Übungen zu
Stochastische Analyse von Algorithmen

Aufgabe 17. Ein zufälliger Binärsuchbaum werde von einer gleichverteilten Permutation $(\Pi_1, \dots, \Pi_n)$ von $\{1, \dots, n\}$ aufgebaut. Es bezeichne N_i die Anzahl der Knoten im Teilbaum, dessen Wurzel das Element Π_i ist für $1 \le i \le n$. Die Wurzel selbst werde zu N_i nicht mitgezählt. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbb{E}\, N_i = \frac{2(n-i)}{i+1}.$$

Aufgabe 18. Betrachten Sie die Situation aus Aufgabe 17. Es werde nun einer der n Knoten im Baum zufällig und gleichverteilt gewählt. Die Größe seines Teilbaums (ohne Wurzel) werde mit N bezeichnet. Zeigen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von Aufgabe 17, dass

$$\mathbb{E}\, N \sim 2 \log n, \quad (n \to \infty).$$

Zeigen Sie ferner, dass $\mathbb{E}\,[N^a] = O(1)$ für jedes $a \in (0,1)$ gilt.

Aufgabe 19. Sei U eine uniform auf $[0,1]$ verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie:

(i) $\mathcal{L}(\max\{U, 1-U\}) = \mathcal{L}\left(\frac{1+U}{2}\right)$.

(ii) $\mu := \mathbb{E}\, \log \frac{1+U}{2} = -1 + \log 2 = -0{,}3068\dots$

Aufgabe 20. Wir betrachten das Modell zufälliger Binärsuchbäume mit n Knoten aus dem Beweis von Satz 5.9, bei dem die Wurzel Wert n erhält sowie die Kinder eines Knoten mit Wert V Werte $\lfloor V\overline{U} \rfloor$ und $\lfloor V(1-\overline{U}) \rfloor$ mit einer unabhängigen uniform auf $[0,1]$ verteilten Zufallsvariable $\overline{U}$. Der Baum besteht aus allen Knoten des vollständigen Binärbaums, die Werte ≥ 1 haben. Um eine untere Schranke für die Höhe des zufälligen Binärsuchbaumes zu erhalten, betrachten Sie den von der Wurzel startenden Pfad, der jeweils dem Ast, der zum Kind mit dem größeren der beiden Gewichte führt, folgt. Sei T_n die Tiefe des letzten Knotens dieses Pfads. Zeigen Sie, dass

$$\frac{T_n}{\log n} \xrightarrow{\mathbb{P}} -\frac{1}{\mu} = 3{,}2588\dots \quad (n \to \infty),$$

mit der Konstanten μ aus Aufgabe 19.

Hinweis: Verwenden Sie das schwache Gesetz großer Zahlen.

Bemerkung: Die Aufgabe zeigt, dass dieses Vorgehen keine Knoten liefert, die annähernd auf dem Niveau der Höhe des Baumes sitzen. Für die Höhe H_n des Baumes gilt nach Satz 5.9

$$\frac{H_n}{\log n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 4{,}3110\dots \quad (n \to \infty).$$

Abgabe am Montag, den 16. Januar, vor der Vorlesung.