Übungen zu
Stochastische Konzentrationsungleichungen

Aufgabe 17. Es werden m Kugeln unabhängig auf n Urnen verteilt, Y bezeichne die Anzahl besetzter Urnen. Interpretieren Sie Y als Konfigurationsfunktion und bestimmen Sie Konzentrationsungleichungen mit Satz 4.9 und Satz 4.12. Vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus Aufgabe 2.33.

Hinweis: Sie können mit Konfigurationen $x = (x_1, \dots, x_m)$ arbeiten, wobei die i-te Kugel in Urne x_i fällt. Für den zweiten Teil können Sie für zwei Konfigurationen x und y den Abstand $d_{\alpha(x)}(x, y)$ verwenden, wobei $\alpha_i(x) = 1$ falls $x_j \neq x_i$ für alle $j < i$ und sonst $\alpha_i(x) = 0$.

Aufgabe 18. Verbessern Sie das Resultat aus Aufgabe 4.26 mit Talagrands Ungleichung wie folgt: Für $Z(X) := \sup_{\alpha \in \mathcal{F}} Z(\alpha, X)$ gilt

$$\mathbb{P}(|Z(X) - \mathrm{Med}(Z(X))| \geq t) \leq 4 \exp\left(-\frac{t^2}{4\tau^2}\right).$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $|Z(\beta, x) - Z(\beta, y)| \leq d_\beta(x, y)$ für jeden Gewichtungsvektor $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ mit $\|\beta\| = 1$ gilt. Wählen Sie dann $y \in A_a := \{x \in [0,1]^d \,|\, Z(x) \leq a\}$ passend.

Aufgabe 19. Es bezeichne d_E den euklidischen Abstand im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für jede konvexe Menge $A \subset [0,1]^n$ und $x \in [0,1]^n$ gilt: $d_E(x, A) \leq d_T(x, A)$.

Hinweis: Sie können Lemma 4.22 verwenden.

Aufgabe 20. Sei X ein Zufallsvektor in $\mathbb{R}^n$ mit unabhängigen Komponenten, und es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe, Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante 1. Zeigen Sie, dass für alle $t > 0$:

$$\mathbb{P}(|f(X) - \mathrm{Med}(f(X))| \geq t) \leq 4 \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right).$$

Hinweis: Sie können Aufgabe 19 verwenden.

Abgabe bis einschließlich 16.01.2017 im Sektretariat (Raum 702) im Fach von Frau Kuntschik.