

# Nichtlineare Differenzengleichungen und Bevölkerungswachstum

Andreas Hock

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Lineare Modelle</b>	<b>2</b>
1.1	Diskrete Modelle . . . . .	2
1.2	Beispiel: Zellteilung unter Laborbedingungen . . . . .	2
1.3	Geburten und Sterbefälle . . . . .	2
1.4	Die Wachstumsrate $r$ . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Nichtlineares Populationsmodell – beschränktes Wachstum</b>	<b>4</b>
2.1	Der Sättigungswert $K$ . . . . .	4
2.2	Die variable Wachstumsrate $R(N_k)$ . . . . .	5
2.3	Die diskrete logistische Gleichung . . . . .	6
2.4	Eigenschaften der diskreten logistischen Differenzgleichung . . . . .	6
2.4.1	Gleichgewichtszustände . . . . .	6
2.4.2	Zuwachs . . . . .	6
2.4.3	Der Fall $r > 3$ . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Numerische Betrachtung der logistischen Differenzgleichung</b>	<b>8</b>
3.1	Stabiles Wachstum . . . . .	8
3.1.1	$0 < r \leq 1$ . . . . .	8
3.1.2	$1 < r \leq 2$ . . . . .	9
3.2	Zyklisches Wachstum ( $2 < r < 2.57$ ) . . . . .	10
3.3	Chaotisches Wachstum ( $2.57 < r \leq 3$ ) . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Das Feigenbaum-Diagramm</b>	<b>12</b>

Zu linearen Differenzengleichungen kann leicht eine geschlossene Lösung gefunden werden. Versucht man mit ihnen Bevölkerungswachstum zu modellieren, entsprechen ihre

Lösungen allerdings oft nicht den tatsächlichen Beobachtungen. Daher sollen an dieser Stelle auch nichtlineare Differenzgleichungen betrachtet werden, insbesondere ihre einfachste Form, die *diskrete logistische Gleichung*.

## 1 Lineare Modelle

### 1.1 Diskrete Modelle

Viele Tiere brüten nicht das ganze Jahr über, sondern nur während einer kurzen, klar definierten Brutsaison (z.B. jeden Frühling). Daher ist es sinnvoll, die Zeit *diskret* zu messen, d.h. man beschränkt sich darauf, die einzelnen Brutzeiten abzuzählen, anstatt Veränderungen in der Population kontinuierlich über das ganze Jahr zu beobachten und zu modellieren.

### 1.2 Beispiel: Zellteilung unter Laborbedingungen

In der Natur konkurrieren verschiedene Spezies häufig um dieselben Nahrungsquellen oder haben Fressfeinde. Im Labor hingegen kann eine einzelne Spezies isoliert betrachtet werden. Im Folgenden wollen wir die Zellteilung von *Hefezellen* unter Laborbedingungen betrachten. Dazu werden Temperatur und Verfügbarkeit der Nährlösung so eingestellt, dass sich die Hefezellen mit einer konstanten Rate vermehren.

**Beispiel.** Angenommen, eine einzelne Hefezelle teilt sich jede Minute. Wenn keine der Zellen ausstirbt, wie viele Minuten dauert es dann, bis mehr als eine Million Zellen vorhanden sind?

Dazu messen wir die Zeit diskret, d.h. als ganzzahliges Vielfaches einer Minute. Sei dann  $N_k$  die Anzahl der Hefezellen nach  $k$  Minuten. Eine Minute später gilt dann:

$$N_{k+1} = 2N_k \text{ mit } N_0 = 1$$

Durch Induktion erhält man sofort die geschlossene Lösung dieser linearen Differenzgleichung 1. Ordnung:

$$N_k = 2^k N_0 = 2^k$$

Wir wollen also  $k$  so berechnen, dass  $N_k \geq 10^6$ . Durch Logarithmieren erhält man:

$$k \geq \frac{6 \log(10)}{\log(2)} \approx 19,93.$$

Nach zwanzig Minuten sind also bereits mehr als eine Million Zellen entstanden!

### 1.3 Geburten und Sterbefälle

Im bisherigen Modell wurde nur der Fall betrachtet, dass in jeder Brutsaison jedes vorhandene Populationsmitglied durch zwei neue ersetzt wird, es aber sonst keine Todesfälle

in der Population gibt. Im Tierreich jedoch trifft man eher den Fall an, dass ein Individuum sich über mehrere Brutzeiten hinweg fortpflanzen kann, dann jedoch stirbt. Um eine solche Tierpopulation zu modellieren, müssen daher auch Geburten und Sterbefälle in jeder Brutzeit mitberücksichtigt werden. Zur Vereinfachung vereinbart man einige Annahmen:

- Man betrachtet nur Populationen, die genügend groß sind, sodass man individuelle Unterschiede zwischen einzelnen Tieren vernachlässigen kann:
  - Jedes Individuum hat daher in jeder Brutsaison die gleiche Anzahl an Nachkommen.
  - Jedes Individuum stirbt in jeder Brutzeit mit der gleichen Wahrscheinlichkeit (bzw. überlebt mit der Gegenwahrscheinlichkeit).
- Das Verhältnis zwischen männlichen und weiblichen Tieren bleibt annähernd konstant.
- Altersunterschiede zwischen einzelnen Tieren sollen vernachlässigt werden.
- Die betrachtete Bevölkerung lebt isoliert, d.h. es findet kein Zuzug und kein Wegzug statt.

Auf dieser Basis setzt man nun:

**Definition.** Sei  $\alpha$  die Anzahl der Nachkommen pro Individuum in jeder Brutsaison. Man nennt  $\alpha$  die *Pro-Kopf-Geburtenrate*.

