

11. Übungsblatt

(Ausgabe am 11.01.2023, Abgabe bis 18.01.2023 12:00 Uhr)

Aufgabe 11.1 (Linearität der Matrixanwendung)[4 Punkte]

Beweisen Sie Satz 3.19 aus der Vorlesung: Zeigen Sie, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt:

- (a) $A(x + y) = Ax + Ay$ (Additivität)
- (b) $\lambda(Ax) = A(\lambda x)$ (Homogenität).

Aufgabe 11.2 (Matrix-Multiplikation)[4 Punkte]

Für $1 \leq i \leq 5$ seien A_i die Matrizen der Größe $i \times i$, die nur aus 1en bestehen und B_i die $i \times i$ Matrizen, deren Diagonale sowie die Einträge $(1, i)$, $(i, 1)$ den Wert 1 haben. Alle anderen Einträge von B_i sind jeweils 0. Ferner seien $u = (1, 2, 3, 4, 5)$ und $v = u^T$. Bestimmen Sie

- (a) $A_i \cdot B_i$ für alle $1 \leq i \leq 5$,
- (b) $A_i^2 \cdot B_i^2$ für alle $1 \leq i \leq 3$,
- (c) $u \cdot v$ und $v \cdot u$.

Aufgabe 11.3 (Obere Dreiecksmatrizen)[4 Punkte]

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt obere Dreiecksmatrix, falls $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$ gilt, d.h. sie ist von der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen wieder eine obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 11.4 (Maximumsnorm)[4 Punkte]

Die Maximumsnorm ist durch $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ gegeben.

- (a) Bestimmen Sie $\|v_j\|_\infty$ für

$$v_1 = (1, 2, 3), \quad v_2 = (3, \pi, 2), \quad v_3 = v_1 - v_2, \quad v_4 = \frac{1}{2} \cdot v_3, \quad v_5 = v_1 + v_2, \quad v_6 = 2 \cdot v_5.$$

- (b) Zeigen Sie, dass es sich bei der Maximumsnorm tatsächlich um eine Norm handelt.