gilt für alle  $\varepsilon > 0$

$$\int_{0 \setminus 1} \frac{z^{-s} e^{\pi iz^2}}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}} h(z) dz = \sum_{n \leq \eta} h(n) n^{-s} + O_\varepsilon(T^{\varepsilon - \sigma/2})$$

und

$$\int_{0 \setminus 1} \frac{z^{s-1} e^{-\pi iz^2}}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}} h(z) dz = \sum_{n \leq \eta} h(n) n^{s-1} + O_\varepsilon(T^{\varepsilon + (\sigma-1)/2}).$$

Der folgende Beweis geht auf Conrey ([Con80, L. 2.3.1]) zurück. Für  $h(s) = 1$  sind diese Integrale in ähnlicher Weise bereits von Siegel in [Sie32, §4] untersucht worden.

**Beweis:** Zur Abkürzung setzten wir  $k = [\eta]$ ,  $r = k - \eta + \frac{3}{2}$  sowie  $\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) = \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)$ . Sei , der Pfad, der aus den Teilpfaden

$$\begin{aligned} ,_1 &= \{z = \eta + \delta\rho : \infty > \rho \geq r\}, \\ ,_2 &= \{z = \eta + r e^{i\alpha} : \frac{\pi}{4} \geq \alpha \geq \alpha_0\} \quad \text{mit } \alpha_0 \geq -\frac{\pi}{4}, \\ ,_3 &= \{z = \eta e^{i\beta} : \beta_0 \geq \beta \geq -\frac{\pi}{2}\} \quad \text{mit } \beta_0 \leq 0, \\ ,_4 &= \{z = \eta + \delta\rho : -\sqrt{2}\eta \geq \rho > -\infty\}. \end{aligned}$$

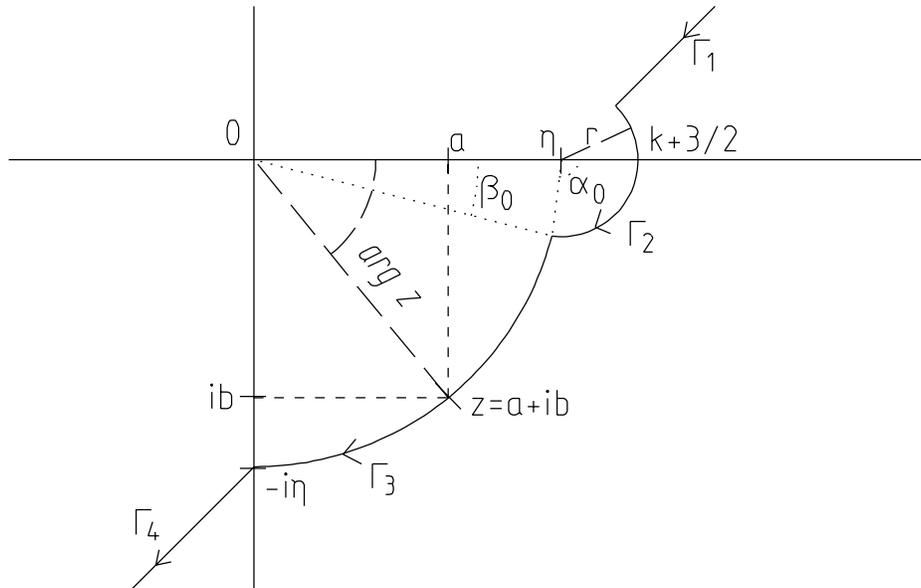


Abbildung A.1: Integrationsweg ,

besteht. Die Konstanten  $\alpha_0$  und  $\beta_0$  hängen voneinander ab (Abb. A.1), ihre genauen Werte haben für uns jedoch keine Bedeutung.

Verschieben wir den Integrationsweg  $0 \not\sim 1 = \{z = x + \delta\rho : \infty > \rho > -\infty\}$  mit einem  $x \in (0, 1)$  auf den Weg , , so müssen wir die einfachen Pole des Integranden an den Stellen  $z = 1, \dots, k+1$  berücksichtigen. Für die Residuen in  $z = n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_n \frac{z^{-s} e^{\pi i z^2}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} h(z) &= \lim_{z \rightarrow n} z^{-s} e^{\pi i z^2} h(z) \frac{z - n}{2\pi i \sin \pi z} \\ &= n^{-s} h(n) \frac{e^{\pi i n^2}}{2\pi i \cos \pi n} \\ &= \frac{1}{2\pi i} n^{-s} h(n). \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\int_{0 \not\sim 1} \frac{z^{-s} e^{\pi i z^2}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} h(z) dz = \sum_{n \leq k+1} h(n) n^{-s} + R_1 + R_2 + R_3 + R_4,$$

wobei

$$R_\nu = \int_{\Gamma_\nu} \frac{z^{-s} e^{\pi i z^2}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} h(z) dz.$$

Diese Integrale sollen also das behauptete Restglied ergeben. Sei

$$\begin{aligned} \gamma(z) &= \pi i z^2 - s \log z, \\ \lambda(z) &= t \arg z - 2\pi ab, \quad \text{mit } z = a + ib. \end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen ist  $\operatorname{Re} \gamma(\eta) = -\sigma \log \eta$  und  $\operatorname{Re}(\gamma(z) - \gamma(\eta)) = \sigma \log \left| \frac{\eta}{z} \right| + \lambda(z)$  und somit

$$R_j \ll \eta^{-\sigma} \int_{\Gamma_j} \frac{\exp\left(\sigma \log \left| \frac{\eta}{z} \right| + \lambda(z)\right) |h(z)|}{|\sin \pi z|} dz$$

Wir zeigen zuerst, daß  $\lambda(z)$  auf allen  $\nu$  nach oben beschränkt ist.

Auf  $\nu_1$  ist wegen  $\rho/\eta > 0$

$$\lambda(z) = t \left( \arctan \frac{\rho/\eta}{\rho/\eta + \sqrt{2}} - \frac{\rho}{\eta\sqrt{2}} - \frac{\rho^2}{2\eta^2} \right) < 0.$$

Auf  $\nu_2$  gilt

$$\arg z = \arctan \left( \frac{r \sin \alpha}{\eta + r \cos \alpha} \right) = \frac{r \cos \alpha}{\eta} + O(T^{-1}),$$

sowie

$$2\pi ab = 2\pi r \sin \alpha (\eta + r \cos \alpha) = 2\pi r \eta \sin \alpha + O(1).$$

Wegen  $\eta = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$  und  $\frac{1}{2} < r \leq \frac{3}{2}$  ist auf  $\nu_2$  daher  $\lambda(z) = O(1)$ .

Auf  $\nu_3$  verwenden wir eine geometrische Überlegung.  $-ab$  ist die Fläche des Rechtecks mit den Ecken  $0, a, z, ib$  (vgl. Abb. A.1). Da  $z$  auf  $\nu_3$ , einem Segment der Kreislinie um  $0$  mit Radius  $\eta$ , liegt, ist die Fläche des Rechtecks gerade  $-\eta^2 \sin \arg z \cdot \cos \arg z$ . Insgesamt gilt also auf  $\nu_3$

$$-ab \leq -\eta^2 \arg z = -\frac{t \arg z}{2\pi}$$

und somit  $\lambda(z) \leq 0$ .

Auf  $\nu_4$  ist schließlich  $ab \geq 0$  sowie  $\arg z < 0$ , also  $\lambda(z) < 0$ .

Wir können nun die Integrale  $R_\nu$  abschätzen. Beginnen wir mit  $R_3$ . Hier ist  $|z| = \eta$  und folglich  $\sigma \log |\eta/z| = 0$ . Nach Voraussetzung ist  $h(z) \ll \log^j \eta \ll L^j$ . Wegen  $|\sin \pi z| \geq \frac{1}{2} (e^{\pi|b|} - 1)$  gilt

$$R_3 \ll \eta^{-\sigma} L^j \ll T^{\varepsilon - \sigma/2}.$$

Auf  $\nu_2$  ist  $\eta \leq |z| < \eta + 2$  und daher ist für die betrachteten Werte von  $s$

$$1 \ll \left( \frac{\eta}{\eta + 2} \right)^\sigma < \exp(\sigma \log |\eta/z|) \leq 1,$$

also wegen  $|\sin \pi z| \gg 1$  und  $h(z) \ll L^j$

$$R_2 \ll \eta^{-\sigma} L^j \ll T^{\varepsilon - \sigma/2}.$$

Die Abschätzung von  $R_4$  läßt sich auf die von  $R_1$  zurückführen. Auf  $\nu_4$  nimmt nämlich  $\lambda(z)$  kleinere und  $|\sin \pi z|$  größere Werte an als auf  $\nu_1$ , während  $\log |\eta/z|$  auf beiden Wegen gleiche Werte annimmt. Da auch  $|\log z|^j$  gleiche Werte durchläuft, gilt also

$$R_4 \ll R_1.$$

Die Abschätzung auf  $\gamma_{11}$  ist aufwendiger, als auf den anderen Wegen. Wir spalten den Weg auf in

$$\begin{aligned}\gamma_{11} &= \{z = \eta + \delta\rho : 2\eta \geq \rho \geq r\} \quad \text{und} \\ \gamma_{12} &= \{z = \eta + \delta\rho : \infty > \rho > 2\eta\}\end{aligned}$$

und bezeichnen mit  $R_{11}$  und  $R_{12}$  die entsprechenden Integrale auf diesen Wegen. Auf beiden Wegen, also auf ganz  $\gamma_{11}$ , ist mit  $z = a + ib$

$$a = \eta + \frac{1}{\sqrt{2}}\rho \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho. \quad (\text{A.2.1})$$

Damit haben wir auf  $\gamma_{11}$

$$|\sin \pi z| \geq \frac{1}{2} (e^{\pi b} - e^{-\pi b}) \gg e^{\pi\rho/\sqrt{2}}.$$

Der Nenner des Integranden ist also auf  $\gamma_{11}$  nach unten beschränkt. Auf  $\gamma_{11}$  ist des weiteren

$$1 \leq \left| \frac{z}{\eta} \right| = \left| 1 + \frac{\delta\rho}{\eta} \right| \leq 3,$$

also  $\sigma \log \left| \frac{\eta}{z} \right| \ll L$  und somit erhalten wir analog zu oben

$$R_{11} \ll T^{\varepsilon - \sigma/2}.$$

Betrachten wir nun  $R_{12}$ . Auf  $\gamma_{12}$  gilt wegen (A.2.1)  $2\pi ab = \pi\rho^2 + \sqrt{2}\pi\rho\eta$  und außerdem  $t \arg z < \frac{1}{4}t\pi$ . Damit folgt wegen  $\rho \geq 2\eta$

$$\lambda(z) < -\pi\rho^2. \quad (\text{A.2.2})$$

Aus (A.2.1) folgt auch

$$\sigma \log \left| \frac{\eta}{z} \right| = -\frac{\sigma}{2} \log \left( 1 + \frac{\rho\sqrt{2}}{\eta} + \frac{\rho^2}{\eta^2} \right).$$