Sei  $\beta$  die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Individuum in der betrachteten Brutsaison stirbt. Man nennt  $\beta$  auch die *Pro-Kopf-Sterberate*.

Mit dieser Definition ist klar, dass gilt:

- Die Anzahl der Individuen, die in jeder Brutsaison geboren werden und sterben, ist proportional zur Populationsgröße zu Beginn dieser Brutzeit.

## 1.4 Die Wachstumsrate $r$

Man stellt nun ein erstes, lineares Modell auf Basis dieser Annahmen und Beobachtungen auf:

Sei  $N_k$  die Anzahl der Individuen in der  $k$ -ten Brutsaison. Für die nächste Brutzeit gilt dann:

$$N_{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Aktuelle Anzahl} \\ \text{an Individuen} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Anzahl der} \\ \text{Todesfälle} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Anzahl der} \\ \text{Geburten} \end{array} \right\}$$

Mit den bekannten Definitionen wird dies zu

$$\begin{aligned} N_{k+1} &= N_k - \beta N_k + \alpha N_k \\ &= (1 + \alpha - \beta) N_k . \end{aligned} \tag{1}$$

Als geschlossene Lösung erhält man aus (1) sofort durch Induktion:

$$N_k = (1 + \alpha - \beta)^k N_0 \tag{2}$$

Dieses Modell basiert also auf der Größe

$$r = \alpha - \beta, \quad (3)$$

man nennt  $r$  auch *Wachstumsrate*. Es ist klar, dass für  $r > 0$  die Population ins Unendliche wächst, für  $r < 0$  dagegen aussterben wird (s. Abbildung 1). In der Natur

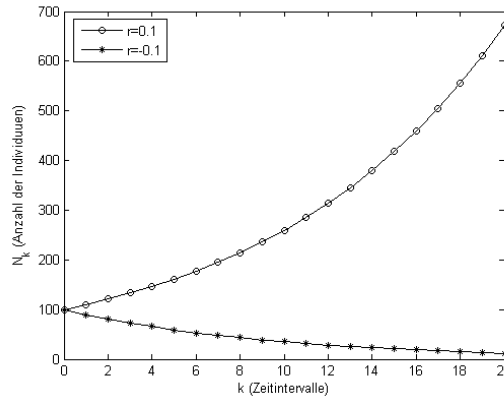


Abbildung 1: Lineares Wachstum für  $r = 0.1$  und  $r = -0.1$

beobachtet man allerdings selten ein solches Verhalten, besonders das unbeschränkte Wachstum erscheint unrealistisch.

## 2 Nichtlineares Populationsmodell – beschränktes Wachstum

Im nächsten Schritt wird daher versucht, das bisherige Modell so abzuändern, dass es sich besser mit praktischen Beobachtungen deckt.

### 2.1 Der Sättigungswert $K$

Beobachtet man Populationen unter Laborbedingungen, sodass die in Abschnitt 1.3 genannten Annahmen zutreffen, so stellt man fest, dass mit steigender Gesamtbevölkerungszahl die Pro-Kopf-Sterberate zu- und die Pro-Kopf-Geburtenrate abnimmt. Man schreibt dies Effekten durch Übervölkerung und Konkurrenz um Nahrung zu.

Betrachtet man z.B. verschiedene Käferpopulationen wie in Abbildung 2, so scheint es in den ersten beiden Fällen jeweils eine bestimmte Bevölkerungsgröße zu geben, die für die vorgegebenen Umweltbedingungen charakteristisch ist. Man spricht vom *Sättigungswert*. Hat eine Bevölkerung ihren Sättigungswert erreicht, so sollten sich Sterbe- und Geburtenrate ungefähr die Waage halten; die Population befindet sich in einem Gleichgewichtszustand. Im dritten Fall hingegen scheint sich die Käferpopulation zufällig zu verändern; diesen Fall wollen wir später gesondert untersuchen.

