

3. Übungsblatt (Ausgabe am 02.11.2022, Abgabe am 09.11.2022 bis 12:00 Uhr ¹)

Aufgabe 3.1 (Kombinatorik I)

Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für die folgenden Problemstellungen. Bitte geben Sie nur die Ergebnisse an.

- (a) Das Ziehen von 5 Richtigen in der Lotterie 6 aus 49.
- (b) Das Anordnen der Buchstaben des Wortes ANAGRAMM.
- (c) Die Platzierungen auf den ersten drei Plätzen bei einem Pferderennen mit 10 Pferden.
- (d) Eine Augensumme von 10 beim Würfeln mit 3 üblichen Würfeln mit jeweils 6 Seiten zu würfeln.

Aufgabe 3.2 (Kombinatorik II)

Betrachten Sie die Ziffern $1, 2, \dots, 9$ und geben Sie für die folgenden Fragestellungen nur die Ergebnisse an.

- (a) Wie viele dreistellige Zahlen können Sie aus diesen Ziffern konstruieren, wenn wir fordern, dass jede Ziffer nur einmal vorkommt?
- (b) Wie viele der konstruierten Zahlen sind gerade?
- (c) Wie viele der konstruierten Zahlen sind durch 5 teilbar?
- (d) Wie viele der konstruierten Zahlen sind kleiner als 300 bzw. größer als 400?

Aufgabe 3.3 (binomischer Lehrsatz)

Verwenden Sie den binomischen Lehrsatz, um folgende Aussagen zu beweisen.

- (a) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 3.4 (Vollständige Induktion)

- (a) Beweisen Sie $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mittels vollständiger Induktion.
- (b) Stellen Sie durch Einsetzen eine Vermutung darüber auf, welcher der Terme n und 2^n für $n \in \mathbb{N}$ größer ist und beweisen Sie Ihre Vermutung durch vollständige Induktion.
- (c) $\sum_{k=0}^n k^2$ kann als kubisches Polynom $f(n) = a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$ dargestellt werden. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0, \dots, a_3 durch das Einsetzen kleiner Werte für $n \in \mathbb{N}_0$ und beweisen Sie Ihre so erhaltene Summenformel $f(n) = \sum_{k=0}^n k^2$ mittels vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}_0$.

¹Die Abgabe erfolgt via OLAT. Bitte laden Sie Ihre Ergebnisse in einer einzigen PDF-Datei hoch, die Sie wie folgt benennen: LinadiGruppennummerBlattnummer_Nachname.pdf.