

(erschienen am 21.12.2017)

**Aufgabe 10.1 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]**

Sei  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  eine Matrix mit  $\text{Rang}(A) = n \leq m$ , und  $A = QR$  eine QR-Zerlegung von  $A$ . Wir zerlegen  $Q = (Q_1, Q_2)$  mit  $Q_1 \in \mathbb{C}^{m \times n}$  und  $Q_2 \in \mathbb{C}^{m \times (m-n)}$ . Zeigen Sie bitte:

- (a)  $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(Q_1)$ .
- (b) Die Spalten von  $Q_1$  bilden eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{R}(A)$ .
- (c) Die Spalten von  $Q_2$  bilden eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{N}(A^*)$ .

**Aufgabe 10.2 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]**

Bestimmen Sie bitte, mithilfe von Householder-Transformationen, die QR-Zerlegung der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 10.3 (Votieraufgabe)**

Schreiben Sie einen Pseudocode, welcher die QR-Zerlegung einer injektiven Matrix  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  realisiert: dabei soll die Matrix  $R$  und eine weitere Matrix  $V$  ausgegeben werden, wobei  $V$  die notwendigen Informationen über  $Q$  enthält. Schreiben Sie damit einen weiteren Pseudocode, welcher mit Hilfe der Matrix  $V$  die Multiplikation  $Q^*x$ , für ein  $x \in \mathbb{C}^n$ , realisiert.

### Aufgabe 10.4 (Rettet den Weihnachtsbaum - Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `QR_decomp(A)`, welche die QR-Zerlegung einer injektiven Matrix  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  realisiert.

Laden Sie sich nun das `mat`-file „Weihnachtsbaum.mat“ von der Veranstaltungshomepage herunter. Mit Hilfe des MATLAB-Befehls `load` können Sie dieses in MATLAB extrahieren. Es enthält eine Matrix  $A$  und einen Vektor  $y$ . Betrachten Sie nun das folgende Problem:

*Oh nein! Der Weihnachtsbaum wurde von der hinterlistigen Matrix  $A$  verwischt und ist nun im Vektor  $y$  gefangen. Aber bald ist Weihnachten! Können wir den Baum noch retten?*

**Retten Sie den Weihnachtsbaum!** Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- (i) Verwenden Sie ihre MATLAB-Funktion `QR_decomp` um das lineare Ausgleichsproblem

$$\min_x \|Ax - y\|$$

zu lösen.

- (ii) Verwenden Sie die unten angegebene MATLAB-Funktion `Zeichne_Baum` um den Weihnachtsbaum in vollem Glanz erstrahlen zu lassen.
- (iii) Hätten Sie den Weihnachtsbaum auch mit Hilfe der Gaußschen Normalgleichung retten können, indem Sie  $x = (A^*A) \setminus (A^*y)$  bestimmen?

```
function Baum = Zeichne_Baum(x)
% Visualisiert das Ergebnis x des linearen Ausgleichproblems aus Aufgabe 10.4.
Baum = uint8(reshape(x,16,16,3));
imshow(Baum);
end
```

## Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben**\* soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 11.01.2018 um 10:00 Uhr in den Kästen ihres Übungsleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.
- Zu **Programmieraufgaben**\* soll bis zum 11.01.2018 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in MATLAB-Code an ihren Übungsleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit "**Num\_201718\_Blattnummer\_Gruppennummer:**" (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile für dieses Blatt mit "**Num\_201718\_10\_3:**" beginnen).
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.
- Alle Aufgaben von Übungsblatt 10 werden in den Übungen zwischen dem 15.01.-18.01.2018 besprochen.

---

\*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.