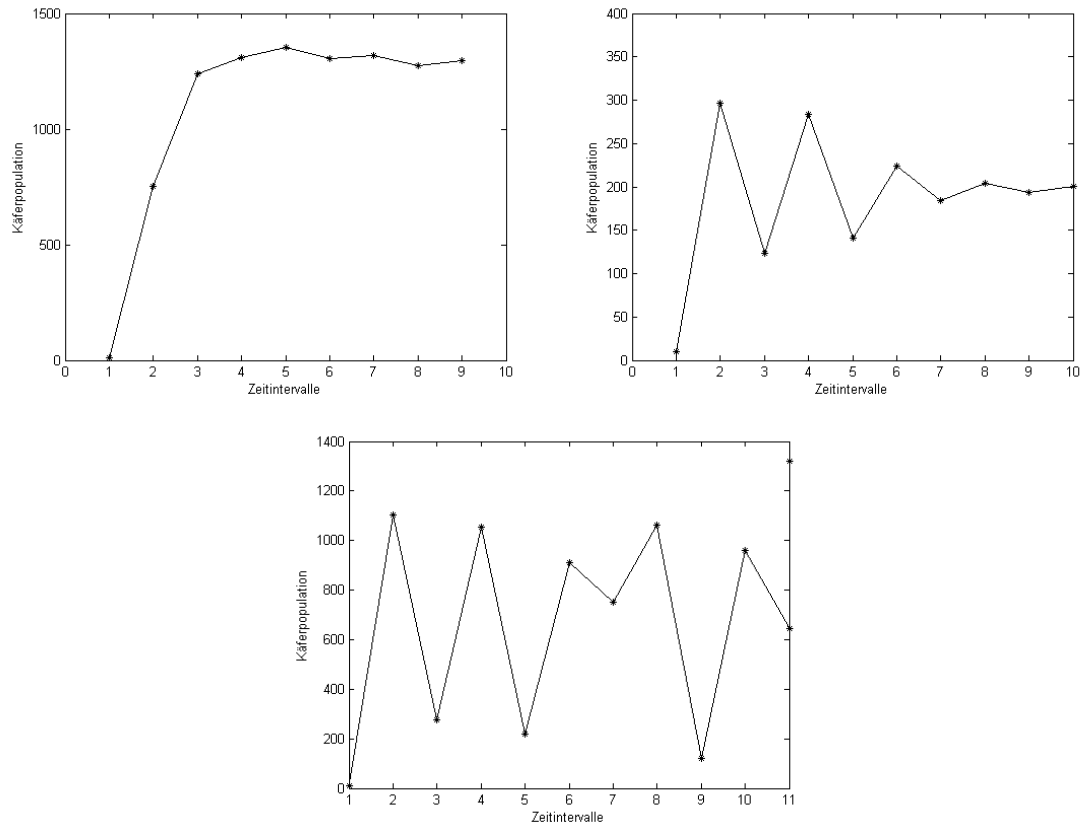


Abbildung 2: Verschiedene Käferpopulationen

## 2.2 Die variable Wachstumsrate $R(N_k)$

Um das Modell aus Abschnitt 1.4 so zu erweitern, dass es das gewünschte Sättigungsverhalten zeigt, ersetzt man in der Gleichung

$$N_{k+1} = N_k + rN_k$$

die (konstante) Wachstumsrate  $r$  durch eine veränderliche Wachstumsrate  $R(N_k)$ , die eine Funktion der Bevölkerungszahl  $N_k$  ist:

$$N_{k+1} = N_k + R(N_k)N_k \quad (4)$$

An diese Funktion  $R(N_k)$  stellt man einige Forderungen:

- Durch Überbevölkerungseffekte soll mit steigendem  $N_k$  die Wachstumsrate  $R(N_k)$  abnehmen.
- Ist der Sättigungswert  $K$  erreicht (d.h. gilt  $N_k = K$ ), so soll  $R(K) = 0$  gelten, d.h. erreicht eine Bevölkerung ihren Sättigungswert, so sollte sie sich in einem Gleichgewichtszustand befinden.
- Für  $N_k \rightarrow 0$  nehmen die Effekte durch Überbevölkerung und Nahrungskonkurrenz ab, die Wachstumsrate  $R(N_k)$  nähert sich einem festen Wert  $r$ , der *unbeschränkte Wachstumsrate* heißt. Es soll also  $R(0) = r$  gelten.

## 2.3 Die diskrete logistische Gleichung

Natürlich gibt es viele mögliche Wahlen für die Funktion  $R(N_k)$ , die die Bedingungen aus Abschnitt 2.2 erfüllen. Zunächst wollen wir die einfachste Funktion wählen, die dieses Verhalten zeigt: eine *lineare* Funktion.

Wegen obiger Forderungen muss  $R(N_k)$  durch die Punkte  $(0, r)$  und  $(K, 0)$  laufen. Man erhält damit sofort

$$R(N_k) = -\frac{r}{K}N_k + r . \quad (5)$$

Setzt man dies in Gleichung (4) ein, so erhält man die *diskrete logistische Differenzgleichung*

$$N_{k+1} = N_k + rN_k \left(1 - \frac{N_k}{K}\right) . \quad (6)$$

Diese Gleichung ist nicht mehr linear; auch gibt es für sie keine geschlossene Lösung.

## 2.4 Eigenschaften der diskreten logistischen Differenzgleichung

Einige Eigenschaften der diskreten logistischen Differenzgleichung lassen sich direkt ablesen oder ausrechnen.

### 2.4.1 Gleichgewichtszustände

Zunächst betrachten wir, welche Gleichgewichtszustände auftreten können. Sei also  $N_{k+1} = N_k = s$ . Setzt man dies in (6) ein, erhält man

$$s = s + r \left( s + \left( \frac{s}{K} \right) \right)$$

bzw.

$$s \left( 1 - \frac{s}{K} \right) = 0 .$$

Es treten also in den beiden Fällen  $s = 0$  und  $s = K$  Gleichgewichtszustände auf. Der Fall  $s = 0$  ist wenig interessant; der Gleichgewichtszustand für  $s = K$  ist praktisch eine direkte Konsequenz aus den Forderungen in Abschnitt 2.2.

### 2.4.2 Zuwachs

Nun schreibt man die diskrete logistische Gleichung in der Form

$$N_{k+1} - N_k = rN_k \left( 1 - \frac{N_k}{K} \right) .$$

Man kann an ihr dann den *Zuwachs* zwischen zwei Generationen betrachten. Man erkennt: Ist  $N_k < K$ , so wird die Gesamtbevölkerungszahl in der nächsten Generation zunehmen, ist  $N_k > K$ , so wird sie hingegen abnehmen.

Man kann vermuten: Ist  $r$  klein, so wird auch der Zuwachs eher klein sein; es ist plausibel, eine monotone Konvergenz der Lösungsfolge gegen den Sättigungswert  $K$  zu

erwarten. Ist  $r$  hingegen groß, so wird auch der Zuwachs entsprechend groß sein. Wegen der großen Zunahme wird die Bevölkerungsgröße  $N_k$  dann zunächst den Sättigungswert  $K$  übertreffen, dann jedoch nach obiger Betrachtung wieder darunter fallen, usw. Ein oszillierendes Verhalten scheint wahrscheinlich.

