Vorlesung LinADi
Wintersemester 2022/23
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Andrej Brojatsch
M. Sc. Stephan Gardoll

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

13. Übungsblatt
(Ausgabe am 25.01.2023, Abgabe bis 01.02.2023 12:00 Uhr)

Aufgabe 13.1 (Vorbereitung auf Eigenwerte und Eigenvektoren)[4 Punkte]

Betrachten Sie die Matrix $A_\lambda = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie alle λ, sodass $\det(A_\lambda) = 0$ gilt.

Hinweis: Es existieren 3 verschiedene Werte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, die die Anforderung erfüllen.

(b) Finden Sie für λ_i $(1 \leq i \leq 3)$ aus (a) jeweils eine Lösung $x_i \neq 0$ von $A_{\lambda_i} x_i = 0$.

(c) Überprüfen Sie, dass für Ihre bei (a) und (b) gefundenden Lösungen die Identität $Ax_i = \lambda_i x_i$ für $1 \leq i \leq 3$ mit $A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt.

Aufgabe 13.2 (Lineare Abbildungen - Polynomraum)[4 Punkte]

Π_2 sei der Vektorraum der quadratischen Polynome. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \Pi_2 \to \Pi_2$ mit $p(x) \mapsto p(x) + p'(x)$ linear ist.

Aufgabe 13.3 (Lineare Abbildungen)[4 Punkte]

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y+z \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Schreiben Sie f als Matrix bezüglich der Basen

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Schreiben Sie f als Matrix bezüglich der Basen

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 13.4 (Determinante)[4 Punkte]
Bestimmen Sie die Determinanten $\det(A_i)$ der folgenden Matrizen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \; A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$