Auf  $\gamma_{12}$  liegt der Term in Klammern zwischen  $\rho^2\eta^{-2}$  und  $2\rho^2\eta^{-2}$ . Wir haben damit

$$-\sigma \log \frac{\rho}{\eta} \leq \sigma \log \left| \frac{\eta}{z} \right| \leq -\sigma \log \frac{\rho\sqrt{2}}{\eta}. \quad (\text{A.2.3})$$

Letztendlich gilt, falls  $T$  groß genug ist,

$$\frac{|h(z)|}{|\sin \pi z|} \ll_j 1.$$

Damit und mit (A.2.2) und (A.2.3) folgt insgesamt

$$R_{12} \ll \int_{2\eta}^{\infty} \exp(-\pi\rho^2) \rho^{-2} d\rho. \quad (\text{A.2.4})$$

Sei

$$I = \int_{2\eta}^{\infty} \frac{e^{-\pi\rho^2}}{\rho^\sigma} d\rho.$$

Ist  $\sigma \geq 0$ , dann ist

$$I < \int_{2\eta}^{\infty} e^{-\pi\rho^2} d\rho < e^{-4\pi\eta^2} = e^{-2t}. \quad (\text{A.2.5})$$

Im Fall  $\sigma < 0$  integrieren wir partiell:

$$I = \frac{e^{-\pi\rho^2} \rho^{1-\sigma}}{1-\sigma} \Big|_{2\eta}^{\infty} + \frac{2\pi}{1-\sigma} \int_{2\eta}^{\infty} \frac{e^{-\pi\rho^2}}{\rho^{\sigma-2}} d\rho \geq -\frac{e^{-4\pi\eta^2} (2\eta)^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{8\pi\eta^2}{1-\sigma} \cdot I.$$

Hieraus erhalten wir

$$I \leq \frac{e^{-2t} (2\eta)^{1-\sigma}}{4t-1+\sigma} \ll e^{-t}.$$

Damit und wegen (A.2.4) und (A.2.5) gilt

$$R_{12} \ll e^{-t}.$$

Fassen wir alle Ergebnisse zusammen, so erhalten wir

$$\int_{0 \not\sim 1} \frac{z^{-s} e^{\pi iz^2}}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}} h(z) dz = \sum_{n \leq k+1} h(n) n^{-s} + O(T^{\varepsilon-\sigma/2}).$$

Dies ist fast die Behauptung des Lemmas, wir müssen nur noch  $k+1 = [\eta]+1$  durch  $\eta$  ersetzen. Der dabei entstehende Fehler ist

$$\sum_{n \leq k+1} \frac{h(n)}{n^\sigma} - \sum_{n \leq \eta} \frac{h(n)}{n^\sigma} = \frac{h(k+1)}{(k+1)^\sigma} \ll L^j (k+1)^{-\sigma} \ll L^j \eta^{-\sigma} \ll T^{\varepsilon-\sigma/2}.$$

Dies passt wiederum in unser Fehlerglied, womit die erste Behauptung des Lemmas bewiesen wäre.

Die zweite Behauptung folgt aus der ersten durch Konjugation der Gleichung, nachdem  $\sigma$  durch  $1-\sigma$  ersetzt wurde. □

### A.3 Beweis von Lemma 3.3.1

**Lemma 3.3.1** Sei

$$\mathcal{J}(\theta) = \int_T^{T+U} \exp\left(it \log \frac{t}{2\pi\theta} - it\right) dt$$

und

$$\mathcal{E}(\theta) = 1 + \frac{T}{|T-\theta| + T^{1/2}} + \frac{T+U}{|T+U-\theta| + (T+U)^{1/2}}.$$

Dann gilt

$$\mathcal{J}(\theta) = \begin{cases} 2\pi\theta^{1/2} e^{\pi i/4 - 2\pi i\theta} + O(\mathcal{E}(\theta)) & ; \quad \frac{T}{2\pi} \leq \theta \leq \frac{T+U}{2\pi} \\ O(\mathcal{E}(\theta)) & ; \quad \theta < \frac{T}{2\pi} \text{ oder } \theta > \frac{T+U}{2\pi}. \end{cases}$$

Ein ähnlicher Satz findet sich bereits in der Arbeit von Selberg [Sel42, Lemma 2]. Bei unserem Satz handelt es sich um einen Spezialfall der Lemmata 3.3 und 3.4 aus [Lev74a].

**Beweis:** Um die Behauptung des Lemmas zu zeigen, werden wir verschiedene Fälle betrachten. Sei zunächst

$$T + \sqrt{T} \leq 2\pi\theta \leq T + U - \sqrt{T+U}.$$

Nun ist für ein  $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{J}(\theta) = \mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2,$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0 &= \int_{2\pi\theta(1-\varepsilon)}^{2\pi\theta(1+\varepsilon)} \exp\left(it \log \frac{t}{2\pi\theta} - it\right) dt, \\ \mathcal{J}_1 &= \int_T^{2\pi\theta(1-\varepsilon)} \exp\left(it \log \frac{t}{2\pi\theta} - it\right) dt, \end{aligned}$$

und

$$\mathcal{J}_2 = \int_{2\pi\theta(1+\varepsilon)}^{T+U} \exp\left(it \log \frac{t}{2\pi\theta} - it\right) dt.$$

Wir werden sehen, daß  $\mathcal{J}_0$  den Hauptteil der behaupteten Abschätzung liefert. Zuerst werden wir jedoch die einfacheren Integrale  $\mathcal{J}_1$  und  $\mathcal{J}_2$  behandeln. Sei

$$f(t) = it \log \frac{t}{2\pi\theta} - it = it \log \frac{t}{2\pi\theta e}$$

so, daß  $f'(t) = i \log \frac{t}{2\pi\theta}$  und  $f''(t) = \frac{i}{t}$ . Partielle Integration liefert damit

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \int_T^{2\pi\theta(1-\varepsilon)} \exp(f(t)) f'(t) \cdot f(t)^{-1} dt \\ &= \frac{\exp(f(t))}{f'(t)} \Big|_T^{2\pi\theta(1-\varepsilon)} + i \int_T^{2\pi\theta(1-\varepsilon)} \frac{\exp(f(t))}{t \left(\log \frac{t}{2\pi\theta}\right)^2} dt \\ &\ll_\varepsilon \left(\log \frac{2\pi\theta}{T}\right)^{-1} \\ &\ll_\varepsilon \frac{T}{|T - \theta| + \sqrt{T}}. \end{aligned} \tag{A.3.1}$$

Ganz analog folgt

$$\mathcal{J}_2 \ll_\varepsilon \frac{T+U}{|T+U-\theta| + \sqrt{T+U}}.$$

Es bleibt  $\mathcal{J}_0$  zu betrachten. Zuerst substituieren wir  $t = 2\pi\theta(1+z)$  und erhalten

$$\mathcal{J}_0 = 2\pi\theta \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left(2\pi i\theta(1+z) \log \frac{1+z}{e}\right) dz = 2\pi\theta e^{-2\pi i\theta} \cdot \mathcal{J}_3,$$

wobei

$$\mathcal{J}_3 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp(2\pi i\theta((1+z) \log(1+z) - z)) dz.$$

Entwickeln wir  $\log(1+z)$  in eine Potenzreihe, so erhalten wir für  $|z| < 1$

$$(1+z) \log(1+z) = z + \frac{1}{2} z^2 (1 + z g_1(z)),$$

wobei  $g_1(z)$  im offenen Einheitskreis holomorph ist.

Wir betrachten die Abbildung  $G(z) = w := z(1 + zg_1(z))^{1/2}$ . Es ist  $G(0) = 0$  und  $G'(0) = 1 \neq 0$ , die Abbildung besitzt also ([LR70, Ch. 5, Thm. 6.3]) in  $|z| < \varepsilon$ , mit einem gewissen  $\varepsilon > 0$ , eine holomorphe Umkehrabbildung  $G^{-1}(w) = z$ . Den in den Integralgrenzen auftretenden Parameter  $\varepsilon$  wählen wir nun so, daß  $G^{-1}$  im Integrationsintervall existiert und holomorph ist. Aufgrund der Holomorphie können wir dann  $G^{-1}$  in eine Potenzreihe entwickeln, und wir erhalten

$$G^{-1}(w) = c_0 + c_1 w + w^2 g_2(w),$$

mit einer in einer Umgebung von  $G(0) = 0$  holomorphen Funktion  $g_2$ . Wegen  $G(0) = 0$  ist  $G^{-1}(0) = 0$  und folglich  $c_0 = 0$ . Nach der Kettenregel ist  $(G^{-1})'(w) \cdot G'(z) = 1$  und aus  $G'(0) = 1$  folgt  $(G^{-1})'(0) = 1$  und somit  $c_1 = 1$ . Wir haben also

$$G^{-1}(w) = w + w^2 g_2(w).$$

Um nun  $\mathcal{J}_3$  zu berechnen, substituieren wir  $z = G^{-1}(w)$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3 &= \int_{G(-\varepsilon)}^{G(\varepsilon)} \exp(\pi i \theta w^2) (1 + 2w g_2(w) + w^2 g_2'(w)) dw \\ &= \int_{G(-\varepsilon)}^{G(\varepsilon)} \exp(\pi i \theta w^2) dw + \int_{G(-\varepsilon)}^{G(\varepsilon)} w g_3(w) \exp(\pi i \theta w^2) dw, \end{aligned}$$

mit  $g_3(w) = 2g_2(w) + w g_2'(w)$ . Das zweite Integral der letzten Zeile läßt sich wegen  $\frac{d}{dw} \left( \frac{1}{2\pi i \theta} e^{\pi i \theta w^2} \right) = w e^{\pi i \theta w^2}$  mittels partieller Integration abschätzen und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{G(-\varepsilon)}^{G(\varepsilon)} w \exp(\pi i \theta w^2) \cdot g_3(w) dw &= \frac{1}{2\pi i \theta} e^{\pi i \theta w^2} g_3(w) \Big|_{G(-\varepsilon)}^{G(\varepsilon)} - \frac{1}{2\pi i \theta} \int_{G(-\varepsilon)}^{G(\varepsilon)} e^{\pi i \theta w^2} g_3'(w) dw \\ &= O(\theta^{-1}). \end{aligned}$$

Ein wesentlicher Beitrag, den wir nicht in das Fehlerglied fallen lassen können, wird vom ersten Integral geliefert. Wir formen also um:

$$\int_{G(-\varepsilon)}^{G(\varepsilon)} \exp(\pi i \theta w^2) dw = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \theta w^2} dw - \mathcal{J}_4 - \mathcal{J}_5,$$

wobei

$$\mathcal{J}_4 = \int_{G(\varepsilon)}^{\infty} e^{\pi i \theta w^2} dw \quad \text{und} \quad \mathcal{J}_5 = \int_{-\infty}^{G(-\varepsilon)} e^{\pi i \theta w^2} dw.$$

Wie oben liefert nun partielle Integration

$$\mathcal{J}_4 = \int_{G(\varepsilon)}^{\infty} w \exp(\pi i \theta w^2) \cdot \frac{1}{w} dw = \frac{1}{2\pi i \theta} e^{\pi i \theta w^2} \Big|_{G(\varepsilon)}^{\infty} + \frac{1}{2\pi i \theta} \int_{G(\varepsilon)}^{\infty} e^{\pi i \theta w^2} \frac{1}{w^2} dw = O(\theta^{-1}).$$

Analog erhalten wir  $\mathcal{J}_5 = O(\theta^{-1})$ .