Interessanterweise sind dies genau die beiden ersten Verhalten der Käferpopulation aus Abbildung 2.

### 2.4.3 Der Fall $r > 3$

Man kann aus der diskreten logistischen Gleichung auch ablesen, dass sie für unbeschränkte Wachstumsraten  $r > 3$  nicht anwendbar ist: Es können in diesem Fall negative Bevölkerungszahlen auftreten. Um dies zu sehen, formt man zunächst die diskrete logistische Differenzgleichung (6) ein wenig um:

$$\begin{aligned} f(N_k; r, K) &= N_k + rN_k \left(1 - \frac{N_k}{K}\right) = N_k \left((1+r) - \frac{N_k r}{K}\right) \\ &= N_k(1+r) \left(1 - \frac{N_k r}{K(1+r)}\right) = cN_k \left(1 - \frac{N_k}{\tilde{K}}\right) \\ &= g(N_k; c, \tilde{K}), \end{aligned} \tag{7}$$

wobei  $c := 1+r$  und  $\tilde{K} := \frac{K(1+r)}{r}$  gesetzt wurde.

Man betrachtet nun das Intervall  $I = [0, \tilde{K}]$  und die Funktion  $g(N_k; c, \tilde{K}) = cN_k \left(1 - \frac{N_k}{\tilde{K}}\right)$  und untersucht, für welche Werte von  $c$  nun gilt  $g(I) \subset I$ ; für  $z > \tilde{K}$  hat man nämlich  $g(z) < 0$ . Mit  $g(0; c, \tilde{K}) = g(\tilde{K}; c, \tilde{K}) = 0$  liefert eine einfache Kurvendiskussion, dass  $g(N_k; c, \tilde{K})$  einen Hochpunkt hat an der Stelle  $\left(\frac{\tilde{K}}{2}, \frac{c\tilde{K}}{4}\right)$ . Offensichtlich gilt daher

$$g(I) \subset I \text{ für } c \leq 4.$$

Wählt man nun  $c = 5$ , dann hat  $g(N_k; 5, \tilde{K})$  seinen Hochpunkt bei  $\left(\frac{\tilde{K}}{2}, \frac{5}{4}\tilde{K}\right) \notin I^2$ .

Sei nun  $c = 5$  und  $N_0 = \frac{\tilde{K}}{2}$  gewählt; dann ergibt sich im ersten Intervall nach obiger Rechnung  $N_1 = \frac{5}{4}\tilde{K}$  und weiter

$$\begin{aligned} N_2 &= g\left(\frac{5}{4}\tilde{K}; 5, \tilde{K}\right) \\ &= 5 \cdot \frac{5}{4} \cdot \tilde{K} \cdot \left(1 - \frac{5\tilde{K}}{4\tilde{K}}\right) \\ &= \frac{25}{4} \cdot \tilde{K} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Verlässt die diskrete logistische Gleichung bei gegebenen Startwerten also einmal das Intervall  $I$ , so liefert dieses Modell eine negative Bevölkerungsgröße, was offensichtlich

völlig unrealistisch ist. Dieser Ansatz kann also nicht angewendet werden für

$$c > 4 \iff (r + 1) > 4 \iff r > 3.$$

Ebenso ist klar, dass man für die ursprüngliche logistische Differenzgleichung  $f(N_k; r, K)$  also keine Startwerte  $N_0 > \tilde{K}$  wählen darf, da man sonst ebenfalls (wie man beim Übergang zu  $g(N_k; c, \tilde{K})$  leicht sieht) sofort negative Bevölkerungsgrößen erhält.

In der Natur beobachtet man aber sehr wohl Populationen, die unbeschränkte Wachstumsraten  $r > 3$  aufweisen. Die Untauglichkeit für diese Wachstumsraten stellt also eine beträchtliche Einschränkung der diskreten logistischen Differenzgleichung dar. Man betrachtet stattdessen in diesen Fällen z.B. nichtlineare Differenzgleichungen, deren Wachstumsfunktion  $R(N_k)$  nicht mehr linear ist.

### 3 Numerische Betrachtung der logistischen Differenzgleichung

Im Folgenden wollen wir die diskrete logistische Differenzgleichung (6) numerisch auf ihr Verhalten in Abhängigkeit vom Parameter  $r$  untersuchen. Die Startpopulation  $N_0$  und den Sättigungswert  $K$  halten wir zunächst auf den konstanten Werten  $N_0 = 100$  und  $K = 1000$ . Wir werden später sehen, dass Variationen in diesen Parametern keine neuen Erkenntnisse liefern.

