Vorlesung Numerische Mathematik
Wintersemester 2017/18
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dipl.-Math. Dominik Garmatter

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

2. Übungsblatt (erschienen am 26.10.2017)

Aufgabe 2.1 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
Die *Hermite-Interpolationsaufgabe* besteht darin, zu vorgegebenen Knoten $x_1, \ldots, x_m$ neben Funktionswerten $f(x_1), \ldots, f(x_m)$ auch die Werte der Ableitung $f'(x_1), \ldots, f'(x_m)$ miteinzubeziehen. Wir wollen ein Polynom p vom Grad $2m-1$ so bestimmen, dass

$$p(x_i) = f(x_i) \quad \text{und} \quad p'(x_i) = f'(x_i) \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m \quad \text{gilt.}$$

(a) Zeigen Sie, dass höchstens ein solches Polynom $p \in \Pi_{2m-1}$ existiert.

(b) Konstruieren Sie die Polynome q_i, $r_i \in \Pi_{2m-1}$ mit den Eigenschaften

$$q_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad q_i'(x_j) = 0, \tag{1}$$
$$r_i(x_j) = 0, \quad r_i'(x_j) = \delta_{ij}, \tag{2}$$

für $i, j = 1, \ldots, m$ und geben Sie damit die Lösung der Hermite-Interpolationsaufgabe explizit an. Zeigen Sie dazu, dass die Polynome

$$q_i(x) = (\alpha_i x + \beta_i) l_i^2(x) \quad \text{und} \quad r_i(x) = (\tilde{\alpha}_i x + \tilde{\beta}_i) l_i^2(x)$$

mit geeigneten Koeffizienten α_i, $\tilde{\alpha}_i$, β, $\tilde{\beta}_i \in \mathbb{R}$ die Bedingungen (1) bzw. (2) erfüllen; hierbei sind l_i die Lagrange-Grundpolynome. Berechnen Sie die Koeffizienten α_i, $\tilde{\alpha}_i$, β_i, $\tilde{\beta}_i \in \mathbb{R}$ ohne die Ableitung der Lagrange-Grundpolynome explizit auszurechnen.

(c) Bestimmen Sie das Hermite-Interpolationspolynom für $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/2$, $p(x_1) = f(x_1)$, $p(x_2) = f(x_2)$ sowie $p'(x_1) = f'(x_1)$, $p'(x_2) = f'(x_2)$ mit $f(x) = \cos x$.

Aufgabe 2.2 (Votieraufgabe)
Gegeben seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sowie y_1, y_2, y_2', $y_3 \in \mathbb{R}$. Wir definieren $x_1 := a$, $x_2 := (a+b)/2$ und $x_3 := b$. Zeigen Sie, dass ein Interpolationspolynom $p \in \Pi_3$ existiert mit $p(x_1) = y_1$, $p(x_2) = y_2$, $p'(x_2) = y_2'$ und $p(x_3) = y_3$.

Aufgabe 2.3 (Votieraufgabe)
Sei $I[f; w] = \int_0^1 w(x) f(x) dx$ mit $w(x) = \sqrt{x}$. Betrachten Sie die Quadraturformel

$$Q[f] = w_1 f(x_1).$$

Finden Sie ein Gewicht w_1 und x_1 so, dass $Q[\cdot]$ maximalen Exaktheitsgrad q hat.

Aufgabe 2.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

(a) Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion, die eine Funktion für äquidistante Stützstellen $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ und vorgegebene Funktionswerte $f(x_1), \ldots, f(x_m)$ auf dem Intervall $[x_1, x_m]$ mittels eines Polynomes vom Grade $m-1$ interpoliert. Verwenden Sie die Vandermonde Matrix um die Koeffizienten des Polynoms auszurechnen.
Hinweis: Ein Gleichungssystem $Ax = b$ löst `MATLAB` mit dem Befehl `x = A\b`, siehe auch `help \` in `MATLAB`.

(b) Interpolieren Sie die Funktionen `exp, sin` auf dem Intervall $[-5, 5]$ jeweils mit Polynomen vom Grad 5 und 10. Geben Sie jeweils die Interpolationspolynome und den Graph der zu interpolierenden Funktion in einem einzigen Plot aus.
Hinweis: Die `MATLAB`-Funktion `polyval` ist hier hilfreich.

(c) Was beobachtet man, wenn man das Interpolationspolynom zu $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ auf dem Intervall $[-5, 5]$ für verschiedene Anzahlen von Stützstellen darstellt?

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 02.11.2017 um 10:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben*** soll bis zum 02.11.2017 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in `MATLAB`-Code an ihren Übungleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Num_201718_Blattnummer_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile für dieses Blatt mit "Num_201718_2_3:"beginnen).

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

- Alle Aufgaben von Übungsblatt 2 werden in den Übungen zwischen dem 06.11.-09.11.2017 besprochen.

---

*__Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.__