Zur Berechnung des verbleibenden Integrals substituieren wir  $v = w\sqrt{\pi\theta}$ .

Wegen  $e^{\pi i/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$  ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \theta w^2} dw = \frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos v^2 + i \sin v^2) dv = \frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \cdot (1+i) \sqrt{\frac{\pi}{2}} = e^{\pi i/4} \theta^{-1/2}.$$

Zusammengenommen erhalten wir

$$\mathcal{J}_0 = 2\pi\theta^{1/2}e^{\pi i/4-2\pi i\theta} + O(\mathcal{E}(\theta))$$

und insgesamt, da  $\mathcal{J}_1$  und  $\mathcal{J}_2$  in das Fehlerglied fallen,

$$\mathcal{J}(\theta) = 2\pi\theta^{1/2}e^{\pi i/4-2\pi i\theta} + O(\mathcal{E}(\theta)) \quad \text{für } T + \sqrt{T} \leq 2\pi\theta \leq T + U - \sqrt{T+U}. \quad (\text{A.3.2})$$

Dies ist nicht genau der Bereich, für den diese Abschätzung behauptet worden ist. Es gilt jedoch für  $T - \sqrt{T} \leq 2\pi\theta \leq T + \sqrt{T}$

$$2\pi\theta^{1/2}e^{\pi i/4-2\pi i\theta} \ll \frac{T}{|T-\theta| + \sqrt{T}} \ll \mathcal{E}(\theta)$$

und für  $T + U - \sqrt{T+U} \leq 2\pi\theta \leq T + U + \sqrt{T+U}$

$$2\pi\theta^{1/2}e^{\pi i/4-2\pi i\theta} \ll \frac{T+U}{|T+U-\theta| + \sqrt{T+U}} \ll \mathcal{E}(\theta).$$

In diesen Bereichen liegt der Hauptteil also in der Größenordnung des Fehlerterms. Es genügt somit zum Beweis des Lemmas,  $\mathcal{J}(\theta) \ll \mathcal{E}(\theta)$  für  $2\pi\theta \leq T + \sqrt{T}$  und  $2\pi\theta \geq T + U - \sqrt{T+U}$  zu zeigen.

Sei zunächst

$$T - \sqrt{T} \leq 2\pi\theta \leq T + \sqrt{T}.$$

Wir spalten das Integral auf ( $T$  sei so groß, daß  $U > 2\sqrt{T}$ ):

$$\mathcal{J}(\theta) = \int_T^{T+2\sqrt{T}} e^{f(t)} dt + \int_{T+2\sqrt{T}}^{T+U} e^{f(t)} dt$$

Das erste Integral auf der rechten Seite ist wegen  $|e^{f(t)}| = 1$  betragsmäßig  $\leq 2\sqrt{T} \ll \mathcal{E}(\theta)$ . Das zweite Integral wird wieder partiell integriert und liefert wie bei (A.3.1) im jetzt betrachteten Bereich von  $2\pi\theta$

$$\mathcal{J}(\theta) \ll \left( \log \frac{T+2\sqrt{T}}{2\pi r} \right)^{-1} \ll \mathcal{E}(\theta). \quad (\text{A.3.3})$$

Im Fall

$$T + U - \sqrt{T+U} \leq 2\pi\theta \leq T + U + \sqrt{T+U}$$

folgt auf analoge Art und Weise

$$\mathcal{J}(\theta) \ll \mathcal{E}(\theta). \quad (\text{A.3.4})$$

Der nächste Fall, den wir betrachten wollen, ist

$$2\pi\theta < T - \sqrt{T}.$$

Hier ist wieder wie bei (A.3.1)

$$\mathcal{J}(\theta) \ll \left( \log \frac{T}{2\pi\theta} \right)^{-1}.$$

Für  $2\pi\theta \geq \frac{3}{4}T$  ist dieser Ausdruck  $\ll \frac{T}{|T-2\pi\theta|+\sqrt{T}}$  und für  $2\pi\theta < \frac{3}{4}T$  ist er  $\ll 1$ . Analoge Ergebnisse — mit  $T+U$  statt  $T$  — erhält man im letzten verbleibenden Fall

$$2\pi\theta \geq T + U + \sqrt{T+U}.$$

Damit und mit den Abschätzungen (A.3.2), (A.3.3) und (A.3.4) folgt die Behauptung des Lemmas.  $\square$

#### A.4 Beweis von Lemma 3.4.1

**Lemma 3.4.1** *Sei  $h$  ein reelles Polynom mit  $h(0) = 0$ ,  $\delta = (\log \log y)^{-1}$ ,  $d = \delta/M$ , mit einer absoluten Konstanten  $M > 1$ , und sei*

$$F(j, s) = \prod_{p|j} (1 - p^{-s}) \quad , \quad F_1(j, s) = \prod_{p|j} (1 + p^{-s}),$$

sowie

$$G_j(\beta) = \sum_{\substack{\nu \leq y/j \\ (\nu, j)=1}} \mu(\nu) \nu^{-\beta} h\left(\frac{\log \frac{y}{\nu j}}{\log y}\right).$$

Dann gilt gleichmäßig für alle  $1 \leq j \leq y$  und alle  $\beta \neq 1$  mit  $|1 - \beta| \ll (\log y)^{-1}$

$$G_j^{(n)}(\beta) = M_{n,j}(\beta) + O(E_{n,j}),$$

wobei für  $n = 0$

$$M_{0,j} = F(j, \beta)^{-1} \left( (\beta - 1) h\left(\frac{\log \frac{y}{j}}{\log y}\right) + (\log y)^{-1} h'\left(\frac{\log \frac{y}{j}}{\log y}\right) \right) = O\left(\frac{F_1(j, \beta)}{\log y}\right),$$

für  $n = 1$

$$M_{1,j} = F(j, \beta)^{-1} h\left(\frac{\log \frac{y}{j}}{\log y}\right) = O(F_1(j, \beta)),$$

für  $n \geq 2$

$$M_{n,j} = 0$$

und für alle  $n \geq 0$

$$E_{n,j} = (\log y)^{n-2} (\log \log y)^2 \left(1 + \left(\frac{j}{y}\right)^d \log y\right) F_1(j, 1 - \delta).$$

Wir folgen dem Beweis in [Con83a, L.10], wo die zu betrachtende Summe  $G_j(\beta)$  in ein komplexes Integral umgewandelt wird. Dazu benötigen wir

**Lemma A.4.1** *Sei  $\nu \geq 2$  eine ganze Zahl und sei  $y > 0$ . Dann gilt für  $c > 0$ , wenn über die vertikale Gerade  $s = c + it$  integriert wird,*

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{y^s}{s^\nu} ds = \begin{cases} 0 & ; 0 < y \leq 1 \\ \frac{2\pi i}{(\nu-1)!} (\log y)^{\nu-1} & ; y \geq 1. \end{cases}$$

Dieser Hilfssatz wird beispielsweise in [Lan74, §66, Hilfssatz 5] bewiesen.

**Beweis von Lemma 3.4.1 :**

Die Entwicklung von  $h$  um 0 in eine Taylorreihe liefert uns wegen  $h(0) = 0$

$$G_j(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{\log^k y} \cdot \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\nu \leq y/j \\ (\nu, j)=1}} \frac{\mu(\nu)}{\nu^\beta} \left( \log \frac{y}{\nu j} \right)^k.$$

Die Summe ist endlich, da  $h$  ein Polynom ist. Betrachten wir zunächst die innere Summe über  $\nu$ . Wir können sie darstellen als

$$\sum_{\nu \leq x} \frac{\mu(\nu) \chi_j(\nu)}{\nu^\beta} \left( \log \frac{x}{\nu} \right)^k,$$

wobei  $x = \frac{y}{j}$ ,  $k \geq 1$  und

$$\chi_j(\nu) = \begin{cases} 0 & ; (\nu, j) > 1 \\ 1 & ; (\nu, j) = 1. \end{cases}$$

Wenden wir nun Lemma A.4.1 an, so erhalten wir für  $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \leq x} \frac{\mu(\nu) \chi_j(\nu)}{\nu^\beta} \left( \log \frac{x}{\nu} \right)^k &= \frac{k!}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mu(\nu) \chi_j(\nu)}{\nu^\beta} \int_{2-\beta-i\infty}^{2-\beta+i\infty} \frac{x^s}{\nu^s s^{k+1}} ds \\ &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^s - \beta}{(s - \beta)^{k+1}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mu(\nu) \chi_j(\nu)}{\nu^s} ds, \end{aligned}$$

da das Integral für  $\nu > x$  verschwindet und die Dirichlet-Reihe für  $\operatorname{Re} s \geq 2$  gleichmäßig konvergiert.