#### 3.1 Stabiles Wachstum

##### 3.1.1 $0 < r \leq 1$

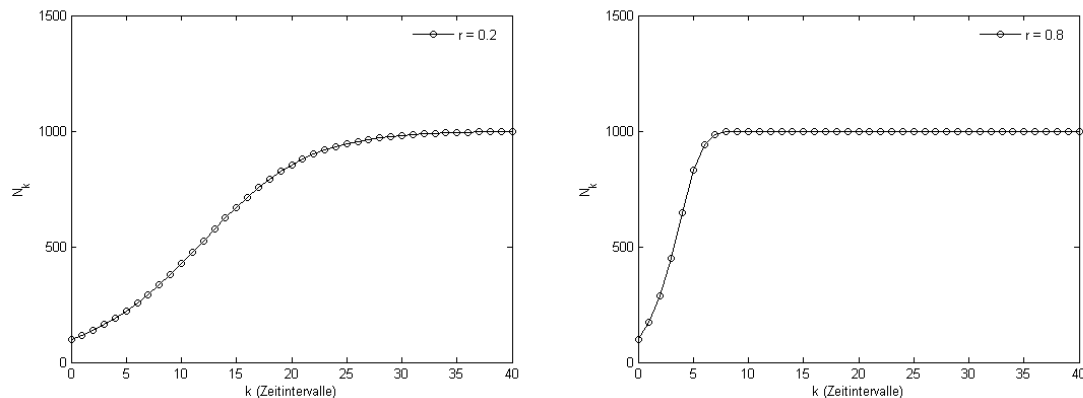


Abbildung 3: Diskrete logistische Gleichung für  $r = 0.2$  und  $r = 0.8$ : monotone Konvergenz gegen Sättigungswert  $K$

Man setzt versuchsweise die beiden Werte  $r = 0.2$  und  $r = 0.8$  ein. In beiden Fällen strebt die Bevölkerungsgröße gegen den Sättigungswert  $K$  (s. Abbildung 3). Die Bevölkerung scheint zunächst exponentiell zu wachsen, mit fortschreitender Zeit kommen

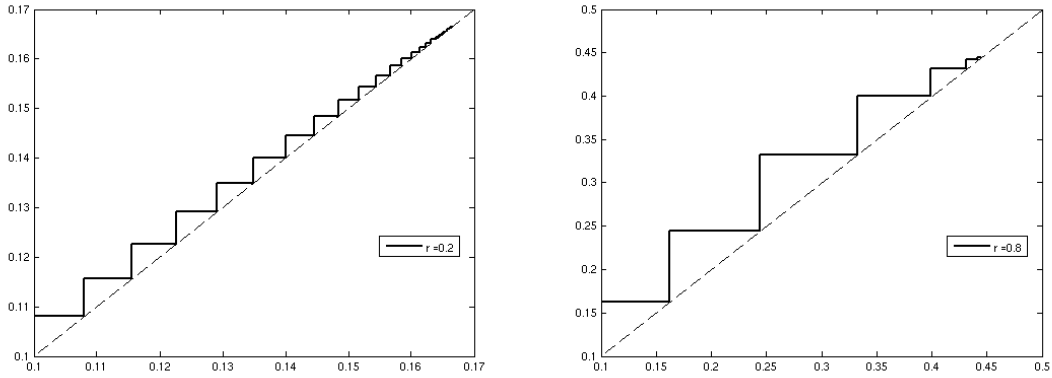


Abbildung 4: Cobweb-Diagramme für  $r = 0.2$  und  $r = 0.8$

Übervölkerungseffekte aber immer deutlicher zum Tragen; das Wachstum verlangsamt sich. Für den größeren Wert von  $r$  wächst die Bevölkerung zunächst sehr schnell, das Wachstum wird dann jedoch auch sehr stark abgeschwächt. Für den kleineren Wert von  $r$  findet zunächst ein langsames Bevölkerungswachstum statt; dementsprechend beobachtet man auch eine geringere Abschwächung. Der Sättigungswert  $K$  wird später erreicht als im Fall  $r = 0.8$ . Diese langsamere Konvergenz kann man auch sehr schön in den zugehörigen Cobweb-Diagrammen beobachten (Abbildung 4). In beiden Fällen konvergiert die Lösungsfolge der logistischen Differenzgleichung jedoch *monoton* gegen den Sättigungswert  $K$  als Grenzwert.

### 3.1.2 $1 < r \leq 2$

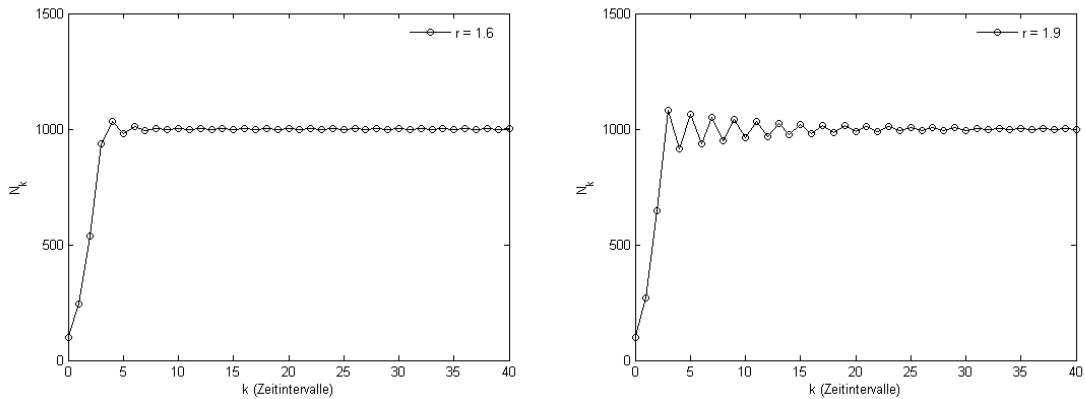


Abbildung 5: Diskrete logistische Gleichung für  $r = 1.6$  und  $r = 1.9$ : gedämpfte Oszillation

Für Werte von  $r > 1$  ändert sich der Charakter des Bevölkerungswachstums (s. Abbildung 5): die Differenzgleichung hat oszillierende Lösungen. Man betrachtet hier

