J.W. Goethe Universität
R. Neininger

WS 2016/17
Blatt 2

Übungen zur Vorlesung
Zufällige rekursive Strukturen

Aufgabe 5. Seien $0 < p < 1$, U eine unif$[0,1]$ verteilte Zufallsvariable sowie $\mu, \nu \in \mathfrak{P}_p$ mit Quantilfunktionen F_μ^{-1} und F_ν^{-1}. Zeigen Sie, dass $(F_\mu^{-1}(U), F_\nu^{-1}(U))$ im Allgemeinen kein optimales ℓ_p-Coupling von μ und ν ist.

Hinweis: Sie können ein Gegenbeispiel konstruieren, wobei μ und ν jeweils zweielementigen Träger haben.

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass $\mu, \nu, \rho \in \mathfrak{P}_p(\mathbb{R}^2)$, $0 < p < \infty$, im Allgemeinen nicht gleichzeitig optimal bezüglich ℓ_p gekoppelt werden können, dass also keine Zufallsvariable W_μ, W_ν, W_ρ existieren, so dass (W_μ, W_ν), (W_ν, W_ρ) und (W_μ, W_ρ) jeweils optimale ℓ_p-Couplings ihrer Verteilungen sind.

Hinweis: Für ein Gegenbeispiel können Sie $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ als Ecken eines gleichseitigen Dreiecks wählen sowie $\mu = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_b)$, $\nu = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_c)$ und $\rho = \frac{1}{2}(\delta_b + \delta_c)$.

Aufgabe 7. Sei $(\mathbb{M}, d)$ ein kompakter, separabler metrischer Raum und $0 < p < \infty$. Zeigen Sie, dass $(\mathfrak{P}(\mathbb{M}), \ell_p)$ ein kompakter metrischer Raum ist.

Aufgabe 8. Sei $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$ ein separabler Banach-Raum, $1 \leq p < \infty$, $\mu \in \mathfrak{P}_p(\mathbb{B})$ und $t_a : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, $x \mapsto x + a$ die Translation um $a \in \mathbb{B}$. Zeigen Sie für das Bildmaß $t_a(\mu)$, dass

$$\ell_p(\mu, t_a(\mu)) = \|a\|.$$

Abgabe am Donnerstag, den 1. Dezember 2016, vor der Vorlesung.