Vorlesung Numerische Mathematik
Wintersemester 2017/18
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dipl.-Math. Dominik Garmatter

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

9. Übungsblatt (erschienen am 14.12.2017)

Aufgabe 9.1 (schriftliche Aufagbe)[5 Punkte]
Unter der Spur(B) einer Matrix $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ versteht man die Summe aller Diagonalelemente von B.

(a) Zeigen Sie, dass die Spur invariant unter Basistransformationen ist, d.h. für $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar gilt
$$\mathrm{Spur}(T^{-1}BT) = \mathrm{Spur}(B).$$

(b) Zeigen Sie, dass für $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$
$$\|A\|_F^2 = \mathrm{Spur}(A^*A) = \sum_{\lambda\in\sigma(A^*A)} \lambda$$
gilt, wobei $\sigma(A^*A)$ das Spektrum von A^*A bezeichnet. Verwenden Sie dies, um zu zeigen, dass $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$ für alle $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ gilt.

(c) Zeigen Sie bitte:

(i) $\mathrm{cond}_2(U) = 1$ für alle unitären Matrizen U.

(ii) $\mathrm{cond}_2(A) \leq \mathrm{cond}_F(A) \leq n \cdot \mathrm{cond}_\infty(A)$ für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar.

(iii) $\mathrm{cond}_2(UA) = \mathrm{cond}_2(A)$ für alle unitären Matrizen U und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar.

Aufgabe 9.2 (Votieraufgabe)
Betrachten Sie das lineare Ausgleichsproblem
$$\text{minimiere } \|Ax - b\|_2 \tag{1}$$
mit einer beliebigen Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{C}^m$. Für ein $\rho_k > 0$ sei x_k die Lösung der regularisierten Normalengleichung
$$(A^*A + \rho_k I)x = A^*b.$$
Vergewissern Sie sich, dass die Matrix $A^*A + \rho_k I$ für jedes $\rho_k > 0$ invertierbar ist. Zeigen Sie damit, dass für eine Folge $\{\rho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\rho_k \to 0$ die hierdurch erzeugte Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gegen eine Lösung $\hat{x}$ von (1) konvergiert, und dass diese Lösung der Ungleichung
$$\|\hat{x}\|_2 \leq \|x\|_2$$
für alle Lösungen x von (1) genügt, das heißt, der Grenzwert $\hat{x}$ ist diejenige Lösung von (1) mit kleinster euklidischer Norm.

Aufgabe 9.3 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Betrachtet wird die in Abbildung 1 dargestellte Anordnung von Federn und Kugeln.

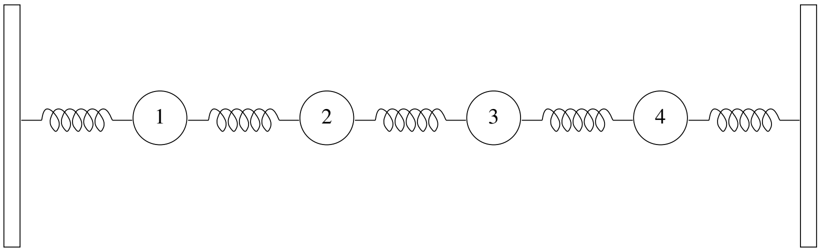

Abbildung 1: Anordnung von Federn und Kugeln.

Bezeichne x_i, $i = 1, \ldots, 4$, die Auslenkung der i-ten Kugel aus der Ruhelage nach rechts und v_i ihre Geschwindigkeit, wobei $v_i > 0$ eine Bewegung nach rechts bedeutet. Durch die Federkräfte ändert sich im Zeitraum Δt beispielsweise die Geschwindigkeit der zweiten Kugel gemäß

$$v_2^{\text{neu}} = v_2^{\text{alt}} + \Delta v_2 \quad \text{mit} \quad \Delta v_2 = k(x_1 - x_2)\Delta t + k(x_3 - x_2)\Delta t,$$

wobei k von der Stärke der Feder und der Masse der Kugel abhängt und hier als konstant angenommen wird. Die Position der zweiten Kugel ändert sich gemäß

$$\Delta x_2 = x_2^{\text{neu}} - x_2^{\text{alt}} = v_2 \Delta t.$$

Stellen Sie für die anderen Kugeln entsprechende Gleichungen für Δx_i und Δv_i auf und fassen Sie diese in einem linearen Gleichungssystem der Form

$$\Delta\eta = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta v_1 \\ \vdots \\ \Delta x_4 \\ \Delta v_4 \end{pmatrix} = \Delta t A \begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ x_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \Delta t A \eta, \quad A \in \mathbb{R}^{8\times 8}, \tag{2}$$

zusammen. Zur Berechnung von

$$\eta^{\text{neu}} = \eta^{\text{alt}} + \Delta\eta$$

kann in der rechten Seite von (1) entweder η^{alt} oder η^{neu} verwendet werden. Im zweiten Fall muss die Gleichung dann noch nach η^{neu} aufgelöst werden. Dazu sollte einmalig eine LR-Zerlegung der zu invertierenden Matrix mit dem `MATLAB`-Befehl `lu` berechnet werden, und die Lösungen sukzessiv wie in der Vorlesung in Bemerkung 2.3 beschrieben berechnet werden.
Implementieren Sie beide Möglichkeiten und testen Sie sie jeweils für 300 Zeitschritte $\Delta t = 0.05$ mit der Anfangsvorgabe $\eta = (0.3,\ 0,\ -0.3,\ 0,\ 0.3,\ 0,\ -0.3,\ 0)^T$ und $k = 1$.
Visualisieren und interpretieren Sie ihre Ergebnisse. Dabei kannn die unten angegebene Funktion `Zeichne(eta)` verwendet weden. Diese zeichnet gerade das Ergebnis zu einem Zeitschritt.

```
function Zeichne(eta)
figure(1); set(gcf,'Color','w'); clf; axis([-0.5 10.5 -2 2]);
axis equal; hold on; axis tight; axis off;
[x01,y01]=MaleFeder(0,2+eta(1));
[x12,y12]=MaleFeder(2+eta(1),4+eta(3));
[x23,y23]=MaleFeder(4+eta(3),6+eta(5));
[x34,y34]=MaleFeder(6+eta(5),8+eta(7));
[x45,y45]=MaleFeder(8+eta(7),10);
```

```
plot([x01, x12, x23, x34, x45],[y01, y12, y23, y34, y45]);
patch([-0.2 0 0 -0.2],[-1 -1 1 1],'r');
patch([10.2 10 10 10.2],[-1 -1 1 1],'r');
plot([2,4,6,8]+eta([1,3,5,7])',zeros(1,4),'o','MarkerSize',20,...
    'MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','r');
end


function [x,y]=MaleFeder(a,b)
x=[a linspace(a+0.35,b-0.35,10) b];
y=[0 0 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 0 0]/5;
end
```

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 21.12.2017 um 10:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.
- Zu **Programmieraufgaben*** soll bis zum 21.12.2017 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in `MATLAB`-Code an ihren Übungleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Num_201718_Blattnummer_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile für dieses Blatt mit "Num_201718_9_3:"beginnen).
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.
- Alle Aufgaben von Übungsblatt 9 werden in den Übungen zwischen dem 08.01.-11.01.2018 besprochen.

---

*__Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.__