Weil  $(\mu \chi_j)(\nu)$  multiplikativ ist, können wir die Summe im Integranden der letzten Zeile umformen:

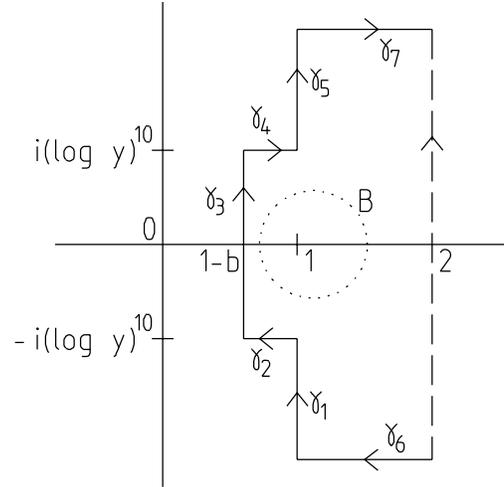
$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mu(\nu) \chi_j(\nu)}{\nu^s} &= \prod_p \left( 1 + \frac{\mu(p) \chi_j(p)}{p^s} + \frac{\mu(p^2) \chi_j(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right) \\ &= \prod_{p \nmid j} (1 - p^{-s}) \\ &= \frac{1}{\zeta(s) F(j, s)} \quad \text{für } \operatorname{Re} s > 1. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir mit  $x = \frac{y}{j}$

$$G_j(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{\log^k y} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^{s-\beta}}{\zeta(s) F(j, s) (s - \beta)^{k+1}} ds.$$

Sei  $R(\beta)$  das Residuum des Integranden in  $s = \beta$  und sei

$$I_m(\beta) = \int_{\gamma_m} \frac{x^{s-\beta}}{\zeta(s) F(j, s) (s - \beta)^{k+1}} ds,$$

Abbildung A.2: Integrationswege  $\gamma_1, \dots, \gamma_7$ 

wobei  $\gamma_m$  die Integrationswege gemäß Abbildung A.2 bezeichnet.

Wegen  $\lim_{t \rightarrow \infty} I_6 = 0$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} I_7 = 0$  folgt nach dem Residuensatz und  $i$ -facher Differentiation

$$G_j^{(n)}(\beta) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{\log^k y} \left( 2\pi i R^{(n)}(\beta) + I_1(\beta) + \dots + I_5(\beta) \right). \quad (\text{A.4.1})$$

Zuerst schätzen wir die fünf Integrale ab, sie werden den gesuchten Fehlerterm ergeben. Auf den Wegen  $\gamma_1$  und  $\gamma_5$  ist ([Tit51, (3.11.10)])

$$\frac{1}{\zeta(1+it)} = O(\log |t|)$$

und auf  $\gamma_2, \gamma_3$  und  $\gamma_4$  ist  $\sigma > 1 - d = 1 - (M \log \log y)^{-1} > 1 - M'/\log t$ , also nach [Tit51, (3.11.8)]

$$\frac{1}{\zeta(s)} \ll \log |t| \ll \log \log y.$$

Weiter gilt wegen (3.4.9) auf allen betrachteten Wegen

$$\frac{1}{F(j, s)} \ll F_1(j, 1 - \delta),$$

eine Beziehung, die wir im folgenden häufig anwenden werden.

Sei  $B = B(\beta, \log^{-1} y)$  die offene Kreisscheibe um  $\beta$  mit Radius  $\frac{1}{\log y}$ . Dann ist die Funktion

$$f(z) = \frac{x^{s-z}}{(s-z)^{k+1}}$$

in einer Umgebung von  $\overline{B}$  holomorph und Cauchys Abschätzung für die Ableitungen von  $f$  liefert

$$f^{(n)}(\beta) \leq n! \log^n y \sup_{z \in \partial B} |f(z)|.$$

Wegen  $z \in \partial B \Rightarrow |z - 1| \ll \log^{-1} y$  folgt

$$|f(z)| \ll \frac{x^{\sigma-1}}{((\sigma-1)^2 + t^2)^{(k+1)/2}}$$

und damit erhalten wir für den von  $\beta$  abhängigen Teil des Integranden

$$\frac{d^n}{d\beta^n} \frac{x^{s-\beta}}{(s-\beta)^{k+1}} \ll_n \frac{x^{\sigma-1} \log^n y}{((\sigma-1)^2 + t^2)^{(k+1)/2}} \quad \text{auf } \gamma_1, \dots, \gamma_5.$$

Mit den bisher erzielten Ergebnissen können wir nun unsere fünf Integrale abschätzen. Die Vertauschung von Differentiation und Integration ist dabei problemlos, da über abgeschlossene Gebiete integriert wird.

Auf  $\gamma_2$  und  $\gamma_4$  ist  $s = \sigma \pm i \log^{10} y$  mit  $1-d \leq \sigma \leq 1$  und daher gilt

$$\begin{aligned} I_2^{(n)}(\beta), I_4^{(n)}(\beta) &\ll b \log \log y \cdot F_1(j, 1-\delta) x^{1-\sigma} \log^n y \left( (\sigma-1)^2 + \log^{20} y \right)^{-(k+1)/2} \\ &\ll F_1(j, 1-\delta) (\log y)^{n-20}. \end{aligned}$$

Wegen  $s = 1 + it$  mit  $\log^{10} y \leq |t| < \infty$  gilt außerdem für  $m = 1$  und  $m = 5$

$$\begin{aligned} I_m^{(n)}(\beta) &\ll F_1(j, 1-\delta) \log^n y \int_{\gamma_m} |t|^{-(k+1)} \log |t| ds \\ &\ll F_1(j, 1-\delta) (\log y)^{n-9}. \end{aligned}$$

Schließlich haben wir  $s = (1-d) + it$  mit  $0 \leq |t| \leq \log^{10} y$  auf  $\gamma_3$  und somit

$$\begin{aligned} I_3^{(n)}(\beta) &\ll F_1(j, 1-\delta) x^{-d} \log^n y \log \log y \int_{-\log^{10} y}^{\log^{10} y} (d^2 + t^2)^{-(k+1)/2} dt \\ &\ll F_1(j, 1-\delta) (\log y)^n (\log \log y)^{k+1} \left( \frac{j}{y} \right)^d, \end{aligned}$$

da, wie man durch eine vollständige Induktion nach  $k$  schnell sieht,

$$\int_{-\log^{10} y}^{\log^{10} y} (d^2 + t^2)^{-(k+1)/2} dt \ll d^{-k} \ll_M (\log \log y)^{-k}.$$

Durch Einsetzen erhalten wir nun den behaupteten Fehlerterm :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} h^{(k)}(0) (\log y)^k \left( I_1^{(n)}(\beta) + \dots + I_5^{(n)}(\beta) \right) \\ &\ll F_1(j, 1-\delta) (\log y)^{n-9} \sum_{k=1}^{\infty} (\log y)^{-k} \\ &\quad + F_1(j, 1-\delta) (\log y)^{n-20} \sum_{k=1}^{\infty} (\log y)^{-k} \\ &\quad + F_1(j, 1-\delta) (\log y)^n \left( \frac{j}{y} \right)^d \sum_{k=1}^{\infty} (\log y)^{-k} (\log \log y)^{k+1} \\ &\ll F_1(j, 1-\delta) (\log y)^{n-10} \left( 1 + \left( \frac{j}{y} \right)^d (\log y)^9 (\log \log y)^2 \right) \\ &\ll E_{n,j}. \end{aligned} \tag{A.4.2}$$

Die  $M_{n,j}(\beta)$  der Behauptung ergeben sich aus der Betrachtung des Residuums  $R(\beta)$ . Da die Singularität in  $s = \beta$  ein Pol der Ordnung  $k + 1$  ist, gilt, da  $\beta \neq 1$ ,

$$\begin{aligned} R(\beta) &= \operatorname{res}_\beta \frac{x^{s-\beta}}{\zeta(s)F(j,s)(s-\beta)^{k+1}} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{ds^k} \left( \frac{x^{s-\beta}}{\zeta(s)F(j,s)} \right) \Big|_{s=\beta} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} (\log x)^{k-\nu} Z^{(\nu)}(\beta), \end{aligned}$$

wobei

$$Z(s) = \frac{1}{\zeta(s)F(j,s)}. \quad (\text{A.4.3})$$

Es folgt

$$R^{(n)}(\beta) = \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} (\log x)^{k-\nu} Z^{(\nu+n)}(\beta). \quad (\text{A.4.4})$$

Aus der Entwicklung der  $\zeta$ -Funktion in der Umgebung ihres Poles bei 1, ([Ivi85, (1.11)]),

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma_0 + \gamma_1(s-1) + \dots, \quad (\text{A.4.5})$$

folgern wir

$$\frac{1}{\zeta(s)} = (s-1) + O(|s-1|^2)$$

und somit gilt wegen  $\beta \neq 1$  und  $|1-\beta| \ll (\log y)^{-1}$

$$Z(\beta) = \frac{\beta-1}{F(j,\beta)} + O\left(\frac{F_1(j,1-\delta)}{\log^2 y}\right). \quad (\text{A.4.6})$$

Für die erste Ableitung von  $Z(\beta)$  erhalten wir aus (A.4.3)

$$Z'(\beta) = -\frac{\zeta'(\beta)/\zeta(\beta) + F'(j,\beta)/F(j,\beta)}{\zeta(\beta)F(j,\beta)} = -\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\beta) + \frac{F'}{F}(j,\beta)\right) \cdot Z(\beta) \quad (\text{A.4.7})$$

Für  $s$  in der Umgebung von 1 gilt nach (A.4.5)

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -(s-1)^{-1} + O(1) \quad (\text{A.4.8})$$

und für die logarithmische Ableitung von  $F(j,s)$  gilt, falls  $|s-1| \ll \delta$ , gleichmäßig für  $j \leq y$

$$\frac{F'}{F}(j,s) = \sum_{p|j} \frac{p^{-s} \log p}{1-p^{-s}} \ll \sum_{p|j} \frac{\log p}{p} \ll \log \log j \ll \log \log y. \quad (\text{A.4.9})$$

Insgesamt folgt unter Verwendung von (A.4.8), (A.4.6) und (A.4.9) aus (A.4.7)

$$\begin{aligned} Z'(\beta) &= \frac{1}{F(j, \beta)} + O\left(F_1(j, 1 - \delta) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(|\beta - 1| + |\beta - 1|^{-1}(\log y)^{-2} + (\log y)^{-2} + |\beta - 1| \log \log y\right)\right) \\ &= \frac{1}{F(j, \beta)} + O\left(F_1(j, 1 - \delta)(\log y)^{-1} \log \log y\right). \end{aligned}$$

Zur Abschätzung der höheren Ableitungen von  $Z(\beta)$  wenden wir wiederum Cauchys Ungleichung an. Definieren wir  $Z(1) = 0$ , so ist  $Z$  holomorph in einer Umgebung von  $\bar{B}$ , wobei  $B = B(\beta, (\log \log y)^{-1})$  die offene Kreisscheibe um  $\beta$  mit dem Radius  $(\log \log y)^{-1}$  bezeichnet. Es gilt nun

$$Z^{(k)}(\beta) \leq k! (\log \log y)^k \sup_{z \in \partial B} |Z(z)|.$$

Sei  $z \in \partial B$ , d.h.  $|z - \beta| = (\log \log y)^{-1}$ . Analog zur Herleitung von (A.4.6) folgern wir hier

$$Z(z) \ll \frac{|z - \beta| + |\beta - 1|}{F(j, z)} \ll F_1(j, 1 - \delta)(\log \log y)^{-1}.$$

Folglich ist

$$Z^{(k)}(\beta) \ll_k F_1(j, 1 - \delta)(\log \log y)^{k-1}.$$

Wir können diese Resultate nun in (A.4.4) einsetzen. Dabei untersuchen wir die Fälle  $n = 0$ ,  $n = 1$  und  $n \geq 2$  separat.

