Vorlesung Numerische Mathematik
Wintersemester 2017/18
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dipl.-Math. Dominik Garmatter

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

11. Übungsblatt (erschienen am 11.01.2018)

Aufgabe 11.1 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Betrachtet wird die Fixpunktaufgabe $x = \Phi(x), x = (\xi, \eta)^T$, mit

$$\Phi(x) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \xi e^{-\eta^2} + \xi\eta + 3 \\ \log(1+\eta^2+\xi^2) - 1 \end{pmatrix}$$

auf dem Intervall $I = [0,1] \times [-1,1]$.

(a) Weisen Sie die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes mit $q = \frac{5}{6}$ bezüglich der Maximumsnorm nach.

(b) Es seien $x^{(k)}$ die Iterierten der Fixpunktiteration $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$ mit Startvektor $x^{(0)} = (0,0)^T$ und $\hat{x}$ bezeichne den Fixpunkt von Φ auf I. Wieviele Iterationsschritte sind hinreichend, um

$$\|x^{(k)} - \hat{x}\| \leq 10^{-3}$$

garantieren zu können?

Aufgabe 11.2 (Votieraufgabe)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Weisen Sie nach, dass der *Spektralradius* $\rho(A)$,

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$$

im Allgemeinen keine Matrixnorm ist. Kennen Sie eine Klasse von Matrizen, für die der Spektralradius eine Norm ist?

Aufgabe 11.3 (Votieraufgabe)

(a) Sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm und $\|\cdot\|$ die davon induzierte Matrixnorm. Zeigen Sie, dass für jede reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ durch $\|x\|_S := \|Sx\|$ eine Vektornorm definiert wird und $\|A\|_S := \|SAS^{-1}\|$ die zugehörige induzierte Matrixnorm ist.

(b) Zu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei $V^{-1}AV = J$ die Jordan-Normalform. Betrachten Sie die Zeilensummennorm $\|\cdot\|_\infty$ und die Matrix $S = D^{-1}V^{-1}$ mit

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon & & & 0 \\ & \varepsilon^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon^n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Weisen Sie die Ungleichung

$$\|A\|_S \leq \rho(A) + \varepsilon$$

nach.

Aufgabe 11.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Implementieren Sie die Fixpunktiteration aus Aufgabe 1 in `MATLAB`. Das Verfahren soll abbrechen, sobald

$$\|x^{(k)} - \hat{x}\| \leq 10^{-N}$$

für $N \in \mathbb{N}$. Realisieren Sie diese Abbruchsbedingung jeweils mit

- der a-priori Schranke aus Satz 3.1 (b),
- der a-posteriori Schranke aus Satz 3.1 (c),

wobei als Startwert $x^{(0)} = (0, -1)^\mathsf{T}$ gewählt werden soll. Das Verfahren soll dabei den Iterationsverlauf und die benötigte Anzahl an Iterationen ausgeben. Testen Sie ihr Verfahren für $N = 1, 2, \ldots, 10$ und plotten Sie die Anzahl der benötigten Iterationen über N. Was können Sie beobachten? Warum?
Anmerkung: Dass der Fehler $\|x^{(k)} - \hat{x}\| \leq 10^{-N}$ ist, bedeutet anschaulich gerade, dass $x^{(k)}$ schon $N - 1$ richtige Nachkommastellen von $\hat{x}$ besitzt.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 18.01.2018 um 10:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben*** soll bis zum 18.01.2018 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in `MATLAB`-Code an ihren Übungleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Num_201718_Blattnummer_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile für dieses Blatt mit "Num_201718_11_3:"beginnen).

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

- Alle Aufgaben von Übungsblatt 11 werden in den Übungen zwischen dem 22.01.-25.01.2018 besprochen.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**