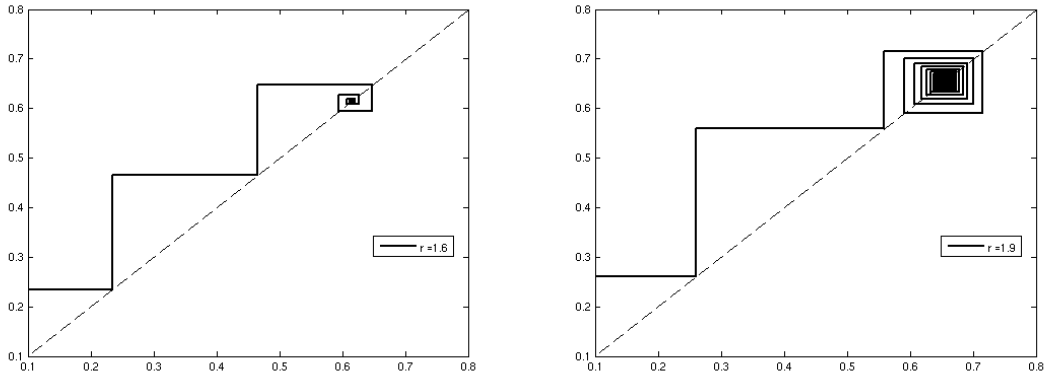


Abbildung 6: Cobweb-Diagramme für  $r = 1.6$  und  $r = 1.9$

die beiden Fälle  $r = 1.6$  und  $r = 1.9$ . Zu Beginn des Beobachtungszeitraums wächst die Bevölkerung so schnell, dass die Gesamtbevölkerung über den Sättigungswert  $K$  hinauschießt, bevor Übervölkerungseffekte zum Tragen kommen können. Wie in Abschnitt 2.4 gesehen, fällt die Bevölkerungszahl dann im nächsten Zeitintervall auf einen Wert unterhalb  $K$ . Nun schießt die Bevölkerungszahl wieder über  $K$  hinaus, diesmal jedoch schwächer als beim ersten Mal. Man erhält eine *gedämpfte Oszillation*. Für den größeren Wert  $r = 1.9$  ist die Dämpfung dabei geringer als für kleinere Werte, auch ist hier die maximale Amplitude der Oszillation deutlich größer als für  $r = 1.6$ . Auch dies wird durch die Cobweb-Diagramme sehr anschaulich dargestellt.

### 3.2 Zyklisches Wachstum ( $2 < r < 2.57$ )

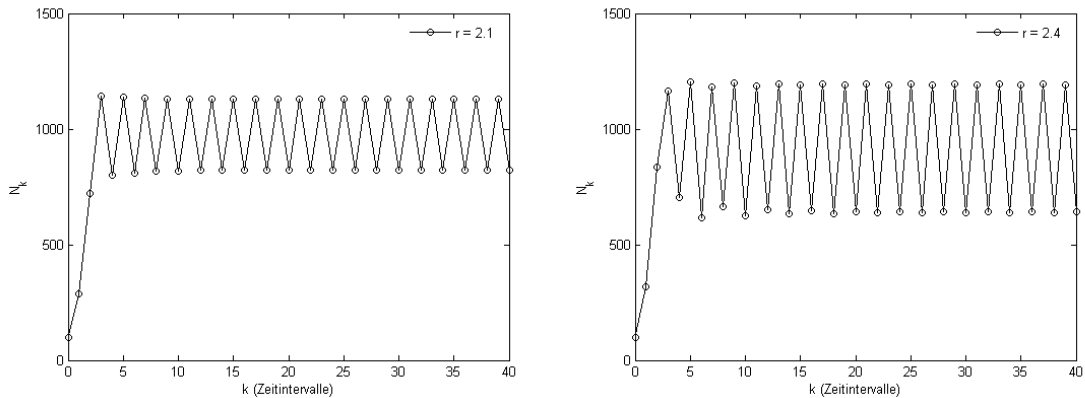


Abbildung 7: Diskrete logistische Gleichung für  $r = 2.1$  und  $r = 2.4$ : ein 2-Zyklus

Hier ergibt sich ein neues Verhalten der diskreten logistischen Gleichung. Die Bevölkerungszahl zeigt nicht länger ein *gedämpftes* Oszillationsverhalten, sondern oszilliert zwischen festen Werten ober- und unterhalb des Sättigungswertes  $K$ . In Abbildung 7 erreicht

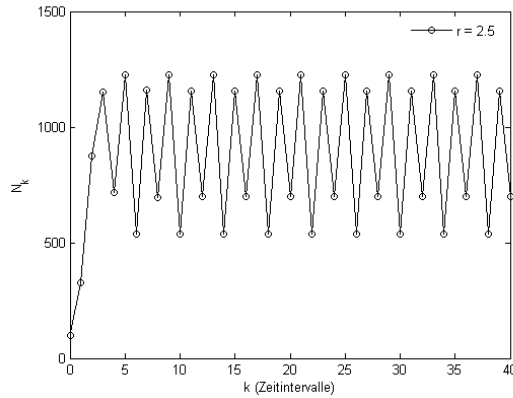


Abbildung 8: Diskrete logistische Gleichung für  $r = 2.5$ : ein 4-Zyklus

die oszillierende Bevölkerungsgröße dabei jede zweite Brutzeit wieder ihren ursprünglichen Wert: ein *2-Zyklus* entsteht. Wird  $r$  weiter vergrößert in Richtung  $r = 2.57$ , so ändert sich dieses Verhalten: die Bevölkerungszahl erreicht nun nach jeder vierten Brutzeit wieder ihren ursprünglichen Wert (*4-Zyklus*, s. Abbildung 8). Nähert man sich weiter dem Wert  $r = 2.57$ , so verdoppelt sich diese Periode immer weiter. Man erhält also 8-Zyklen, 16-Zyklen usw. Man nennt diesen Vorgang daher auch *Periodenverdopplung*. Die Bedeutung der „magischen“ Zahl  $r = 2.57$  wurde zuerst vom amerikanischen Physiker MITCHELL FEIGENBAUM in den 1970er Jahren untersucht.