Im Fall  $n = 0$  haben wir

$$\begin{aligned} R(\beta) &= \frac{1}{k!} (\log x)^k Z(\beta) + \frac{1}{(k-1)!} (\log x)^{k-1} Z'(\beta) + O_k\left(F_1(j, 1 - \delta)(\log y)^{k-2} \log \log y\right) \\ &= \frac{1}{F(j, \beta)} \left( \frac{\beta - 1}{k!} (\log x)^k + \frac{1}{(k-1)!} (\log x)^{k-1} \right) + O_k\left(F_1(j, 1 - \delta)(\log y)^{k-2} \log \log y\right), \end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{(\log y)^k} R(\beta) &= \frac{1}{F(j, \beta)} \left( (\beta - 1) h\left(\frac{\log y/j}{\log y}\right) + \frac{1}{\log y} h'\left(\frac{\log y/j}{\log y}\right) \right) \\ &\quad + O\left(F_1(j, 1 - \delta)(\log y)^{-2} \log \log y\right) \\ &= M_{0,j}(\beta) + O(E_{0,j}). \end{aligned}$$

Die Abschätzung für den Fall  $n = 1$  liefert analog

$$R'(\beta) = \frac{1}{k! F(j, \beta)} (\log x)^k + O\left(F_1(j, 1 - \delta)(\log y)^{k-1} \log \log y\right)$$

und somit

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{(\log y)^k} R'(\beta) &= \frac{1}{F(j, \beta)} h\left(\frac{\log y/j}{\log y}\right) + O\left(F_1(j, 1 - \delta)(\log y)^{-1} \log \log y\right) \\ &= M_{1,j}(\beta) + O(E_{1,j}). \end{aligned}$$

Im verbleibenden Fall  $n \geq 2$  ist

$$R^{(n)}(\beta) \ll_k F_1(j, 1 - \delta)(\log y)^k (\log \log y)^{n-1}$$

und wir erhalten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{(\log y)^k} R^{(n)}(\beta) \ll F_1(j, 1 - \delta)(\log \log y)^{n-1} \ll E_{n,j}.$$

Insgesamt ergibt sich folglich aus (A.4.1), (A.4.2) und den gerade betrachteten drei Fällen

$$G_j^{(n)}(\beta) = M_{n,j}(\beta) + O(E_{n,j}).$$

□

## A.5 Beweis von Lemma 3.4.2

**Lemma 3.4.2** Sei  $F_1(j, 1 - \delta) = \prod_{p|j} (1 + p^{-1+\delta})$  mit  $\delta > 0$  und sei  $d \geq 0$ , wobei  $\delta + d \leq c_0 < 1$ . Dann gilt für  $r \geq 1$

$$\sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j^{1-d}} F_1(j, 1 - \delta)^r = \begin{cases} O_{c_0, r}(\log y) & ; d = 0 \\ O_{c_0, r}(y^d/d) & ; 0 < d < 1 \end{cases}.$$

**Beweis:** Es sei

$$\tau_k(n) = \sum_{n_1 \cdots n_k = n} 1$$

die Anzahl der Darstellungen von  $n$  als Produkt von  $k$  Zahlen und sei

$$g(n) = (-1)^{\omega(n)} \tau_k(n) n^{-1+\delta},$$

wobei wie üblich  $\omega(n)$  die Anzahl der paarweise verschiedenen Primteiler von  $n$  bezeichnet. Da  $\omega(n)$  additiv,  $\tau_k(n)$  und  $n^{-1+\delta}$  aber multiplikativ sind, ist auch  $g(n)$  multiplikativ und daher gilt, wenn  $\mu(n)$  für die Möbius-Funktion steht,

$$\prod_{p|j} (1 - g(p)) = \sum_{n|j} \mu(n) g(n). \quad (\text{A.5.1})$$

Weiter ist nach Voraussetzung für ein geeignetes  $k = k(r) \in \mathbb{N}$

$$F_1(j, 1 - \delta)^r = \prod_{p|j} (1 + p^{-1+\delta})^r \leq \prod_{p|j} (1 + kp^{-1+\delta}).$$

Wegen  $\tau_k(p) = k$  und  $\omega(p) = 1$  ist  $kp^{-1+\delta} = -g(p)$  und unter Verwendung von (A.5.1) folgt

$$\begin{aligned} F_1(j, 1 - \delta)^r &\leq \sum_{n|j} \mu(n) g(n) \\ &= \sum_{n|j} \mu^2(n) \tau_k(n) n^{-1+\delta} \\ &\leq \sum_{n|j} \tau_k(n) n^{-1+\delta}, \end{aligned}$$

denn für nicht-quadratfreie  $n$  ist  $\mu(n) = 0$  und für quadratfreie  $n$  gilt  $\mu(n) = (-1)^{\omega(n)}$ .  
Insgesamt haben wir also

$$\begin{aligned} \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j^{1-d}} F_1(j, 1-\delta)^r &\leq \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j^{1-d}} \sum_{n|j} \tau_k(n) n^{-1+\delta} \\ &\leq \sum_{n \leq y} \tau_k(n) n^{-1+\delta} \sum_{\substack{j \leq y \\ j \equiv 0 \pmod{n}}} \frac{1}{j^{1-d}} \\ &= \sum_{n \leq y} \tau_k(n) n^{-2+\delta+d} \sum_{i \leq y/n} i^{-1+d} \\ &\leq \sum_{n \leq y} \tau_k(n) n^{-2+c_0} \sum_{i \leq y} i^{-1+d}. \end{aligned}$$

Nun ist aber für  $c_0 < 1$  ([Tit51, (1.2.2)])

$$\sum_{n \leq y} \tau_k(n) n^{-2+c_0} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau_k(n) n^{-2+c_0} = \zeta^k(2-c_0) \ll_{c_0, r} 1. \quad (\text{A.5.2})$$

Wir müssen uns folglich um die Summe über  $i$  kümmern. Im Fall  $d = 0$  gilt bekanntlich

$$\sum_{i \leq y} i^{-1} \ll \log y$$

und mit (A.5.2) folgt die Behauptung.

Im Fall  $0 < d < 1$  folgern wir durch partielle Summation

$$\sum_{i \leq y} i^{-1+d} \ll \frac{y^d}{d},$$

was wiederum zusammen mit (A.5.2) die Behauptung ergibt.  $\square$

## A.6 Beweis von Lemma 3.4.3

**Lemma 3.4.3** Sei  $f(p) = 1 + O(p^{-c})$  für Primzahlen  $p$  und sei  $f(j) = \prod_{p|j} f(p)$ , mit einer Konstanten  $c > 0$ .

Dann gilt für  $\nu \geq 0$

$$\sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j} f(j) \left( \log \frac{y}{j} \right)^\nu = \frac{\mathcal{P}_f}{\zeta(2)} \cdot \frac{(\log y)^{\nu+1}}{\nu+1} + O_{c, \nu}((\log y)^\nu),$$

wobei

$$\mathcal{P}_f = \prod_p \left( 1 + \frac{f(p) - 1}{p+1} \right).$$

Das Produkt  $\mathcal{P}_f$  ist absolut konvergent.

Dieser Hilfssatz ist eine Verallgemeinerung und Präzisierung des Spezialfalls  $d = 0$  von Lemma 3.4.2. In [Con83a, L.11] deutet Conrey für den Fall  $\nu > 0$  einen Beweis an, der ähnliche

Techniken wie der obige Beweis zu Lemma 3.4.1 verwendet, nämlich die Umwandlung der betrachteten Summe in ein komplexes Integral mittels Lemma A.4.1. Für  $\nu = 0$  ist dieses Lemma nicht anwendbar und daher verweist Conrey in diesem Spezialfall auf Levinsons Beweis in [Lev74a, L.3.11]. Statt nun zwei in ihren Methoden völlig unterschiedliche Beweise zu führen, verallgemeinern wir Levinsons elementaren Beweis auf alle  $\nu \geq 0$ .

**Beweis:** Wir zeigen zuerst die absolute Konvergenz von  $\mathcal{P}_f$ . Da  $f(p) = 1 + O(p^{-c})$  ist

$$\sum_p \left| \frac{f(p) - 1}{p + 1} \right| \ll \sum_p \frac{p^{-c}}{p + 1} \ll \sum_p \frac{1}{p^{1+c}} \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+c}} \ll_c 1.$$

Da  $c$  konstant ist, bedeutet dies die absolute Konvergenz.

Zum Beweis der ersten Behauptung definieren wir abkürzend

$$J_\nu(y) = \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j} f(j) \left( \log \frac{y}{j} \right)^\nu.$$

Des weiteren zerlegen wir  $f(p)$  derart, daß gilt

$$f(p) = A(p)(B(p) + 1), \quad (\text{A.6.1})$$

$$A(p) \cdot B(p) = 1 + \frac{A(p)}{p}. \quad (\text{A.6.2})$$

Hieraus erhalten wir für Primzahlen  $p$

$$A(p) = \frac{p(f(p) - 1)}{p + 1} \quad \text{und} \quad B(p) = \frac{p + f(p)}{p(f(p) - 1)}.$$

Beide Funktionen setzen wir multiplikativ auf alle natürlichen Zahlen  $j$  fort, sei also

$$A(j) = \prod_{p|j} A(p) \quad \text{und} \quad B(j) = \prod_{p|j} B(p).$$

Nun ist wegen (A.6.1) und da in  $J_\nu(y)$  wegen des Faktors  $\mu^2(j)$  eigentlich nur über quadratfreie  $j$  summiert wird

$$\begin{aligned} J_\nu(y) &= \sum_{\substack{j \leq y \\ j \text{ 2-frei}}} \frac{\mu^2(j)}{j} \left( \log \frac{y}{j} \right)^\nu \prod_{p|j} A(p)(B(p) + 1) \\ &= \sum_{\substack{j \leq y \\ j \text{ 2-frei}}} \frac{\mu^2(j)}{j} \left( \log \frac{y}{j} \right)^\nu A(j) \sum_{m|j} B(m) \\ &= \sum_{m \leq y} \sum_{\substack{j \leq y/m \\ (j,m)=1}} \frac{\mu^2(jm)}{jm} \left( \log \frac{y}{jm} \right)^\nu A(jm)B(m), \end{aligned}$$

denn, da  $B(j)$  multiplikativ und  $j$  quadratfrei ist, gilt

$$\prod_{p|j} (B(p) + 1) = \sum_{m|j} \mu^2(m)B(m) = \sum_{m|j} B(m).$$

$A(j)$  und  $\mu^2(j)$  sind multiplikativ und für  $j \leq \frac{y}{m} \leq y$  gilt

$$\left(\log \frac{y}{jm}\right)^\nu = \sum_{n=0}^{\nu} \binom{\nu}{n} \left(\log \frac{y}{m}\right)^{\nu-n} (-\log j)^n = \left(\log \frac{y}{m}\right)^\nu + O_\nu \left(\log^{\nu-1} y \log j\right).$$

