Vorlesung Numerische Mathematik
Wintersemester 2017/18
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dipl.-Math. Dominik Garmatter

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

8. Übungsblatt (erschienen am 07.12.2017)

Aufgabe 8.1 (Votieraufgabe)

(a) Gegeben seien endlich viele Messdaten $t_1, \ldots, t_l \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ und $x_1, \ldots, x_l \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$. Es wird vermutet, dass die Daten x_i in folgender Weise von den Daten t_i abhängen:

$$x(t) = \alpha_0 t^2 + \alpha_1 \pi \sin(2t) + \alpha_2 t \log(t) + \alpha_3,$$

mit gewissen Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, 3$. Geben Sie das lineare Ausgleichsproblem zur näherungsweisen Bestimmung der Koeffizienten α_i an.

(b) Gehen Sie nun analog für einen vermuteten linearen Zusammenhang $x = a\,t + b$ vor, und bestimmen Sie so die Ausgleichsgerade durch die folgenden Datenpunkte:

t	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
x	3.72	4.1	5.37	5.9	6.8	7.6	8.0	8.7

Zeichnen Sie die Datenpunkte und die Ausgleichsgerade.

Aufgabe 8.2 (Votieraufgabe)

Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ eine gegebene Matrix mit $\mathrm{Rang}(A) = n$. Zeigen Sie:

(a) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} I & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+n)\times(m+n)}$$

ist regulär.

(b) $\hat{x} \in \mathbb{C}^n$ ist genau dann eine Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\text{minimiere } \|Ax - b\|$$

mit dem Residuum $\hat{r} = b - A\hat{x}$, wenn $(\hat{r}, \hat{x})$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} I & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

löst.

Aufgabe 8.3 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Beweisen Sie bitte Satz 2.25 aus der Vorlesung:
Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $A^+ \in \mathbb{C}^{n \times m}$ die Moore-Penrose Inverse.

(a) $\mathcal{N}(A^+) = \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$, $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^\perp$.

(b) A^+ erfüllt die Moore-Penrose Axiome

$$AA^+A = A, \quad (AA^+)^* = AA^+, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad (A^+A)^* = A^+A.$$

(c) A^+ besitzt die Singulärwertzerlegung

$$A^+ u_j = \sigma_j^{-1} v_j, \quad (A^+)^* v_j = \sigma_j^{-1} u_j.$$

Aufgabe 8.4 (Programmieraufgabe)[4 Punkte]
Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
[Aplus] = Moore_Penrose(A),
```

welche zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die Moore-Penrose Inverse A^+ bestimmt. Dazu darf der MATLAB-Befehl `eig` verwendet werden, der MATLAB-Befehl `svd` soll **nicht** verwendet werden. Testen Sie ihre Funktion für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und überprüfen Sie ihr Ergebnis.
Hinweis: Überlegen Sie sich, dass zur Bestimmung der Moore-Penrose Inverse die Anteile von U aus $\mathcal{N}(A^*)$ nicht benötigt werden.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 14.12.2017 um 10:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben*** soll bis zum 14.12.2017 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in MATLAB-Code an ihren Übungleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Num_201718_Blattnummer_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile für dieses Blatt mit "Num_201718_8_3:"beginnen).

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

- Alle Aufgaben von Übungsblatt 8 werden in den Übungen zwischen dem 18.12.-21.12.2017 besprochen.

*__Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.__