### 3.3 Chaotisches Wachstum ( $2.57 < r \leq 3$ )

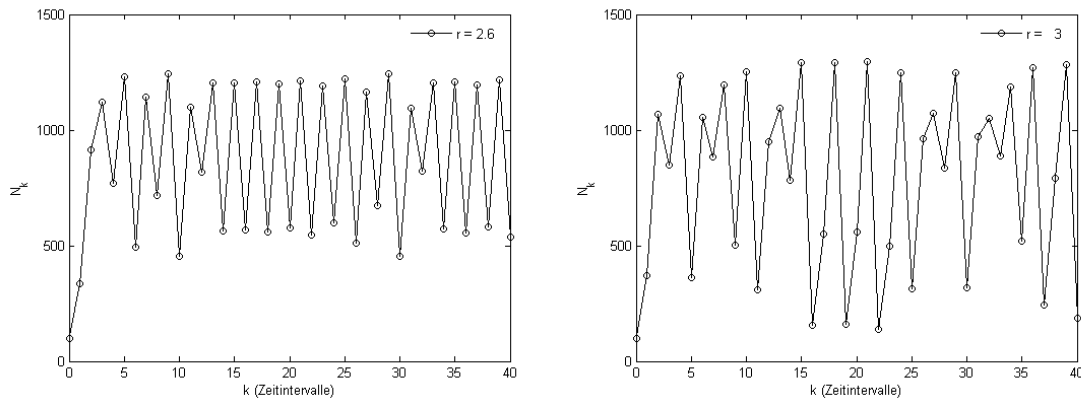


Abbildung 9: Diskrete logistische Gleichung für  $r = 2.6$  und  $r = 3$ : chaotisches Verhalten

Vergößern wir die Werte von  $r$  über den Wert von  $r = 2.57$  hinaus, scheint sich die Bevölkerungsgröße plötzlich rein zufällig zu entwickeln (Abbildung 9). Dieses Verhalten nennt man daher auch *chaotisch*. Aber nicht für alle  $2.57 < r \leq 3$  tritt chaotisches Verhalten auf: Für  $r = 2.83$  zum Beispiel erhält man einen 3-Zyklus (Abbildung 10).

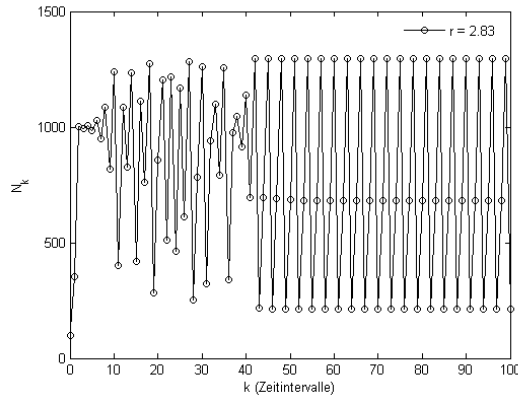


Abbildung 10: Diskrete logistische Gleichung für  $r = 2.83$ : ein 3-Zyklus im „chaotischen Bereich“ von  $r$

Auch hier beobachtet man wieder das Phänomen der Periodenverdoppelung. Es treten so Zyklen beliebiger Periodizität auf.

Die Entdeckung des chaotischen Verhaltens der sehr einfachen logistischen Differenzgleichung war eine wichtige Entdeckung in der Biologie: Man nahm bis dahin an, dass das in der Natur beobachtete scheinbar zufällige Verhalten einiger Populationen nur durch externe Umwelteinflüsse entstehen konnte. Nun hatte man aber den Beweis, dass dieses Verhalten auch schon durch das sehr einfache logistische Modell beschrieben wird.

In der Praxis fällt es oft schwer, zwischen chaotischem Verhalten und einem zyklischen Verhalten mit großer Periode zu unterscheiden. Ein Charakteristikum des chaotischen Wachstums ist jedoch, dass kleinste Änderungen der Startwerte (d.h. des Sättigungswertes  $K$  oder des Startwertes der Population  $N_0$ ) zu völlig anderem Verhalten führen können.

## 4 Das Feigenbaum-Diagramm

Die verschiedenen auftretenden Wachstumsphänomene (stabiles Wachstum, zyklisches Wachstum, chaotisches Wachstum) kann man sich auf sehr einfache Weise in einem sogenannten *Feigenbaum-Diagramm* veranschaulichen. Dazu trägt man bei konstanten Startwerten  $K$  und  $N_0$  über verschiedenen Werten von  $r$  die Häufungspunkte der entstehenden Lösungsfolge auf. In der Praxis genügen zur Veranschaulichung der Häufungspunkte sehr einfache Implementierungen: Man verwirft solange Folgenglieder, bis eine gewisse Stabilisierung eingetreten ist und trägt dann eine frei gewählte Anzahl nachfolgender Glieder in das Diagramm ein.