Wir erhalten somit

$$J_\nu(y) = \sum_{m \leq y} \frac{\mu^2(m)}{m} A(m) B(m) \log^\nu \frac{y}{m} \sum_{\substack{j \leq y/m \\ (j,m)=1}} \frac{\mu^2(j)}{j} A(j) + O_\nu \left(|R_0| \log^{\nu-1} y\right), \quad (\text{A.6.3})$$

wobei

$$R_0 = \sum_{m \leq y} \frac{\mu^2(m)}{m} A(m) B(m) \sum_{\substack{j \leq y/m \\ (j,m)=1}} \frac{\mu^2(j)}{j} A(j) \log j.$$

Zuerst beschäftigen wir uns mit  $R_0$ . Da  $f(p) = 1 + O(p^{-c})$  gibt es eine Konstante  $M_1$  mit

$$|A(p)| = \frac{p}{p+1} |f(p) - 1| \leq \frac{M_1}{p^c} \quad (\text{A.6.4})$$

und demnach für quadratfreie  $j$

$$|A(j)| \leq \prod_{p|j} \frac{M_1}{p^c} \leq M_1^{\omega(j)} j^{-c}.$$

$\omega(j)$  bezeichnet hier wie üblich die Anzahl der Primteiler von  $j$  und es gilt ([HW88, 22.10])

$$\omega(j) \sim \frac{\log j}{\log \log j} \quad (j \rightarrow \infty).$$

Wählen wir nun ein  $j_1$  so groß, daß einerseits

$$\omega(j) \leq \frac{2 \log j}{\log \log j} \quad \text{für } j \geq j_1$$

und andererseits

$$\frac{2 \log M_1}{\log \log j} \leq \frac{c}{2} \quad \text{für } j \geq j_1,$$

dann können wir für  $j \geq j_1$  folgern

$$M_1^{\omega(j)} \leq \exp \left( \frac{2 \log j}{\log \log j} \log M_1 \right) \leq \exp \left( \frac{c}{2} \log j \right) = j^{c/2}.$$

Für alle  $j$  gilt daher mit einer geeigneten Konstanten  $M_2$

$$M_1^{\omega(j)} \leq M_2 j^{c/2}$$

und somit

$$|A(j)| \leq M_2 j^{-c/2}. \quad (\text{A.6.5})$$

Wegen (A.6.2) und (A.6.4) ist

$$|A(p)B(p)| = \prod_{p|m} \left| 1 + \frac{A(p)}{p} \right| \leq \prod_p \left( 1 + \frac{M_1}{p^{1+c}} \right) =: M_3. \quad (\text{A.6.6})$$

Das Produkt konvergiert, da  $\sum_p p^{-1-c} \leq \sum_n n^{-1-c}$  für  $c > 0$  konvergiert.

Insgesamt erhalten wir damit für eine weitere Konstante  $M_4$ , wenn wir  $m_j$  wieder durch  $j$  ersetzen,

$$|R_0| \leq M_2 \cdot M_3 \cdot \sum_{m \leq y} \frac{\mu^2(m)}{m} \sum_{\substack{j \leq y/m \\ (j,m)=1}} \frac{\mu^2(j)}{j} \cdot \frac{\log j}{j^{c/2}} \leq M_4 \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j} \ll \log y.$$

Wir haben also in (A.6.3) einen Fehlerterm der Größe  $O_\nu(\log^\nu y)$  vorliegen.

In ähnlicher Weise werten wir nun den Hauptteil in (A.6.3) aus, da wir jedoch sehr viel mehr als nur eine implizite  $O$ -Konstante suchen, sind etwas größere Anstrengungen erforderlich. Sei zur Abkürzung

$$I_\nu(y) = \sum_{m \leq y} \frac{\mu^2(m)}{m} A(m)B(m) \left( \log \frac{y}{m} \right)^\nu \sum_{\substack{j \leq y/m \\ (j,m)=1}} \frac{\mu^2(j)}{j} A(j). \quad (\text{A.6.7})$$

Bislang haben wir also gezeigt, daß

$$J_\nu(y) = I_\nu(y) + O_\nu(\log y). \quad (\text{A.6.8})$$

Betrachten wir zuerst die innere Summe in  $I_\nu(y)$ . Es gilt

$$\sum_{\substack{j \leq y/m \\ (j,m)=1}} \frac{\mu^2(j)}{j} A(j) = \sum_{\substack{j=1 \\ (j,m)=1}}^{\infty} \frac{\mu^2(j)}{j} A(j) - R_1,$$

wobei nach (A.6.5)

$$|R_1| \leq M_2 \sum_{j > y/m} \frac{\mu^2(j)}{j} j^{-c/2} \leq M_2 \sum_{j \geq y/m} j^{-1-c/2}.$$

Wie am Ende des Beweises von Lemma 3.4.2 folgern wir

$$\sum_{j \geq y/m} j^{-1-c/2} = O_c \left( \left( \frac{m}{x} \right)^{1+c/2} \right) \quad (\text{A.6.9})$$

und somit existiert eine Konstante  $M_5 = M_5(c)$ , so daß

$$|R_1| \leq M_5 \left( \frac{m}{x} \right)^{c/2}. \quad (\text{A.6.10})$$

Des weiteren gilt

$$\sum_{\substack{j=1 \\ (j,m)=1}}^{\infty} \frac{\mu^2(j)}{j} A(j) = \prod_{\substack{p \\ p \nmid m}} \left(1 + \frac{A(p)}{p}\right) = \prod_p \left(1 + \frac{A(p)}{p}\right) \cdot \prod_{p|m} \left(1 + \frac{A(p)}{p}\right)^{-1}.$$

Die Konvergenz des Produkts haben wir uns bereits in (A.6.6) überlegt. Deshalb, wegen (A.6.7) und aufgrund der Definitionen von  $A(m)$  und  $B(m)$ , folgt

$$I_\nu(y) = \prod_p \left(1 + \frac{A(p)}{p}\right) \cdot \sum_{m \leq y} \frac{\mu^2(m)}{m} \left(\log \frac{y}{m}\right)^\nu \prod_{p|m} \frac{A(p)B(p)}{1 + \frac{1}{p}A(p)} + R_2, \quad (\text{A.6.11})$$

wobei wegen (A.6.10)

$$\begin{aligned} |R_2| &\leq \sum_{m \leq y} \frac{\mu^2(m)}{m} |A(m)B(m)| \left(\log \frac{y}{m}\right)^\nu |R_1| \\ &\leq M_5 y^{-c/2} \sum_{m \leq y} \frac{\mu^2(m)}{m^{1-c/2}} |A(m)B(m)| \left(\log \frac{y}{m}\right)^\nu. \end{aligned}$$

Wir verwenden (A.6.6) und erhalten, da  $\sum_{m \leq x} m^{-1+\delta} \ll_\delta x^\delta$  (partielle Summation)

$$|R_2| \leq M_3 \cdot M_5 \cdot y^{-c/2} (\log y)^\nu \sum_{m \leq y} m^{-1+c/2} \ll_c (\log x)^\nu.$$

Nach (A.6.2) ist  $A(p)B(p) = 1 + p^{-1}A(p)$ , das innere Produkt über alle  $p|m$  in (A.6.11) fällt daher weg und wir haben

$$I_\nu(y) = \prod_p \left(1 + \frac{A(p)}{p}\right) \cdot \sum_{m \leq y} \frac{\mu^2(m)}{m} \left(\log \frac{y}{m}\right)^\nu + O_c(\log^\nu y). \quad (\text{A.6.12})$$

Aus  $\sum_{n^2|m} \mu(n) = \mu^2(m)$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$  für  $\sigma > 1$ , folgt

$$\sum_{m \leq y} \frac{\mu^2(m)}{m} = \sum_{m \leq y} \frac{1}{m} \sum_{n^2|m} \mu(n) = \sum_{i \leq y} \frac{1}{i} \sum_{n^2 \leq x/i} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} \log y + O(1) - R_3,$$

wobei, wegen  $\sum_{n \geq x} n^{-2} \ll x^{-1}$  (vgl. (A.6.9)) und  $\sum_{i \leq y} i^{-1/2} \ll y^{1/2}$  (partielle Summation),

$$|R_3| \leq \sum_{i \leq y} \frac{1}{i} \sum_{n > \sqrt{x/i}} \frac{1}{n^2} \ll \sum_{i \leq y} \frac{1}{i} \left(\frac{i}{y}\right)^{1/2} \ll 1.$$

Wir haben also

$$\sum_{m \leq y} \frac{\mu^2(m)}{m} = \frac{1}{\zeta(2)} \log y + O(1). \quad (\text{A.6.13})$$

Den uns noch störenden Term  $(\log \frac{y}{m})^\nu$  in (A.6.12) beseitigen wir durch partielle Summation. Es gilt

$$\frac{d}{d\xi} \left( \log \frac{x}{\xi} \right)^\nu = -\frac{\nu}{\xi} \left( \log \frac{x}{\xi} \right)^{\nu-1} \quad \text{und} \quad \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{\nu+1} \left( \log \frac{x}{\xi} \right)^{\nu+1} \right) = -\frac{1}{\xi} \left( \log \frac{x}{\xi} \right)^\nu$$

und daher ist wegen (A.6.13)

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq y} \frac{\mu^2(m)}{m} \left( \log \frac{y}{m} \right)^\nu &= \nu \int_1^y \left( \sum_{m \leq \xi} \frac{\mu^2(m)}{m} \right) \left( \log \frac{y}{\xi} \right)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\xi} d\xi \\ &= \frac{\nu}{\zeta(2)} \int_1^y \frac{\log \xi}{\xi} \left( \log \frac{y}{\xi} \right)^{\nu-1} d\xi + O \left( \nu \int_1^y \left( \log \frac{y}{\xi} \right)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\xi} d\xi \right) \\ &= \frac{1}{\zeta(2)} \int_1^y \frac{1}{\xi} \left( \log \frac{y}{\xi} \right)^\nu d\xi + O(\log^\nu y) \\ &= \frac{1}{\zeta(2)} \cdot \frac{1}{\nu+1} (\log y)^{\nu+1} + O(\log^\nu y). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir demnach aus (A.6.8), (A.6.12) und dem soeben Hergeleiteten

$$J_\nu(y) = \prod_p \left( 1 + \frac{A(p)}{p} \right) \cdot \frac{1}{\zeta(2)} \cdot \frac{1}{\nu+1} (\log y)^{\nu+1} + O_{c,\nu}(\log^\nu y).$$

