Vorlesung LinADi
Wintersemester 2022/23
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Andrej Brojatsch
M. Sc. Stephan Gardoll

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

12. Übungsblatt
(Ausgabe am 18.01.2023, Abgabe bis 25.01.2023 12:00 Uhr)

Aufgabe 12.1 (Matrix-Transponierung)[4 Punkte]
Zeigen Sie, dass

(a) $(A+B)^T = A^T + B^T$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ gilt.

(b) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times m},\ B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ gilt.

(c) $(A^T)^T = A$ für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ gilt.

Aufgabe 12.2 (Lineare Abbildungen - Kern und Bild)[4 Punkte]
Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie den den Kern $\mathscr{N}(A)$ sowie das Bild $\mathscr{R}(A)$.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathscr{N}(A)$ sowie $\mathscr{R}(A)$.

Hinweis: Sie können die Folgerung 3.32 verwenden, um Ihre Ergebnisse zu überprüfen.

Aufgabe 12.3 (Homogene LGS)[4 Punkte]
Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 10 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.4 (Linearität von Abbildungen)[4 Punkte]
Zeigen Sie, dass die Abbildung f mit $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ X \mapsto A \cdot X$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ linear ist.
Hinweis: Sie können für X auch $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ verwenden.