Übungen zur Vorlesung
Zufällige rekursive Strukturen

Aufgabe 13. Sei $(Y_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zufallsvariable mit $Y_0 = 0$, $Y_1 = 1$ und

$$Y_n \stackrel{d}{=} Y^{(1)}_{I_n} + Y^{(2)}_{I_n}, \quad n \geq 2,$$

wobei $(Y^{(1)}_n)_{n\geq 0}$, $(Y^{(2)}_n)_{n\geq 0}$ und I_n unabhängig sind, $(Y^{(r)}_n)_{n\geq 0}$ verteilungsgleich zu $(Y_n)_{n\geq 0}$ ist für $r = 1, 2$ und I_n uniform verteilt auf $\{0, \ldots, n-1\}$ ist. Finden Sie eine Skalierung der Y_n, die zu einem Grenzwertsatz mit nichtdegeneriertem Grenzwert führt. Identifizieren Sie den Grenzwert.

Hinweis: $\mathbb{E}[Y_n]$ lässt sich elementar explizit berechnen. Die Fixpunktgleichung erlaubt eine Interpretation über homogene Poissonprozesse auf $\mathbb{R}^+_0$, vgl. etwa Satz 2.3.2 der Vorlesung „Stochastische Prozesse“.

Aufgabe 14. Es seien $U_1, \ldots, U_n$ unabhängig und identisch unif$[0, 1]$ verteilt. Mit Y_n werde die Anzahl der *bucket*-Operationen bezeichnet, wenn aus $\{U_1, \ldots, U_n\}$ das Datum mit uniformem Rang ausgewählt wird. Dabei komme der Algorithmus *bucket selection* mit je $b \geq 2$ *buckets* zur Anwendung. Überlegen Sie, dass $Y_0 = Y_1 = 0$ sowie

$$Y_n \stackrel{d}{=} \sum_{r=1}^{b} B^{(n)}_r Y^{(r)}_{I^{(n)}_r} + n, \quad n \geq 2,$$

gelten mit den Bedingungen (3.2)–(3.4). Zudem ist $I^{(n)}$ nach $M(n; \frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{b})$ verteilt und $B^{(n)} = (B^{(n)}_1, \ldots, B^{(n)}_b)$ gegeben $I^{(n)} = (i_1, \ldots, i_b)$ nach $M(1; \frac{i_1}{n}, \ldots, \frac{i_b}{n})$.

Untersuchen Sie Y_n asymptotisch. Das zweite Beispiel aus Abschnitt 3.1, die zweite Notiz in Abschnitt 3.5 sowie Satz 2.1.1 sind nützlich.

Aufgabe 15. Betrachten Sie die Anzahl Y_n der Schlüsselaustausche von `Quickselect` beim Suchen eines uniform verteilten Elements in einer (unabhängigen) gleichverteilten Permutation der Länge n. In der Arbeit Mahmoud [1] wurde gezeigt, dass für $n \to \infty$ gilt

$$\frac{1}{60} n^2 + O(n) \leq \mathrm{Var}(Y_n) \leq \frac{41}{60} n^2 + O(n).$$

Identifizieren Sie $\mathrm{Var}(Y_n)$ asymptotisch, indem Sie Konvergenz einer passenden Skalierung in ℓ_p zeigen, $1 \leq p < \infty$, und die Varianz des Grenzwerts bestimmen.

Hinweis: Man kann mit verschiedenen Rekursionen arbeiten. Es kann nützlich sein zu beobachten, dass $U(1-U)$ und $\sqrt{U}(1-\sqrt{U})$ identisch verteilt sind für U uniform auf $[0, 1]$ und dass $\sqrt{U}$ eine größenverzerrte Version von U ist.

Aufgabe 16. Sei $(W_i)_{i\geq 1}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariable mit $\mathbb{E}\,[W_1^{2+\varepsilon}] < \infty$ mit einem $0 < \varepsilon \leq 1$. Zeigen Sie (z.B. unter Verwendung des Zugangs in Abschnitt 3.3) mit $\mu := \mathbb{E}\,[W_1]$ und $\sigma := \sqrt{\mathrm{Var}(W_1)} > 0$, dass

$$\zeta_{2+\varepsilon}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} W_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \mathcal{N}(0,1)\right) \to 0, \quad (n \to \infty).$$

Abgabe rechtzeitig vor der Übung im Januar.

[1] Mahmoud (2009) Average-case Analysis of Moves in Quick Select. *Proceedings of the Sixth Workshop on Analytic Algorithmics and Combinatorics (ANALCO),* 35–40.