Da aufgrund von (A.6.1) und (A.6.2)

$$1 + \frac{A(p)}{p} = 1 + \frac{f(p) - 1}{p + 1},$$

folgt die Behauptung. □

## A.7 Beweis von Lemma 4.2.1

**Lemma 4.2.1** Für  $\sigma \geq \sigma_0 > 0$ ,  $|t| > t_0$  und  $k < k_0$  gilt

$$\zeta^{(k)}(s) = O_{k_0, \sigma_0, t_0}(|t|^{1/2}).$$

**Beweis:** Für  $k = 0$  ist die Behauptung bekannt (vgl. [Ivi85, Thm. 1.9]), sei also  $k \geq 1$  und sei vorerst stets  $\sigma > 1$ . Dann gilt

$$\zeta^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{n^s}$$

und partielle Summation (vgl. [Pra78, Anhang, S.1.5]) liefert

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\log^k n}{n^s} = \int_N^{\infty} \frac{\log^k x}{x^s} dx + \int_N^{\infty} \{x\} \frac{(\log x)^{k-1} (k - s \log x)}{x^{s+1}} dx + \frac{\log^k N}{N^s},$$

wobei  $\{x\} = x - [x]$ . Es folgt

$$(-1)^k \zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^N \frac{\log^k n}{n^s} + \int_N^\infty \frac{\log^k x}{x^s} dx + \int_N^\infty \{x\} \frac{(\log x)^{k-1} (k - s \log x)}{x^{s+1}} dx \quad (\text{A.7.1})$$

Betrachten wir das erste Integral. Wiederholte partielle Integration (vgl. (3.3.34)) liefert uns für  $\sigma > 1$

$$\begin{aligned} \int_N^\infty (\log x)^k x^{-s} dx &= \sum_{n=0}^k (-1)^n k(k-1) \cdots (k-n+1) \cdot (\log N)^{k-n} \frac{N^{1-s}}{(1-s)^{n+1}} \\ &= \frac{N^{1-s}}{(1-s)^{k+1}} \cdot P_k((1-s) \log N), \end{aligned} \quad (\text{A.7.2})$$

wobei  $P_k$  das geeignete Polynom mit  $\deg P_k = k$  bezeichnet.

Das zweite Integral in (A.7.1) konvergiert für alle  $s$  mit  $\sigma > 0$  und daher gilt die Darstellung (A.7.1) im Bereich  $\sigma > 0$ . Aus (A.7.2) folgt deshalb

$$\begin{aligned} \left| \int_N^\infty \{x\} \frac{(\log x)^{k-1} (k - s \log x)}{x^{s+1}} dx \right| &\leq \left| k \int_N^\infty \frac{\log^{k-1} x}{x^{s+1}} dx \right| + \left| s \int_N^\infty \frac{\log^k x}{x^{s+1}} dx \right| \\ &\leq k \cdot \frac{N^{-\sigma}}{|s|^k} |P_{k-1}(-s \log N)| + |s| \cdot \frac{N^{-\sigma}}{|s|^{k+1}} |P_k(-s \log N)|. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt aus (A.7.1) für  $k \leq k_0$ ,  $\sigma \geq \sigma_0$  und, da  $\sum_{1 \leq n \leq x} n^{-\sigma_0} \ll x^{1-\sigma_0}$ , wenn wir oBdA  $0 < \sigma_0 < 1$  annehmen,

$$\begin{aligned} |\zeta^{(k)}(s)| &\ll_{k_0} (\log N)^k \left( \sum_{n=1}^N n^{-\sigma} + |1-s|^{-1} N^{1-\sigma_0} + |s|^{-1} N^{-\sigma_0} + N^{-\sigma_0} \right) \\ &\ll_{k_0, t_0} N^{1-\sigma_0} \log^k N. \end{aligned}$$

Wählen wir jetzt  $N = \lceil |t|^{1/2} \rceil$ , so folgt

$$\zeta^{(k)}(s) \ll_{k_0, \sigma_0, t_0} |t|^{1/2}$$

für  $\sigma \geq \sigma_0 > 0$ ,  $|t| > t_0$  und  $k \leq k_0$ . □



## Anhang B

# Das Programm

In diesem Anhang wird das Programm SUCHEO aufgelistet, mit dem die numerischen Werte aus Korollar 2.2.2 berechnet wurden. Das Programm ist in FORTRAN 77 geschrieben und weitgehend selbsterklärend.

Die Programme zur Berechnung der Schranken aus Korollar 2.2.4 oder der Abschätzungen für  $\alpha_0$  und  $\alpha_0^{(1)}$  aus Kapitel 5 sind analog aufgebaut, es handelt sich um Modifikationen des hier abgedruckten Programms.

Dem Listing folgen als Beispiele die Ausgaben zweier Programmläufe für die Fälle  $m = 0$  und  $m = 1$ .

### B.1 Programmlisting

Programm SUCHEO
<pre> c Programm  SUCHEO  c Programm zur Berechnung einer moeglichst grossen c unteren Schranke fuer den Anteil der Nullstellen c der Ableitungen der Riemannschen Zeta-Funktion, c die auf der kritischen Geraden liegen  c Hauptprogramm c c Typdefinitionen c   d&lt;=10 und 2d-1+m&lt;=19 wird vorausgesetzt ! c   integer i,j,k,d,m,ds,bin(0:19,0:19),anz,zufall,nfail,nok c   double precision xmax(11),fmax,s(11),smax(11) c   common /param/ d,m,ds,bin c </pre>

## Programm SUCHE0 (Fortsetzung)

```
c NAG-Zufallsgenerator
  double precision G05CAF
c
c Variablen fuer Minimierungsprogramm
  integer n,ibound,iw(13),liw,lw,ifail
  double precision bl(11),bu(11),x(11),f,w(187)
c
c Einlesen der Parameter d,m,anz,zufall
  read(1,99999) d,m
  read(1,99999) anz,zufall
99999 format(2i5)
  ds=2*d-1+m
  if (d.lt.1) stop ' d zu klein ! '
  if (d.gt.10) stop ' d zu gross ! '
  if (m.lt.0) stop ' m zu klein ! '
  if (ds.gt.19) stop ' d, m zu gross ! '
c
c Initialisierungen
  n=d+1
  nfail=0
  nok=0
  fmax=1.0d+20
  call G05CBF(zufall)
c
c Berechnung der Binomialkoeffizienten
  do 10 i=0,19
    bin(i,0)=1
    bin(i,i)=1
    do 10 j=1,i-1
      bin(i,j)=bin(i-1,j-1)+bin(i-1,j)
10  continue
c
c Parameter fuer Minimierungsprogramm
  ibound=0
  bl(1)=1.0d-10
  bu(1)=1.0d+1
  do 20 i=2,n
    bl(i)=-1.0d+2
    bu(i)=1.0d+2
20  continue
  liw=13
```

## Programm SUCHE0 (Fortsetzung)

```
      lw=187
c
c Ausgaben
  write(*,*)
  write(*,*) '      Eingabedaten'
  write(*,*) '      ~~~~~',
  write(*,*) ' m =',m,'          d =',d
  write(*,*) ' anz=',anz,'      zufall=',zufall
  write(*,*)
  write(*,*) '      Programmausgaben'
  write(*,*) '      ~~~~~',
c
c Hauptschleife
  do 70 k=1,anz
c
c Wahl der Startwerte
  do 60 i=2,n
    x(i)=G05CAF(1.0d+0)*25*(-1)**i
    s(i)=x(i)
60  continue
  x(1)=G05CAF(1.0d+0)*5.0d+0
  x(1)=dmax1(dabs(x(1)),1.1d-10)
  s(1)=x(1)
c
c Aufruf des Minimierungsprogramms
  ifail=1
  call E04JAF(n,ibound,bl,bu,x,f,iw,liw,w,lw,ifail)
  if (f.lt.fmax) then
    do 30 i=1,n
      xmax(i)=x(i)
      smax(i)=s(i)
30  continue
    fmax=f
  endif
  if (ifail.eq.1) then
    nfail=nfail+1
  else
    nok=nok+1
  endif
c
70  continue
```

Programm SUCHEO (Fortsetzung)

```

c
c Ergebnisausgabe
  write(*,*)
  write(*,*) '=====',
  write(*,*)
  write(*,*) ' fehlerhafte Optimierungen : ',nfail
  write(*,*) '  korrekte Optimierungen : ',nok
  write(*,*)
  write(*,*) '-----',
  write(*,*)

c
  write(6,99994) m,d,1-fmax
99994 format(' Maximum fuer m=',i2,' und d=',i2,' ist : ',g20.8)
  write(6,*) ' an der Stelle :'
  write(6,99996) xmax(1)
99996 format(' R=',g20.8)
  write(6,99995) (i-1,xmax(i),i=2,n)
99995 format(' beta(',i2,')=',g20.8)
  write(6,*)
  write(6,*) ' gewaehlte Startwerte zur Optimierung :'
  write(6,99996) smax(1)
  write(6,99995) (i-1,smax(i),i=2,n)
  write(*,*)
  write(*,*) '=====',
  end

c
c
c Unterprogramme
c
c Definition der zu minimierenden Funktion
c
  subroutine funct1(n,xc,fc)
  integer n
  double precision fc,xc(n)

c
c lokale Variablen
  integer i,j,d,m,ds,bin(0:19,0:19)
  double precision sigma,e,phi1,alpha(0:19)
  double precision beta(0:10),r,psi,psis
  double precision lambda,f,coth
  common /param/ d,m,ds,bin

```

## Programm SUCHEO (Fortsetzung)

```
c
c lok. Variablen fuer Integrationsroutine
  integer npts,nlimit,ifail,up
  double precision a,b,epsr,relerr
  common /igral/ r,alpha,up
c
c NAG-Integrationsroutine
  double precision D01AHF
c
c Integranden
  external fkt0,fkt1
c
c
c Initialisierung
  r=xc(1)
  do 50 i=1,d
    beta(i)=xc(i+1)
50  continue
c
c Vorberechnungen
  sigma=beta(1)
  do 100 i=2,d
    sigma=sigma+beta(i)
100 continue
  beta(0)=1-sigma
  e=dexp(2*r)
  phi1=1-2*sigma
c
c Berechnung der Koeffizienten von phim
  alpha(0)=1.0d+0
  do 200 i=1,ds
    if (m.lt.i) then
      alpha(i)=0.0d+0
    else
      alpha(i)=bin(m,i)*beta(0)
    endif
  do 300 j=1,d
    if (2*j.ge.i+1-m) then
      alpha(i)=alpha(i)+bin(2*j-1+m,i)*beta(j)
    endif
300 continue
```

