J.W. Goethe Universität
R. Neininger

WS 2022/23
Blatt 4

Übungen zu Stochastische Analyse von Algorithmen

Aufgabe 13. Eine Teilmenge I der Ecken eines Graphen G heißt *unabhängig* in G, falls keine zwei Ecken aus I in G benachbart sind. Die Kardinalität einer größten unabhängigen Menge in G heißt *Unabhängigkeitszahl von* G und wird mit $\alpha(G)$ bezeichnet. Der Graph G habe n Ecken mit Graden $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\alpha(G) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + d_i}.$$

Aufgabe 14. Betrachten Sie einen zufälligen Graphen $G(n,p)$ mit $p = p(n) = (\log\log n)/n$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G(n,p) \text{ enthält ein Dreieck}) = 1.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Anzahl der Dreiecke in $G(n,p)$, und verwenden Sie die *second moment method.*

Aufgabe 15. Es seien $v_1, \ldots, v_n$ Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^d$, also $\|v_j\| = 1$ für $j = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass Vorzeichen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, +1\}$ existieren mit

$$\|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| \leq \sqrt{n}.$$

Zudem existieren Vorzeichen $\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_n' \in \{-1, +1\}$ mit

$$\|\varepsilon_1' v_1 + \cdots + \varepsilon_n' v_n\| \geq \sqrt{n}.$$

Aufgabe 16. Der zufällige Binärsuchbaum werde sukzessive von einer Folge unabhängiger, identisch uniform auf $[0,1]$ verteilter Zufallsvariable aufgebaut. Sind n interne Knoten in den Baum eingefügt, so hat der Baum $n+1$ externe Knoten und einer dieser externen Knoten wird durch den $n+1$-ten internen Knoten ersetzt. Zeigen Sie, dass alle externen Knoten mit derselben Wahrscheinlichkeit $1/(n+1)$ vom $n+1$-ten internen Knoten ersetzt werden.

Dies bedeutet, dass Sie einen zufälligen Binärsuchbaum wie folgt generieren können: Man starte mit der Wurzel und ihren zwei externen Knoten. In jedem Schritt wird ein externer Knoten uniform gewählt und durch einen intenen Knoten ersetzt.

Abgabe am Montag, den 19. Dezember, vor der Vorlesung.