J.W. Goethe Universität
R. Neininger

WS 2016/17
Blatt 6

Übungen zu
Stochastische Konzentrationsungleichungen

Aufgabe 21. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariable mit Werten in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $\mathbb{E}[\langle X_i, v\rangle] = 0$ fÃ¼r alle $1 \leq i \leq n$ und $v \in \mathcal{H}$. Zeigen Sie: Existieren Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ mit $\|X_i\| \leq c_i/2$ für alle $1 \leq i \leq n$, so gilt

$$\mathbb{P}\left(\left\|\sum_{i=1}^n X_i\right\| \geq t\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right)$$

für alle $t \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}$.

Aufgabe 22. In Molloy und Reed, *"Graph coloring and the probabilistic method"* wird folgende Anwendung von Talagrands Ungleichung behauptet:

> Let X be a non-negative random variable, not identically 0, which is determined by n independent trials $T_1, \ldots, T_n$, and satisfying for some $c, r > 0$:
>
> 1. changing the outcome of any one trial can affect X by at most c, and
> 2. for any s, if $X \geq s$ then there is a set of at most rs trials whose outcomes certify that $X \geq s$,
>
> then for any $0 \leq t \leq \mathrm{Med}(X)$,
>
> $$\mathbb{P}(|X - \mathrm{Med}(X)| > t) \leq 4\exp\left(-\frac{t^2}{8c^2 r \mathrm{Med}(X)}\right).$$

Zeigen Sie diese Behauptung.

Hinweis: Bedingung 2. beschreiben die Autoren genauer als: Es existieren Zufallsvariable $T_{i_1}, \ldots, T_{i_t}$ für ein $t \leq rs$, so dass eine beliebige Wahl der restlichen Zufallsvariablen keinen Wert von X unter s ergeben kann.

Abgabe am Mittwoch, den 25.01.2017, vor der Vorlesung.