

3. Übungsblatt (erschienen am 02.11.2017)

Aufgabe 3.1 (schriftliche Aufgabe)[2 Punkte]

Bestimmen Sie zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $I[f] = \int_0^1 f(x) dx$ die vier Gewichte w_1, w_2, w_3, w_4 der abgeschlossenen Newton-Cotes-Formel mit $m = 4$ äquidistanten Knoten.

Aufgabe 3.2 (schriftliche Aufgabe)[4 Punkte]

Zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $I[f] = \int_{-1}^1 f(x) dx$ werden die abgeschlossenen Newton-Cotes-Formeln mit einer ungeraden Anzahl $m = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}$, äquidistanter Knoten betrachtet.

- (a) Vergewissern Sie sich, dass $x_{m+1-i} = -x_i$ für $i = 1, \dots, m$ gilt.
- (b) Zeigen Sie, dass die Gewichte symmetrisch sind, dass also $w_{m+1-i} = w_i$, für $i = 1, \dots, m$, gilt.
- (c) Man zeige für diesen Spezialfall, dass die Newton-Cotes Formeln mit ungerader Anzahl Knoten $m = 2l + 1$ sogar Exaktheitsgrad $q = m$ haben.

Aufgabe 3.3 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Basierend auf der zusammengesetzten Trapezformel und der Simpsonformel soll ein adaptives Quadraturverfahren zur Berechnung von

$$I[f] = \int_a^b f(x) dx$$

implementiert werden. Die Idee eines adaptiven Verfahren ist es, die Schrittweite nur in solchen Bereichen zu verfeinern, in denen sich die Funktionswerte schnell ändern. Der Algorithmus soll rekursiv arbeiten: Zunächst wird für $h = (b-a)/2$ das Integral nach der Trapezformel T_2 und der Simpsonformel S_1 berechnet. Wird die Genauigkeit $|T_2 - S_1| \leq \text{tol}$ erreicht, wobei tol vorgegeben ist, so soll S_1 als Näherung für $I[f]$ verwendet werden und der Algorithmus soll abbrechen. Wird diese Genauigkeit nicht erreicht, so soll das Integrationsintervall und die Genauigkeit tol halbiert werden, und die oben beschriebene Methode zur Berechnung der Integrale $\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx$ und $\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx$ wiederholt werden. Implementieren Sie den Algorithmus mit einer sich selbst rekursiv aufrufenden Funktion

$$[Q, \text{AnzF}] = \text{QuadAdapt}(\text{funkt}, \text{tol}, a, b, fa, fb, fab),$$

wobei a, b die Integrationsgrenzen bezeichnen und fa, fb, fab jeweils die Funktionswerte $f(a), f(b)$ und $f(\frac{1}{2}(a+b))$ enthalten. In Q wird der Näherungswert für $I[f]$ und in AnzF die Anzahl der Funktionsauswertungen von f zurückgegeben.

Veranschaulichen Sie das Konvergenzverhalten dieser adaptiven Quadraturmethode, indem Sie zur Berechnung von $I[f] = \int_{0.1}^3 \frac{1}{x} dx$ den Fehler der numerischen Integration gegen die Anzahl der Funktionsauswertungen darstellen, und vergleichen Sie dies mit den Ergebnissen für die zusammengesetzte Trapezformel.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 09.11.2017 um 10:00 Uhr in den Kästen ihres Übungsleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.
- Zu **Programmieraufgaben*** soll bis zum 09.11.2017 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in MATLAB-Code an ihren Übungsleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit "**Num_201718_Blattnummer_Gruppennummer:**" (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile für dieses Blatt mit "Num_201718_3_3:"beginnen).
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.
- Alle Aufgaben von Übungsblatt 3 werden in den Übungen zwischen dem 13.11.-16.11.2017 besprochen.

*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.