Programm SUCHE0 (Fortsetzung)

```

        alpha(i)=alpha(i)*(-2)**i
200  continue
c
c Berechnung des Integrals psi
    up=ds
    a=0.0d+0
    b=1.0d+0
    nlimit=30000
    epsr=1.0d-10
    ifail=0
    psi=D01AHF(a,b,epsr,npts,relerr,fkt0,nlimit,ifail)
c
c Berechnung des Integrals psi'
    ifail=0
    psis=D01AHF(a,b,epsr,npts,relerr,fkt1,nlimit,ifail)
c
c Berechnung von lambda und F(m,phi)
    lambda=dsqrt((psis+r*(e*phi1**2-1)-r**2*psi)/(4*psi))
    coth=1/dtanh(lambda)
    f=2*psi*lambda*coth+(e*phi1**2+1)/2
c
c Rueckgabe des Funktionswertes
    fc=dlog(f)/r
    return
end
c
c
c
c Integrandendefinition
    double precision function fkt0(x)
    double precision x
c
c lokale Variablen
    integer i,up
    double precision f,r,alpha(0:19)
    common /igral/ r,alpha,up
c
    f=0.0d+0
    do 1 i=0,up
        f=f+alpha(i)*x**i
1    continue

```

## Programm SUCHE0 (Fortsetzung)

```
fkt0=dexp(2*r*x)*f**2
return
end
c
c
double precision function fkt1(x)
double precision x
c
c lokale Variablen
integer i,up
double precision f,r,alpha(0:19)
common /igral/ r,alpha,up
c
f=0.0d+0
do 2 i=1,up
  f=f+alpha(i)*i*x**(i-1)
2 continue
fkt1=dexp(2*r*x)*f**2
return
end
c
c *****
```

## B.2 Programmausgaben

```

                                Abschätzung von  $\alpha_0$ 
-----
      Eingabedaten
      ~~~~~

      m =          0          d =          5
      anz=         1          zufall=       3141

      Programmausgaben
      ~~~~~

=====

      fehlerhafte Optimierungen :          0
      korrekte  Optimierungen :          1

-----

      Maximum fuer m= 0  und d= 5 ist :          .36581586
      an der Stelle :
      R=          1.4760924
      beta( 1)=          .67103125
      beta( 2)=          -.26415943
      beta( 3)=          .15850922
      beta( 4)=          -.69562664-001
      beta( 5)=          .15669665-001

      gewaehlte Startwerte zur Optimierung :
      R=          1.3736738
      beta( 1)=          19.106214
      beta( 2)=          -4.5348100
      beta( 3)=          18.848447
      beta( 4)=          -22.383706
      beta( 5)=          3.8405566

=====
```

```

                                Abschätzung von  $\alpha_1$ 
-----
      Eingabedaten
      ~~~~~
      m =           1           d =           7
      anz=          5           zufall=        3141

      Programmausgaben
      ~~~~~

=====

      fehlerhafte Optimierungen :           0
      korrekte Optimierungen :           5

-----

      Maximum fuer m= 1 und d= 7 ist :           .81568226
      an der Stelle :
      R=           1.2145657
      beta( 1)=           1.2617328
      beta( 2)=           -3.8172995
      beta( 3)=           10.302836
      beta( 4)=           -16.064069
      beta( 5)=           13.888409
      beta( 6)=           -6.1085159
      beta( 7)=           1.0392884

      gewaehlte Startwerte zur Optimierung :
      R=           4.3658648
      beta( 1)=           6.5616835
      beta( 2)=           -14.451989
      beta( 3)=           23.786566
      beta( 4)=           -18.313065
      beta( 5)=           14.232629
      beta( 6)=           -.85306487
      beta( 7)=           15.134421

=====

```



# Literaturverzeichnis

- [And83] R. J. ANDERSON. *Simple zeros of the Riemann Zeta-function*. J. Number Theory **17**, (1983), pp. 176–182.
- [Apo74] T. M. APOSTOL. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley Publ. Comp., Inc., Reading, Mass., 1974.
- [Apo76] ———. *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*. Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1976.
- [BCHB85] R. BALASUBRAMANIAN, J. B. CONREY, D. R. HEATH-BROWN. *Asymptotic mean square of the product of the Riemann zeta-function and a Dirichlet polynomial*. J. reine angew. Math. **357**, (1985), pp. 161–181.
- [Bom76] E. BOMBIERI. *A lower bound for the zeros of Riemann's Zeta function on the critical line*. In: Séminaire Bourbaki (Exposé 465), Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976, pp. 176–181.
- [Con80] J. B. CONREY. *Zeros of derivatives of Riemann's Xi-function on the critical line*. Dissertation, The University of Michigan, 1980.
- [Con83a] ———. *Zeros of derivatives of Riemann's Xi-function on the critical line*. J. Number Theory **16**, (1983), pp. 49–74.
- [Con83b] ———. *Zeros of derivatives of Riemann's Xi-function on the critical line II*. J. Number Theory **17**, (1983), pp. 71–75.
- [Con89] ———. *More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line*. J. reine angew. Math. **399**, (1989), pp. 1–26.
- [DI82] J.-M. DESHOULLERS, H. IWANIEC. *Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms*. Invent. math. **70**, (1982), pp. 219–288.
- [DI84] ———, ———. *Power mean-values for Dirichlet's polynomials and the Riemann zeta-function II*. Acta Arith. **XLIII**, (1984), pp. 305–312.
- [dIVP96] C.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN. *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, Première partie*. Ann. Soc. Sci. Buxelles **20**, no. 2, (1896), pp. 183–256.
- [dIVP00] ———. *Sur la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée*. Mém. couronnés et autres mém. Acad. Roy. Sci. Belgique **59**, no. 1, (1899/1900).

- [Eul48] L. EULER. *Introductio in Analysin Infinitorum, Tomus Primus*. Bousquet & Socios, Lausanne, 1748.
- [GF63] I. M. GELFAND, S. V. FOMIN. *Calculus of Variations*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1963.
- [Had96] J. HADAMARD. *Sur la distribution des zéros de la fonction  $\zeta(s)$  et ses conséquences arithmétique*. Bull. Soc. Math. France **24**, (1896), pp. 199–220.
- [Haf83] J. L. HAFNER. *Zeros on the critical line for Dirichlet series attached to certain cusp forms*. Math. Ann. **264**, (1983), pp. 21–37.
- [Har14] G. H. HARDY. *Sur les zéros de la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann*. Comptes Rendus **158**, (1914), pp. 1012–1014.
- [HB79] D. R. HEATH-BROWN. *Simple zeros of the Riemann Zeta-function on the critical line*. Bull. London Math. Soc. **11**, (1979), pp. 17–18.
- [Hec37] E. HECKE. *Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung*. Math. Ann. **114**, (1937), pp. 1–28.
- [HL21] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD. *The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line*. Math. Zeit. **10**, (1921), pp. 283–317.
- [Hoo78] C. HOOLEY. *On the greatest prime factor of a cubic polynomial*. J. reine angew. Math. **303/304**, (1978), pp. 21–50.
- [HW88] G. H. HARDY, E. M. WRIGHT. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Clarendon Press, Oxford, 5. Aufl., 1988.
- [Ivi85] A. IVIĆ. *The Riemann Zeta-Function*. John Wiley & Sons, New York, 1985.
- [Kam59] E. KAMKE. *Differentialgleichungen I*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 6. Aufl., 1959.
- [Lan74] E. LANDAU. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. Chelsea Publ. Comp., New York, 1974.
- [Lek55] C. G. LEKKERKERKER. *On the zeros of a class of Dirichlet series*. Dissertation, Utrecht Rijksuniversiteit, Assen, 1955.
- [Lev74a] N. LEVINSON. *More than one third of zeros of Riemann's Zeta-function are on  $\sigma = 1/2$* . Adv. Math. **13**, (1974), pp. 383–436.
- [Lev74b] ——. *Zeros of derivative of Riemann's  $\xi$ -function*. Bull. AMS **80**, no. 5, (1974), pp. 951–954.
- [Lev75a] ——. *Deduction of semi-optimal mollifier for obtaining lower bound for  $N_0(T)$  for Riemann's Zeta-function*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **72**, no. 1, (1975), pp. 294–297.
- [Lev75b] ——. *A simplification in the proof that  $N_0(T) > (1/3)N(T)$  for Riemann's Zeta-function*. Adv. Math. **18**, (1975), pp. 239–242.

- [Lou79] LOU S.-T. *A lower bound for the number of zeros of Riemann's Zeta-function on  $\sigma = 1/2$* . In: Recent Progress in Number Theory, vol. 1, Symp. Durham, 1979, pp. 319–324.
- [LR70] N. LEVINSON, R. REDHEFFER. *Complex Variables*. Holden-Day, Inc., San Francisco, 1970.
- [Mon72] H. L. MONTGOMERY. *The pair correlation of zeros of the zeta function*. In: Analytic Number Theory, Symp. St. Louis, 1972, pp. 181–193.
- [NAG86] NUMERICAL ALGORITHM GROUP. *The NAG Fortran Library Manual — Mark 11*. Oxford, 1986.
- [Pan79] PAN C.-B. *A simplification of the proof of Levinson's theorem*. Acta math. Sinica **22**, (1979), pp. 344–353. (chinesisch).
- [Pra78] K. PRACHAR. *Primzahlverteilung*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1978.
- [Rie59] B. RIEMANN. *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*. Monatsber. Akad. Berlin, (1859), pp. 671–680.
- [Rud87] W. RUDIN. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Inc., New York, 1987.
- [Sel42] A. SELBERG. *On the zeros of Riemann's Zeta-function*. Skr. Norske Videnskaps-Akad. Oslo, I., **10**, (1942), pp. 1–59.
- [Sel46] ——. *The Zeta-function and the Riemann Hypothesis*. In: Det 10. Skandinaviske Matematiker Kongres, Kopenhagen, 1946, pp. 187–200.
- [Sie32] C. L. SIEGEL. *Über Riemann's Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie*. Quellen Stud. Geschichte Math. Astron. Phys., Abt. B, Stud. **2**, (1932), pp. 45–80.
- [Tit51] E. C. TITCHMARSH. *The Theory of the Riemann Zeta-Function*. Oxford University Press, London, 1951.
- [vM95] H. VON MANGOLDT. *Zu Riemann's Abhandlung „Über die Anzahl ...“*. Crelles J. **114**, (1895), pp. 255–305.