Vorlesung Numerische Mathematik
Wintersemester 2017/18
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dipl.-Math. Dominik Garmatter

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

7. Übungsblatt (erschienen am 30.11.2017)

Aufgabe 7.1 (Votieraufgabe)
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gegeben. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für alle Matrizen $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ gilt

$$\mathrm{Rang}(CA) \leq \mathrm{Rang}(A).$$

Gleichheit gilt, wenn C regulär ist.

(b) Für alle Matrizen $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$\mathrm{Rang}(AB) \leq \mathrm{Rang}(A),$$

und das Gleichheitszeichen gilt, wenn B regulär ist.

Aufgabe 7.2 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm in $\mathbb{C}^n$ und $\|\cdot\|_M$ die induzierte Matrixnorm in $\mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\|A\|_M < 1$. Zeigen Sie, dass $(I+A)^{-1}$ existiert und die Ungleichung

$$\frac{1}{1+\|A\|_M} \leq \|(I+A)^{-1}\|_M \leq \frac{1}{1-\|A\|_M}$$

gilt.

(b) Seien $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{C}^n$, $b \neq 0$, und $x \neq 0$ die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Weiterhin seien $\Delta b \in \mathbb{C}^n$ und $\Delta A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\|\Delta A\|_M \|A^{-1}\|_M < 1$. Zeigen Sie, dass

$$(A+\Delta A)\tilde{x} = b + \Delta b$$

eindeutig lösbar ist, und dass für die Lösung $\tilde{x} = x + \Delta x$ gilt:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\mathrm{cond}_M(A)}{1 - \mathrm{cond}_M(A)\frac{\|\Delta A\|_M}{\|A\|_M}} \cdot \left(\frac{\|\Delta A\|_M}{\|A\|_M} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right).$$

Aufgabe 7.3 (Votieraufgabe)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitisch und positiv definit mit Cholesky-Zerlegung $A = LL^*$. Zeigen Sie, dass für die Matrix L der Cholesky-Zerlegung

$$L = (l_{ij})_{i,j=1}^n = \begin{cases} \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}\overline{l_{jk}}} & i = j \\ \frac{1}{l_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\overline{l_{jk}}\right) & i > j \end{cases}$$

gilt und folgern Sie damit die Eindeutigkeit der Cholesky-Zerlegung.

Aufgabe 7.4 (Programmieraufgabe)[4 Punkte]
Implementieren Sie in `MATLAB` die Cholesky-Zerlegung für ein lineares Gleichungssystems der Gestalt

$$Ax = b$$

mit einer positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Testen Sie bitte das Verfahren anhand folgender Daten:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 29 & 36 & 43 \\ 3 & 36 & 109 & 126 \\ 4 & 43 & 126 & 246 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 07.12.2017 um 10:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben*** soll bis zum 07.12.2017 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in `MATLAB`-Code an ihren Übungleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Num_201718_Blattnummer_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile für dieses Blatt mit "Num_201718_7_3:"beginnen).

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

- Alle Aufgaben von Übungsblatt 7 werden in den Übungen zwischen dem 11.12.-14.12.2017 besprochen.

---

*__Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.__