Für die diskrete logistische Differenzgleichung entsteht dabei das Diagramm aus Abbildung 11. Daraus lässt sich das bisher schon numerisch ermittelte Verhalten dieser Gleichung noch einmal direkt „ablesen“: für Werte von  $r$  zwischen 1 und 2 erhält man ein stabiles, konvergierendes Verhalten; man kann nur einen Häufungspunkt erkennen

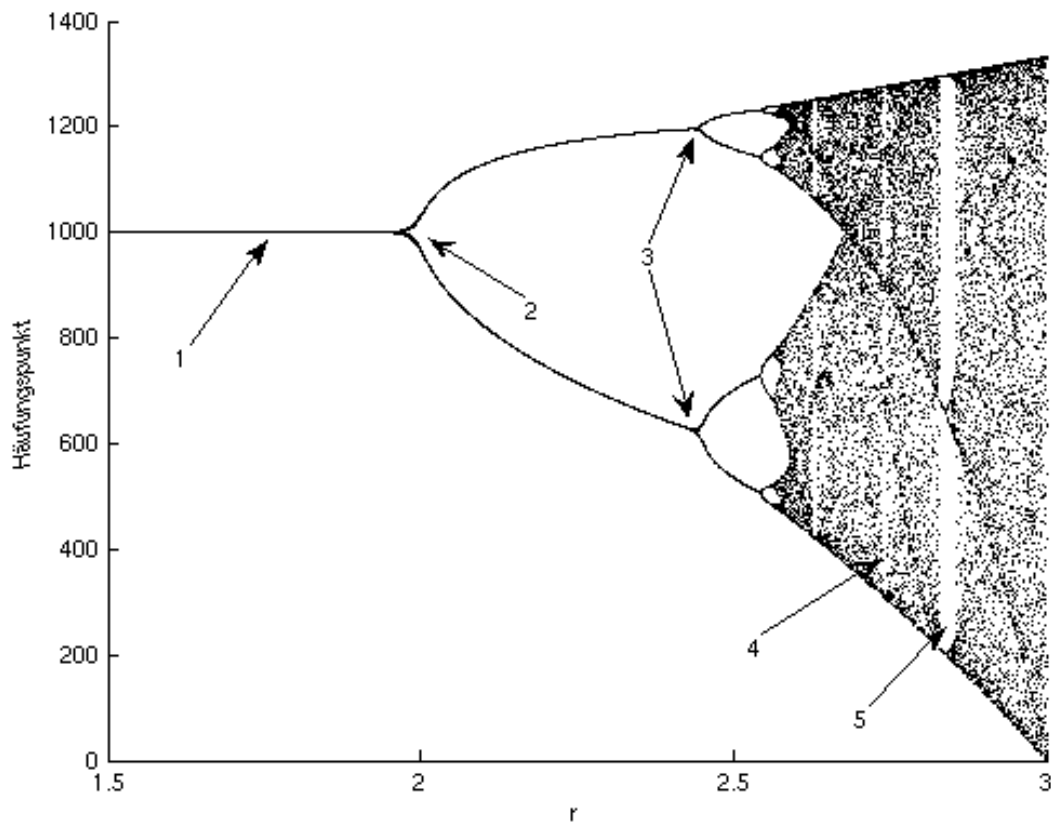


Abbildung 11: Das Feigenbaum-Diagramm für die diskrete logistische Differenzgleichung (6)

(s. Abschnitt (1) des Diagramms). Für einen Wert von  $r$  nahe  $r = 2$  erkennt man einen sogenannten *Bifurkationspunkt*: statt eines Häufungspunktes spaltet der Graph sich auf in zwei; also tritt zyklisches Verhalten auf (Abschnitt (2)). Eine weitere Periodenverdopplung hin zum 4-Zyklus sieht man in Abschnitt (3) des Graphen. Man erkennt, dass die Intervalle mit gleicher Anzahl an Häufungspunkten (*Bifurkationsintervalle*) immer kleiner werden. Oberhalb von  $r = 2.57$  schließlich sind keine Häufungspunkte zu erkennen; die eingezeichneten Werte scheinen zufällig verteilt: chaotisches Verhalten tritt auf (Abschnitt (4)). Auffällig ist jedoch, dass die Lösungsfolge weiterhin beschränkt ist: alle Punkte liegen innerhalb eines klar abgegrenzten Bereichs. Eine weitere Besonderheit zeigt sich in Abschnitt (5): In einem schmalen Streifen der Werte für  $r$  erkennt man wieder Häufungspunkte. Wie in Abschnitt 3.3 beschrieben, erhält man z.B. für den Wert von  $r = 2.83$  einen 3-Zyklus, der so auch aus dem Feigenbaum-Diagramm abgelesen werden kann.

Wie bereits in Abschnitt 2.4.3 beschrieben, ist es nicht sinnvoll, Werte von  $r > 3$  zu betrachten: hier divergiert die logistische Differenzgleichung für fast alle Startwerte und erreicht z.B. negative Bevölkerungszahlen.

FEIGENBAUM untersuchte ursprünglich eine leicht andere (ebenfalls quadratische) Differenzgleichung. Er entdeckte, dass sich das Längenverhältnis zweier aufeinanderfolgender Bifurkationsintervalle einer Konstanten  $\delta \approx 4.669201609\dots$  annähert, der sogenannten *Feigenbaum-Konstanten*. Diese Konstante ist zusammen mit dem Phänomen des Übergangs vom konvergenten Verhalten zur Periodenverdoppelung und chaotischem Verhalten charakteristisch für viele nicht-lineare Systeme.

## Literatur

- [1] Fulford, G.; Forrester, P.; und Jones, A. *Modelling with Differential and Difference Equations*. New York: Cambridge University Press, 1997.
- [2] Artikel „Feigenbaum-Konstante“. In: Wikipedia: Die freie Enzyklopädie. Stand: 16.06.2006. URL: <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Feigenbaum-Konstante&oldid=17076675>.