12. Übungsblatt (erschienen am 18.01.2018)

Aufgabe 12.1 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]
Sei $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $c \in \mathbb{C}^n$. Die Abbildung $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ sei definiert durch

$$\Phi(x) = Tx + c.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration $x^{(k+1)} := \Phi(x^{(k)})$ konvergiert, wenn $\rho(T) < 1$ ist, wobei $\rho(T)$ den Spektralradius von T bezeichnet.

(b) Weisen Sie für $\rho(T) > 1$ nach, dass die Fixpunktiteration $x^{(k+1)} := \Phi(x^{(k)})$ nicht für jeden Startvektor $x^{(0)}$ konvergiert.

Aufgabe 12.2 (Votieraufgabe)
Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es sei $x_0 = (1, 1, 1)^T$. Zeigen Sie, dass das Jacobi-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit dem Startwert x_0 konvergiert, das Gauß-Seidel Verfahren hingegen nicht. Bestimmen Sie den Grenzwert der Jacobi-Iteration.

Aufgabe 12.3 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]
Sei $a > 0$ eine beliebige reelle Zahl. Betrachtet wird die Fixpunktiteration

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}) = \frac{1}{2}\left(x^{(k)} + \frac{a}{x^{(k)}}\right).$$

Zeigen Sie, dass diese für jeden Startpunkt $x^{(0)} \in (0, \infty)$ gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Aufgabe 12.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Betrachten Sie die mehrdimensionale, stetig differenzierbare Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (\xi, \eta)^\intercal \longrightarrow \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \xi e^{-\eta^2} + \xi\eta - 6\xi + 3 \\ \log(1 + \eta^2 + \xi^2) - 6\eta - 1 \end{pmatrix}.$$

Vergewissern Sie sich, dass die Nullstellenaufgabe $F(x) = 0$, $x = (\xi, \eta)^\intercal$, äquivalent ist zu der Fixpunktaufgabe aus Aufgabe 11.1. Implementieren Sie das mehrdimensionale Newton-Verfahren, um die Nullstellenaufgabe zu lösen. Das Verfahren soll dabei abbrechen, sobald

$$\|x^{(k)} - \hat{x}\| \leq 10^{-N}$$

für $N \in \mathbb{N}$ ist, wobei für die Nullstelle $\hat{x}$ eine hinreichend genaue Approximation aus Aufgabe 11.4 verwendet werden kann. Das Verfahren soll dabei den Iterationsverlauf und die benötigte Anzahl an

Iterationen ausgeben. Verwenden Sie den Startwert $x^{(0)} = (0, -1)^\intercal$ und testen Sie ihr Verfahren für $N = 1, 2, \ldots, 8$. Plotten Sie die Anzahl der benötigten Iterationen über N und vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit denen von Aufgabe 11.4. Was können Sie beobachten? Warum?

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 25.01.2018 um 10:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.
- Zu **Programmieraufgaben*** soll bis zum 25.01.2018 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in `MATLAB`-Code an ihren Übungleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Num_201718_Blattnummer_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile für dieses Blatt mit "Num_201718_12_3:"beginnen).
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.
- Alle Aufgaben von Übungsblatt 12 werden in den Übungen zwischen dem 29.01.-01.02.2018 besprochen.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**