

Übungen zur Vorlesung Zufällige rekursive Strukturen

Aufgabe 9. Es seien X_1, \dots, X_K unabhängige Zufallsvariable und Y_1, \dots, Y_K unabhängige Zufallsvariable, alle mit Verteilungen in $\mathfrak{P}_s(M_1, \dots, M_m)$ mit $s > 0$. Zeigen Sie

$$\zeta_s \left(\sum_{r=1}^K X_r, \sum_{r=1}^K Y_r \right) \leq \sum_{r=1}^K \zeta_s(X_r, Y_r).$$

Aufgabe 10. Betrachten Sie die Abbildung

$$T : \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}, \quad \mu \mapsto \mathcal{L} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}Z + \frac{1}{\sqrt{2}}Z' \right),$$

mit Z und Z' unabhängig mit Verteilung μ . Bestimmen Sie alle Fixpunkte von $T \perp \mathfrak{P}_2$. (Es ist bekannt, dass dies auch alle Fixpunkte von T in \mathfrak{P} sind.)

Aufgabe 11. Die Anzahl gezogener roter Kugeln aus einer Urne mit r roten und b blauen Kugel bei k -maligem Ziehen ohne Zurücklegen ist hypergeometrisch $\text{Hyp}(k, r, r+b)$ verteilt, wobei $r, b \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq r+b$. Es sei U uniform auf $[0, 1]$ verteilt und Z_n gegeben $U = u$ habe die $\text{Hyp}(\lfloor nu \rfloor, \lfloor n(1-u) \rfloor, n-1)$ -Verteilung für alle $u \in [0, 1)$ und $n \geq 2$. Zeigen Sie

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{L_2} U(1-U) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass für $\text{Hyp}(k, r, r+b)$ -verteiltes G gilt

$$\mathbb{E}[G] = \frac{kr}{r+b}, \quad \text{Var}(G) = \frac{krb(r+b-k)}{(r+b)^2(r+b-1)}.$$

Aufgabe 12. Betrachten Sie die Anzahl Y_n der Schlüsselaustausche von **Quickselect** beim Suchen des kleinsten Elements in einer gleichverteilten Permutation der Länge n . (Die Partitionierung der Liste in Teillisten werde durch Zeiger realisiert, die die Liste von links und rechts nach zu tauschenden Elementen durchsuchen.) Leiten Sie eine Rekursion der Form $Y_n =_d Y_{I_n} + b_n$ ab mit passendem (I_n, b_n) . Skalieren Sie diese und zeigen Sie einen Grenzwertsatz für die skalierten Y_n unter Verwendung von Theorem 2.1.1. Zum Nachweis der Bedingungen dort ist Aufgabe 11 nützlich.

Abgabe am Donnerstag, den 15. Dezember 2016, vor der Vorlesung.