J.W. Goethe Universität
R. Neininger

WS 2022/23
Blatt 3

Übungen zu
Stochastische Analyse von Algorithmen

Aufgabe 9. Berechnen Sie für einen Galton–Watson Prozess $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit *offspring*-Verteilung gegeben durch $\mathbb{P}(Z_1 = i) = p_i = p^i(1-p)$ für $i \geq 0$ mit $0 < p < 1$ folgende Größen: Die erzeugende Funktion $f(s) = \mathbb{E}\,[s^{Z_1}]$, $\mathbb{P}(Z_n = 0)$ sowie die Aussterbewahrscheinlichkeit q.

Aufgabe 10. Die *offspring*-Verteilung eines Galton–Watson Prozesses habe Mittelwert m, die Aussterbewahrscheinlichkeit des Prozesses sei q.

(a) Geben Sie eine *offspring*-Verteilung zu beliebig vorgegebenen $m > 1$ und $q < 1$ an. (Dies bedeutet, dass der Mittelwert m keine Information über die Aussterbewahrscheinlichkeit q enthält.)

(b) Geben Sie eine *offspring*-Verteilung zu beliebig vorgegebenen $q < 1$ und $m = \infty$ an.

Hinweis: Mit $p_k = ca^k$ für $k \geq 1$ können Sie passende Parameter $0 \leq p_0, a < 1$ sowie $c > 0$ für (a) finden.

Aufgabe 11. Für einen subkritischen Galton–Watson Prozess $(Z_n)_{n\geq 0}$ bezeichnen $|T| := \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$ die Gesamtgröße der Population sowie g_Z und g_T die erzeugenden Funktionen von Z_1 bzw. von $|T|$. Zeigen Sie, dass gilt

$$g_T(s) = s g_Z(g_T(s)), \quad \mathbb{E}\,[|T|] = \frac{1}{1 - \mathbb{E}\,[Z_1]}.$$

Berechnen Sie g_T für den binären Galton–Watson Prozess, d.h. für die *offspring*-Verteilung gegeben durch $\mathbb{P}(Z_1 = i) = p_i$ mit $p_0 = 1 - p$ und $p_2 = p$ mit $0 < p < 1$.

Aufgabe 12. Bezeichne L_n die Länge einer längsten aufsteigenden Teilfolge einer gleichverteilten Permutation der Länge n. Dann gilt

$$\mathbb{P}(L_n \geq e\sqrt{n}) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Hinweis: Sie können eine *first moments method* in der Form $\mathbb{P}(N \geq 1) \leq \mathbb{E}\,[N]$ für Zufallsvariable N in $\mathbb{N}_0$ verwenden.

Abgabe am Montag, den 5. Dezember, vor der Vorlesung.